На правах рукописи

Файзрахманов Марат Хайдарович

Обобщенно вычислимые нумерации и спектры степеней счетных семейств

Специальность 01.01.06 —
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Казань — 2020

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Научный консультант:	**Калимуллин Искандер Шагитович,** доктор физико-математических наук, профессор РАН, доцент
Официальные оппоненты:	**Бадаев Серикжан Агыбаевич,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой геометрии, алгебры и математической логики Казахского национального университета им. аль-Фараби, г. Алма-Ата, Казахстан
	Когабаев Нурлан Талгатович, доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
	Мельников Александр Геннадьевич, доктор физико-математических наук, старший лектор Университета Мэсси, г. Окленд, Новая Зеландия
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Защита состоится «___» ____________ 2020 г. в ___ часов ___ минут на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 в конференц-зале Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН и на сайте math.nsc.ru.

Автореферат разослан «___» ____________ 2020 года

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.015.02,
канд. физ.-мат. наук, доцент А. И. Стукачев

Общая характеристика работы

В диссертации исследуются семейства подмножеств натуральных чисел и мера их алгоритмической сложности с позиции двух взаимосопряженных подходов. Первый подход заключается в исследовании верхней полурешетки вычислимых нумераций заданного семейства, причем вычислимость нумерации может пониматься и в слабых формах, например, как равномерная перечислимость элементов семейства относительно заданного оракула, или же их вычислимость в арифметической или аналитической иерархиях. Как отмечается в монографии Ю. Л. Ершова [13], эта полурешетка позволяет различать разнообразные внутренние структурные свойства семейств вычислимо перечислимых множеств и частично вычислимых функций. Таким образом полурешетка вычислимых нумераций может быть принята за внутреннюю меру алгоритмической сложности соответствующего семейства. Второй подход основан на понятии спектра степеней заданного семейства — класса тьюринговых степеней множеств, относительно которых семейство вычислимо. Спектр степеней семейства, как правило, является отражением информации об алгоритмических атрибутах, хранящейся в его элементах. Примем его за внешнюю меру алгоритмической сложности заданного семейства. Данный подход находит применение и в теории вычислимых моделей, поскольку каждому семейству может быть сопоставлена алгебраическая система с тем же спектром степеней (см., например, [43]).

Актуальность темы. Базовые понятия теории нумераций были сформулированы А. Н. Колмогоровым в середине 50-ых годов XX столетия (см. [35]). Первое содержательное развитие эта система понятий получила в работах В. А. Успенского [29–32]. Объекты, связанные с нумерациями семейств частично вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств, независимо возникали в работах Деккера [40], Райса [50], Роджерса [51] и др. Начавшееся примерно в те же годы изучение конструктивных алгебр выявили необходимость в исследовании не только нумераций семейств множеств и функций, но и объектов произвольной природы. Эти направления были объединены А. И. Мальцевым в обзоре [19]. Там же были уточнены и систематизированы основные понятия общей теории нумераций. Работы Мальцева придали импульс для изучения верхних полурешеток как вычислимых нумераций семейств множеств и функций, так и нумераций произвольных семейств объектов. К середине 70-ых годов прошлого столетия были опубликованы десятки статей по этим направлениям (достаточно подробная библиография есть в монографии [13]). Во второй половине 90-ых годов произошло переосмысление понятия вычислимой нумерации. Ершов в своей монографии [14] расширил классическое понятие нумерации, разрешив рассматривать сюръекции, заданные не только на множестве натуральных чисел, но и на произвольных Σ-подмножествах допустимых множеств. Рассматривая вычислимость в допустимых множествах, надлежащем образом было расширено и понятие вычислимой нумерации. Теория нумераций в допустимых множествах получила свое первое развитие в работах В. Г. Пузаренко [23; 25–27]. Примерно в то же время в работе С. С. Гончарова и А. Сорби [6] была предложена концепция вычислимых нумераций относительно конструктивных языков, описывающих нумеруемое семейство объектов. Такие нумерации были названы *обобщенно вычислимыми*. Фактически в работе [6] был дан старт изучению нумераций, вычислимых в одной из иерархий — арифметическая и аналитическая иерархии, иерархия Ершова, что привело к публикации множества работ в этом направлении, среди которых работы С. А. Бадаева, С. С. Гончарова, С. Лемппа, С. Ю. Подзорова, Р. Соломона, А. Сорби (см., например, [2; 3; 7; 21; 22; 38]). К середине 2010-х годов обобщенно вычислимые нумерации стали содержательно рассматриваться и с позиции равномерной перечислимости семейств относительно произвольного оракула. Такие нумерации, впервые изученные в рабте Бадаева и Гончарова [4] (см. также [5; 15]), были названы A-*вычислимыми*, где A — заданный оракул. Несмотря на обилие работ, посвященных обобщенно вычислимым нумерациям, имеется ряд открытых вопросов о полурешетках Роджерса обобщенно вычислимых семейств, среди которых вопросы:

- о спектре их возможных мощностей и решеточности, сформулированные Ершовым [12] для семейств, вычислимых в традиционном смысле;
- о существовании и распределении экстремальных элементов этих полурешеток, поставленные в работах Бадаева и Гончарова [2; 4];
- о справедливости в обобщенном случае ряда структурных теорем о классических полурешетках Роджерса, поставленные в работе Подзорова [22].

В решении перечисленных вопросов и заключаются цели и задачи диссертации. В рамках диссертационной работы среди обобщенно вычислимых нумераций рассматриваются преимущественно A-вычислимые нумерации, изучению которых посвящена глава 2. В ней также, путем надлежащего расширения класса оракулов, состоящего из ненулевых скачков пустого множества, получена серия результатов о нумерациях семейств арифметических множеств.

Отметим, что с помощью результатов совместной работы Морозова и Пузаренко [20] к понятию A-вычислимых нумераций можно прийти и от вычислимых нумераций в допустимых множествах. В главе 3 диссертационной работы этот подход используется для изучения нумераций семейств аналитических множеств. В ней получено развитие результатов Оуингса [49] о нумерациях семейств Π^1_1-множеств путем рассмотрения не только однозначных, но и позитивных нумераций семейств Π^1_1- и Σ^1_1-множеств.

Проблема описания тьюринговых степеней, перечисляющих заданное семейство, возникла в связи с так называемой проблемой Лемппа [37, 9.5]: существует ли счетная неконструктивизируемая алгебраическая система, конструктивизируемая во всех ненулевых степенях? Было ясно, что естественным объектом классической теории вычислимости, позволяющим построить такую систему, является семейство множеств, поскольку более простой объект — множество, либо является вычислимо перечислимым, либо не вычислимо перечислим относительно ненулевой степени (см. [42, 8.12]). В конце 90-ых годов прошлого столетия Вехнер [55] нашел семейство, с помощью которого удалось решить проблему Лемппа. При построении семейства Вехнер использовал следующий интересный прием. Требования на невычислимые множества X, $X \neq W_n$ и $\overline{X} \neq W_n$, закодированы в элементы семейства $\{n\} \oplus F$ с условием $F \neq W_n$. Семейства, в которых условия на его спектр закодированы в условия на элементы этого семейства, стали называться *вехнеровскими*. Формализация этого понятия принадлежит И. Ш. Калимуллину. В своих работах [16; 17] он стал рассматривать семейства вида

$$\mathcal{W}(\mathcal{R},\nu) = \{\{n\} \oplus U : n \in \mathbb{N} \ \& \ U \in \mathcal{R} \ \& \ U \neq \nu(n)\},$$

где $\mathcal{R}$ — некоторое, как правило вычислимое, семейство, а ν — Δ^0_2-вычислимая нумерация некоторого семейства. В процитированных работах Калимуллин нашел законы, отражающие свойства нумерации ν на спектр степеней семейства $\mathcal{W}(\mathcal{R},\nu)$, получив тем самым серию алгебраических систем с ранее неизвестными спектрами, среди которых имеются примеры классов тьюринговых степеней с двухэлементными дополнениями, дополнения нижних конусов произвольных низких или вычислимо перечислимых тьюринговых степеней, нетривиальные объединения спектров и т.д. Вехнеровские семейства нашли применение и получили дальнейшее развитие в работах Лемппа, Монталбана, Миллера, Турецкого, Эндрюса и др. (см., например, [36; 39; 41]). С применением семейств в других разделах теории вычислимых моделей можно ознакомиться в работе [43].

В диссертационной работе вехнеровские семейства являются отправной точкой для построения спектральной иерархии наследственно счетных семейств, которое изложено в главе 4. Это приводит и к примерам алгебраических систем с ранее неизвестными спектрами степеней.

В главе 5 с использованием семейств, уже отличных от вехнеровских, строятся алгебраические системы с некоторыми новыми алгоритмическими свойствами.

Цель работы. Цель работы заключается в алгоритмической и алгебраической классификации полурешеток Роджерса обобщенно вычислимых семейств, построении спектральной иерархии наследственно счетных семейств и сопоставлении их спектров степеней с известными классами алгоритмической сложности.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Результаты, касающиеся обобщений понятий вычислимой нумерации и вычислимого семейства, продолжают исследования, начатые в работах Ершова [14], Бадаева, Гончарова, Сорби [4; 6] и Пузаренко [23]. Спектры степеней наследственно счетных семейств исследуются впервые.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть полезны, в первую очередь, специалистам по теории нумераций и теории вычислимых моделей. Кроме того, они могут быть включены в программы спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в различных областях математической логики и теории алгоритмов.

Методология и методы исследования. В работе используются как методы работы со структурами m-степеней, адаптированные для обобщенно вычислимых нумераций, так и методы построения семейств вехнеровского типа с заданными спектрами степеней, адаптированные для наследственно счетных семейств. Кроме того, применялись классические методы математической логики и теории алгоритмов — методы разрешения, приоритета и вынуждения.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Установлено, что для каждого невычислимого множества A полурешетка Роджерса произвольного нетривиального A-вычислимого семейства бесконечна и не является решеткой. Для случая семейств, вычислимых в классическом смысле, соответствующие вопросы были сформулированы Ершовым [12]. Результаты опубликованы в работах автора [57; 63].

2. Найдено положительное решение проблемы Подзорова [22] о предельности наибольших элементов полурешеток Роджерса Σ^0_{n+2}-вычислимых семейств. Оно опубликовано в работе автора [56].
3. Получено описание множеств A, для которых каждое конечное семейство A-в.п. множеств обладает универсальной A-вычислимой нумерацией. Для произвольного множества A доказан критерий существования универсальных A-вычислимых нумераций конечных семейств A-в.п. множеств, который приводит к решению соответствующего вопроса из работы Бадаева и Гончарова [4]. Результаты опубликованы в работе автора [64].
4. Найдено положительное решение проблемы эффективной бесконечности множества минимальных нумераций бесконечных Σ^0_{n+2}-вычислимых семейств, поставленной в работе Бадаева и Гончарова [2]. Оно опубликовано в работе автора [62].
5. Найдены законы, взаимосвязывающие гиперарифметичность множества $A \in \Pi^1_1(\Sigma^1_1)$ с наличием однозначных вычислимых Π^1_1-(Σ^1_1-)нумерацией семейства его Π^1_1-(Σ^1_1-)подмножеств. Если A является m-полным в своем уровне, то указанное семейство является представлением семейства всех Σ-подмножеств одного распространенного в теории допустимых множеств класса наследственно конечных надстроек. Эти результаты развивают исследования Оунгса [49] однозначных нумераций семейств из аналитической иерархии. Они получены в нераздельном соавторстве с Калимуллиным и Пузаренко, и опубликованы в работах [58; 60; 61].
6. Исследованы спектры степеней наследственно счетных семейств. Для каждого натурального $n > 0$ построено наследственно счетное семейство ранга n, у которого спектр степеней отличен от спектров всех наследственно счетных семейств рангов $m < n$. Результат получен в нераздельном соавторстве с Калимуллиным и опубликован в работе [66].
7. Для каждого вычислимого ординала α найдено наследственно счетное семейство (а следовательно и алгебраическая система) ранга $\alpha + 1$, у которого спектр степеней совпадает с классом степеней не α-низких множеств. Для вычислимых ординалов-последователей системы с соответствующими спектрами были найдены в работе Гончарова,

Харизановой, Найт и др. [43]. Результат получен в нераздельном соавторстве с Калимуллиным и опубликован в работе [67].

Апробация работы. Результаты по мере их получения докладывались на международных конференциях:

– Алгебра и математическая логика, Казань, 25–30 сентября 2011 г.
– Мальцевские чтения, Новосибирск, 11–14 октября 2011 г.
– Алгебра и математическая логика: теория и приложения, Казань, 2–7 июня 2014 г.
– Logic Colloquium, Вена, Австрия, 2–7 июня 2014 г.
– Мальцевские чтения, Новосибирск, 3–7 мая 2015 г.
– Фундаментальные проблемы алгебры, анализа и геометрии, Казань, 26 июня – 2 июля 2016 г.
– Алгебра и математическая логика: теория и приложения, Казань, 24–28 июня 2019 г.
– The First Workshop on Digitalization and Computable Models, Новосибирск, 16–20 декабря 2019 г.

Кроме того, результаты докладывались на семинарах Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН «Алгебра и логика» (руководитель — академик РАН Ю. Л. Ершов), «Конструктивные модели» (руководители — академик РАН С. С. Гончаров, профессор П. Е. Алаев), а также на семинарах по теории вычислимости Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского (руководители — академик АН РТ М. М. Арсланов, профессор РАН И. Ш. Калимуллин) и итоговых научных конференциях Казанского университета.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 печатных публикациях [56–70]. Каждая публикация издана в журнале, входящем в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора наук или в приравненных к ним зарубежных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Утверждения нумеруются тремя цифрами: первая обозначает номер главы, вторая — номер параграфа в главе, а третья — номер утверждения в параграфе. Список литературы содержит 104 наименования. Объем диссертации составляет 226 страниц.

Содержание работы

Первая глава носит вводный характер. В ней приведены обозначения и терминология, используемые в работе (параграф 1), и базовые сведения о вычислимых нумерациях (параграф 2). В третьем и четвертом параграфах изложены некоторые известные подходы к обобщению понятия вычислимой нумерации — путем релятивизации относительно произвольного оракула и перехода к вычислимости в допустимых множествах. В пятом параграфе излагаются базовые сведения о важном подклассе вычислимых в допустимых множествах нумераций — вычислимых A-нумерациях, определенных условием сводимости по перечислимости универсального множества нумерации к множеству A, а в шестом рассматривается случай вычислимых Π^1_1- и Σ^1_1-нумераций, которые получаются из A-нумераций заменой множества A на m-полное Π^1_1- или Σ^1_1-множество соответственно.

Вторая глава посвящена изучению структурных свойств полурешеток Роджерса A-вычислимых семейств. Она содержит пять параграфов, имеет наибольший объём и является наиболее сложным с технической точки зрения фрагментом работы.

В первом параграфе второй главы решаются вопросы о спектре возможных мощностей данных полурешеток и их решеточности. Для случая вычислимых в классическом смысле семейств данные вопросы были сформулированы Ершовым [12], а решены Хуторецким [34] и Селивановым [28] соответственно. Для Σ^0_{n+2}-вычислимых семейств, $n \in \mathbb{N}$, сформулированные вопросы были решены в работе Гончарова и Сорби [6]. Так в каждом случае полурешетки Роджерса либо одноэлементны, либо имеют бесконечную мощность и не являются решетками. В первом параграфе второй главы устанавливается, что это верно и для полурешеток Роджерса $\mathcal{R}^A(\mathcal{S})$ A-вычислимых семейств $\mathcal{S}$, где множество A невычислимо. Для этого отдельно рассматриваются случаи, когда семейство $\mathcal{S}$ конечно и бесконечно. В первом случае были рассмотрены идеалы верхней полурешетки m-степеней

$$\mathrm{I}^m_T(A) = \{\deg_m(X) : X \leqslant_T A\}.$$

Их бесконечность следует из результатов работ [45;54], а нерешеточность — из следствия 2.1.2. Таким образом, из сформулированного ниже предложения 2.1.3 сразу вытекает, что если конечное семейство A-в.п. множеств нетривиально (содержит более одного элемента), то $\mathcal{R}^A(\mathcal{S})$ бесконечна и не является решеткой.

Предложение 2.1.3. *Если A невычислимо и $\mathcal{S}$ — конечное нетривиальное семейство A-в.п. множеств, то $\mathcal{R}^A(\mathcal{S})$ содержит идеал, изоморфный $\mathrm{I}_T^m(A)$.*

Бесконечная мощность и нерешеточность полурешеток $\mathcal{R}^A(\mathcal{S})$ для бесконечных семейств $\mathcal{S}$ следует из теоремы 2.1.5

Теорема 2.1.5. *Если A — невычислимое множество и $\mathcal{S}$ — бесконечное A-вычислимое семейство, то существует последовательность $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ A-вычислимых нумераций $\mathcal{S}$, такая что для любых различных m, n смежные классы нумераций α_m и α_n образуют минимальную пару в $\mathcal{R}^A(\mathcal{S})$.*

Второй параграф второй главы посвящен вопросу о возможности обобщения теоремы Хуторецкого [34] на случай A-вычислимых семейств. Он содержит доказательство наиболее сложного с технической точки зрения основного результата диссертации. Приведем исходную формулировку теоремы Хуторецкого.

Теорема. *Пусть δ и ρ — вычислимые нумерации семейства $\mathcal{S}$, причем $\rho \nleqslant \delta$. Тогда найдется такая вычислимая нумерация ν семейства $\mathcal{S}$, что $\delta < \nu$ и $\rho \nleqslant \nu$.*

Исследования в этом направлении были начаты Подзоровым. В работе [22] им была доказана серия достаточных условий для Σ^0_{n+2}-вычислимых семейств, при выполнении которых их полурешетки Роджерса удовлетворяют следствию теоремы Хуторецкого о предельности своих наибольших элементов. Там же были сформулированы следующие вопросы.

Вопрос 1. *Является ли наибольший элемент (в случае его наличия) полурешетки Роджерса любого Σ^0_{n+2}-вычислимого семейства предельным?*

Вопрос 2. *Остается ли справедливой теорема Хуторецкого при переходе от вычислимых к Σ^0_{n+2}-вычислимым семействам?*

В данном параграфе приводится положительное решение первого вопроса, которое является следствием теорем 2.2.1 и 2.2.5, представляющих собой также частичный ответ на второй вопрос.

Теорема 2.2.1. *Пусть B — невычислимое множество, $B \leqslant_T A$, и $\mathcal{S}$ — A-вычислимое семейство. Тогда для любых A-вычислимых нумераций δ и ρ семейства $\mathcal{S}$, если δ не является B-универсальной[1] и $\rho \nleqslant \delta$, то найдется такая A-вычислимая нумерация ν семейства $\mathcal{S}$, что $\delta < \nu$ и $\rho \nleqslant \nu$.*

[1]Существует A-вычислимая нумерация γ семейства $\mathcal{S}$, не сводимая к δ посредством никакой B-вычислимой функции.

Теорема 2.2.5. *Пусть A — высокое над*[2] *B, $\mathcal{S}$ — A-вычислимое семейство, δ и ρ — A-вычислимые нумерации $\mathcal{S}$, для которых $\rho \nleqslant \delta$, причем ρ неразложима и B-универсальна. Тогда существует такая A-вычислимая нумерация ν семейства $\mathcal{S}$, что $\delta < \nu$ и $\rho \nleqslant \nu$.*

Таким образом, если $\emptyset' \leqslant_T A$, то предельность наибольших элементов полурешеток Роджерса A-вычислимых (в частности, Σ^0_{n+2}-вычислимых) семейств, с учетом их неразложимости (см. [4]), выводится из следствия 2.2.6.

Следствие 2.2.6. *Пусть $\emptyset' \leqslant_T A$, $\mathcal{S}$ — A-вычислимое семейство, δ и ρ — A-вычислимые нумерации $\mathcal{S}$, такие что $\delta < \rho$ и ρ неразложима. Тогда существует такая A-вычислимая нумерация ν семейства $\mathcal{S}$, что $\delta < \nu$ и $\rho \nleqslant \nu$.*

Третий параграф второй главы посвящен вопросам существования и (пред)полноты универсальных A-вычислимых нумераций. Особое место в нем занимает критерий существования универсальных нумераций конечных семейств A-в.п. множеств. Отправной точкой для его получения стала теорема Бадаева и Гончарова [4], которая формулируется следующим образом:

Теорема. *Пусть $\emptyset' \leqslant_T A$. Тогда произвольное конечное семейство A-в.п. множеств $\mathcal{S}$ обладает универсальной A-вычислимой нумерацией в том и только в том случае, если $\mathcal{S}$ содержит наименьший по включению элемент.*

В той же работе поставлен

Вопрос 3. *Остается ли теорема справедливой при $\emptyset <_T A <_T \emptyset'$ и $A|_T\emptyset'$?*

Ответ на данный вопрос, а также упомянутый критерий, вытекают из следствия 2.3.4 и теоремы 1 работы [5], согласно которой любое конечное семейство A-в.п. множеств с наименьшим по включению элементом обладает универсальной A-вычислимой нумерацией.

Следствие 2.3.4. *Для множества A следующие условия эквивалентны:*

1. *A имеет гипериммунную степень;*
2. *существует конечное семейство A-в.п. множеств, не имеющее универсальных A-вычислимых нумераций;*
3. *каждое конечное семейство A-в.п. множеств без наименьшего по включению элемента не имеет универсальных A-вычислимых нумераций.*

[2] $B \leqslant_T A$ и $B'' \leqslant_T A'$.

Помимо сформулированного критерия, в третьем параграфе получено полное описание множеств A, для которых все универсальные A-вычислимые нумерации произвольных семейств полны относительно любого элемента. Как доказывается в предложении 2.3.6, описание заключается в условии $\emptyset' \leqslant_T A$. Если ограничиться конечными семействами, то можно предъявить и описание множеств A, для которых универсальные A-вычислимые нумерации предполны.

Следствие 2.3.8. *Для множества A следующие условия эквивалентны:*

1. *A имеет гипериммунную степень;*
2. *каждое конечное семейство A-в.п. множеств либо не имеет универсальной A-вычислимой нумерации, либо имеет универсальную предполную A-вычислимую нумерацию.*

В четвертом параграфе второй главы излагаются результаты исследования минимальных нумераций бесконечных A-вычислимых семейств $\mathcal{S}$. Основной вопрос, на решение которого направлены изложенные в нем результаты, сформулирован в работе Бадаева и Гончарова [2].

Вопрос 4. *Является ли множество всех минимальных нумераций семейства $\mathcal{S}$ эффективно бесконечным и, в частности, невычислимым? Иными словами, если $\{\mu_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ — последовательность минимальных нумераций семейства $\mathcal{S}$ такая, что*

$$\{\langle e,m,x\rangle : x \in \mu_e(m)\} \in \Sigma^0_{n+2},$$

то можно ли по ней эффективно построить минимальную Σ^0_{n+2}-вычислимую нумерацию β семейства $\mathcal{S}$, не эквивалентную ни одной из нумераций μ_e, $e \in \mathbb{N}$?

Положительное решение сформулированного вопроса приведено в следствии 2.4.5 теоремы 2.4.4 при $A = \emptyset^{(n+1)}$.

Теорема 2.4.4. *Пусть A — высокое множество. Тогда для любого бесконечного A-вычислимого семейства $\mathcal{S}$ справедлива сводимость $\overline{A^{(3)}} \leqslant_1 \mathrm{Min}^A(\mathcal{S})$, где $\mathrm{Min}^A(\mathcal{S})$ — множество геделевских номеров минимальных A-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{S}$.*

Заметим, что следствие 2.4.5 не выводится из теоремы 2.4.4 напрямую, для его доказательства нужно приложить дополнительные усилия.

Пятый, заключительный параграф второй главы посвящен вопросам дистрибутивности и слабой дистрибутивности полурешеток Роджерса. В следствии 2.5.5 доказывается, что полурешетки $\mathcal{R}^A(\mathcal{S})$ бесконечных A-вычислимых семейств $\mathcal{S}$ не являются слабо дистрибутивными, где A — произвольное невычислимое множество. Для случая Σ^0_{n+2}-вычислимых семейств этот результат был доказан в работе [38]. Отметим, что невычислимость множества A здесь необходима, так как из результатов Ершова (см., например, [13, I.5]) следует существование нетривиальных дистрибутивных полурешеток Роджерса бесконечных вычислимых семейств. В следствии 2.5.7 доказывается результат, относящийся к классической теории нумераций.

Следствие 2.5.7. *Существует вычислимое семейство со слабо дистрибутивной, но не дистрибутивной полурешеткой Роджерса.*

В третьей главе диссертации исследуются вычислимые нумерации семейств Σ-подмножеств допустимых множеств. Глава состоит из четырех параграфов. Все изложенные в ней результаты получены совместно и в нераздельном соавторстве с Калимуллиным и Пузаренко. В рамках главы все основные понятия, относящиеся к теории нумераций, терпят, согласно монографии Ершова [14], изменения посредством замен в них вычислимых и в.п. предикатов на Δ- и Σ-предикаты соответственно, а сами нумерации становятся частичными отображениями.

Как следует из результатов работы Морозова и Пузаренко [20], семейства Σ-подмножеств $\mathbb{N}$ в допустимых множествах исчерпываются семействами представителей идеалов степеней по перечислимости. В первом параграфе третьей главы исследуются вычислимые нумерации семейства Σ-подмножеств $\mathbb{N}$, представимых главными идеалами. Такие нумерации называются *вычислимыми A-нумерациями*, где степень по перечислимости множества A является порождающей для главного идеала. В параграфе найдены достаточные условия для семейств и множеств A, при выполнении которых семейства обладают позитивными и однозначными вычислимыми A-нумерациями. Основным результатом параграфа является

Теорема 3.1.1. *Пусть A — произвольное множество и $\mathcal{S}$ — вычислимое A-семейство, содержащее наибольший по включению элемент. Тогда существует позитивная вычислимая A–нумерация семейства $\mathcal{S}$ такая, что каждое $C \in \mathcal{S}$, отличное от наибольшего по включению элемента $\mathcal{S}$, имеет единственный номер.*

Для вычислимых в классическом смысле семейств теорема следует из результатов работы Бадаева [1]. В последующих параграфах третьей главы будут преимущественно изучаться семейства, обладающие наибольшими по включению элементами, поэтому теорема 3.1.1 сразу закрывает вопросы о существовании их позитивных нумераций.

В последующих параграфах третьей главы с общих позиций исследуются вычислимые Π^1_1- и Σ^1_1-нумерации семейств подмножеств $\mathbb{N}$ и вычислимые нумерации семейств Σ-подмножеств наследственно конечных надстроек одного класса распространенных в теории вычислимости моделей $\mathfrak{N}_B$, $B \subseteq \mathbb{N}$. Модель $\mathfrak{N}_B$ строится по множеству B таким образом, что массовая проблема ее представимости, состоящая из всех атомных диаграмм $\mathfrak{N}_B$, эквивалентна по Медведеву проблеме перечислимости множества B, состоящей из всех функций f, для которых $\rho f = B$.

Во втором параграфе третьей главы семейство всех Σ-подмножеств $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_B)$, где B — $\mathcal{R}$-полное множество, $\mathcal{R} \in \{\Pi^1_1,\Sigma^1_1\}$, представляется, посредством Σ-биекции из B на $HF(\mathfrak{N}_B)$, семейством

$$\triangle_{\mathcal{R}}(B) = \{X \in \mathcal{R} : X \subseteq B\}.$$

Помимо семейств $\triangle_{\mathcal{R}}(B)$ в третьей главе рассматриваются и дуальные к ним семейства

$$\bigtriangledown_{\mathcal{R}}(B) = \{X \in \mathcal{R} : B \subseteq X\}.$$

Их основное свойство заключается в том, что почти однозначным в смысле теоремы 3.1.1 всюду определенным вычислимым $\mathcal{R}$-нумерациям семейства $\bigtriangledown_{\mathcal{R}}(B)$ соответствуют однозначные вычислимые $\mathcal{R}_1$-нумерации семейства $\triangle_{\mathcal{R}_1}(\overline{B})$, где $\mathcal{R}_1 \in \{\Pi^1_1,\Sigma^1_1\} \setminus \{\mathcal{R}\}$. Таким образом возникают операторы $\triangle_{\mathcal{R}}$, $\bigtriangledown_{\mathcal{R}}$ и, как показывается в оставшейся части главы, негиперарифметичность и тем более $\mathcal{R}$-полнота множества $B \in \mathcal{R}$ оказывает прямое влияния на наличие позитивных и однозначных вычислимых $\mathcal{R}$-нумераций семейств $\triangle_{\mathcal{R}}(B)$ и $\bigtriangledown_{\mathcal{R}}(B)$. Наиболее технически сложным результатом второго параграфа является

Теорема 3.2.6. *Пусть $A \in \Pi^1_1 \setminus \Delta^1_1$. Тогда семейство $\bigtriangledown_{\Pi^1_1}(B)$ обладает всюду определенной вычислимой позитивной Π^1_1-нумерацией μ, в которой каждое множество $C \in \bigtriangledown(B) \setminus \{\mathbb{N}\}$ имеет единственный номер.*

Данная теорема имеет ключевое значение для получения результатов четвертого параграфа. Во втором параграфе также исследуется вопрос о существовании всюду определенных позитивных вычислимых Π^1_1-нумераций семейств $\triangle_{\Pi^1_1}(B)$ и $\bigtriangledown_{\Pi^1_1}(B)$. Так в следствиях 3.2.8 и 3.2.9 соответственно установлено, что такими нумерациями не обладают семейства $\bigtriangledown_{\Pi^1_1}(B)$ для кобесконечных множеств $B \in \Delta^1_1$ и семейства $\triangle_{\Pi^1_1}(B)$ для бесконечных $B \in \Pi^1_1$, а значит и семейство всех Π^1_1-множеств.

В третьем параграфе третьей главы устанавливается, что любая разрешимая вычислимая Σ^1_1- (так же как и Π^1_1-) нумерация эквивалентна однозначной. Кроме того, в данном параграфе доказывается, что семейства $\triangle_{\Sigma^1_1}(B)$ при бесконечном $B \in \Delta^1_1$ и $\triangledown_{\Sigma^1_1}(B)$ при кобесконечном $B \in \Sigma^1_1$ не обладают однозначными вычислимыми Σ^1_1-нумерациями. Следовательно, такими нумерациями не обладает и семейство всех Σ^1_1-множеств.

Основным результатом четвертого параграфа является теорема 3.4.4, взаимосвязывающая между собой аналитическую сложность множества B с однозначными и позитивными вычислимыми $\mathcal{R}$-нумерациями семейств $\triangle_{\mathcal{R}}(B)$ и $\triangledown_{\mathcal{R}}(B)$.

Теорема 3.4.4. *Для бесконечного, кобесконечного множества $B \in \Pi^1_1$ следующие условия эквивалентны:*

1. $\triangledown_{\Pi^1_1}(B)$ *обладает всюду определенной вычислимой Π^1_1-нумерацией, в которой каждое множество, отличное от $\mathbb{N}$, имеет ровно один номер;*
2. $\triangledown_{\Pi^1_1}(B)$ *обладает всюду определенной позитивной вычислимой Π^1_1-нумерацией;*
3. $\triangle_{\Pi^1_1}(B)$ *обладает однозначной вычислимой Π^1_1-нумерацией;*
4. $\triangle_{\Sigma^1_1}(\overline{B})$ *обладает однозначной вычислимой Σ^1_1-нумерацией;*
5. $B \notin \Delta^1_1$.

Кроме того, в четвертом параграфе затрагиваются негативные Π^1_1-нумерации. Так в предложении 3.4.5 доказывается, что, как и в классическом случае, для каждой негативной Π^1_1-нумерации существует сводимая к ней однозначная. Одним из следствии данного предложения (следствие 3.4.8) является отсутствие всюду определенных позитивных вычислимых Σ^1_1-нумераций семейства всех Σ^1_1-множеств. Отметим, что нумерации семейств из аналитической иерархии могут быть исследованы и с позиции классической сводимости нумераций (см., например, [9–11]).

Четвертая глава диссертации посвящена построению спектральной иерархии наследственно счетных семейств. В ней также исследуются возникающие при ее построении операции обращения скачка алгебраических систем. Результаты первых трех параграфов главы получены совместно и в нераздельном соавторстве с Калимуллиным, а пятого параграфа — с Калимуллиным, Кэчем, Монталбаном и Пузаренко.

В первом параграфе четвертой главы вводится понятия наследственно счетного семейства ранга α (α-семейства), где α — произвольный ординал. Также в параграфе определены вычислимые α-семейства и спектры их степеней. Основным результатом параграфа является

Теорема 4.1.1. *Для каждого α-семейства $\mathcal{F}$ существует алгебраическая система $\mathfrak{S}(\mathcal{F})$ такая, что спектры степеней $\mathbf{Sp}\,\mathcal{F}$ α-семейства $\mathcal{F}$ и $\mathbf{Sp}\,\mathfrak{S}(\mathcal{F})$ системы $\mathfrak{S}(\mathcal{F})$ совпадают.*

Во втором параграфе четвертой главы доказывается, что спектры степеней наследственно счетных семейств конечного ранга образуют иерархию — для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $(n+1)$-семейство со спектром степеней, отличным от спектров всех n-семейств. Отправной точкой для построения иерархия является

Теорема 4.2.2 *Существует семейство $\mathcal{G}$ такое, что*

$$\mathbf{Sp}\,\mathcal{G} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}' > \mathbf{0}'\}.$$

Отметим, что алгебраические системы со спектрами, состоящими из всех степеней, не являющихся низкими, были известны и ранее (см., например, [43]), однако теорема 4.2.2 дает первый пример семейства с таким спектром степеней. Сама теорема об иерархии, помимо теоремы 4.2.2, использует в своем доказательстве операции обращения скачка на n-семействах и новые леммы об индексных множествах (леммы 4.2.7 и 4.2.8). Она формулируется следующим образом.

Теорема 4.2.6.[3,4] *Пусть $n > 0$. Тогда класс $\overline{\mathbf{Low}}_{2n-2}$ является спектром степеней некоторого финитарного n-семейства, но отличен от спектров степеней всех $(n-1)$-семейств. В свою очередь класс $\overline{\mathbf{Low}}_{2n-1}$ есть спектр степеней некоторого n-семейства, но отличен от спектров всех финитарных n-семейств.*

В третьем параграфе четвертой главы исследуются наследственно счетные семейства бесконечного конструктивного ранга. Основным результатом параграфа является

Теорема 4.3.5. *Для любого вычислимого ординала α класс $\overline{\mathbf{Low}}_{\alpha}$ является спектром степеней некоторого $(\alpha+1)$-семейства, а следовательно и алгебраической системы.*

Алгебраические системы со спектрами степеней $\overline{\mathbf{Low}}_{\alpha+1}$ для вычислимых ординалов α впервые были найдены в работе [43]. Систем же со спектрами $\overline{\mathbf{Low}}_{\alpha}$ для предельных вычислимых ординалов α ранее известно не было. Кроме того, в третьем параграфе доказывается, что в спектральной иерархии наследственно счетных семейств вычислимого ранга нет максимального уровня. При этом вопрос, можно ли для каждого вычислимого ординала β найти

---

[3] $\overline{\mathbf{Low}}_k = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^{(k)} > \mathbf{0}^{(k)}\}$.

[4] Любое конечное 0-семейство является финитарным; $(n+1)$-семейство является финитарным, если каждый его элемент финитарен.

β-семейство, спектр степеней которого отличен от спектров всех α-семейств, $\alpha < \beta$, остается открытым.

Четвертый параграф главы довольно короткий. В нем приводятся некоторые недостающие сведения из теории допустимых множеств, вводятся отношение Σ-определимости и операция скачка на классе алгебраических систем.

В пятом параграфе продолжается исследование обращений скачка алгебраических систем, начатое для наследственно счетных семейств во втором и третьем параграфах. В теореме 4.5.7 и следствии 4.5.8 доказывается существование операции $\mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{A}^{-(\alpha+1)}$, ставящей каждой счетной алгебраической системе $\mathfrak{A}$ наименьшее обращение обращение ее скачка $\mathfrak{A}^{-(\alpha+1)}$ порядка $\alpha+1$, где α — произвольный вычислимый ординал. А именно, систему $\mathfrak{A}^{-(\alpha+1)}$, удовлетворяющую условиям:

1. $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma (\mathfrak{A}^{-(\alpha+1)})^{(\alpha+1)}$;
2. $\mathfrak{A} \leqslant_\Sigma \mathfrak{M}^{(\alpha+1)} \Rightarrow \mathfrak{A}^{-(\alpha+1)} \leqslant_\Sigma \mathfrak{M}$ для любой счетной алгебраической системы $\mathfrak{M}$;
3. если $\emptyset^{(\alpha+1)}$ является Δ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$, то $(\mathfrak{A}^{-(\alpha+1)})^{(\alpha+1)} \leqslant_\Sigma \mathfrak{A}$.

Отметим, что из результатов работы И. Н. Соскова [53] следует, что для предельных ординалов β операции $\mathfrak{A}^{-\beta}$, удовлетворяющей свойствам 1–3, не существует.

В шестом параграфе четвертой главы исследуется 2-семейство Ω, состоящее из всех вычислимых семейств. Данный объект как верхняя полурешетка относительно отношения включения был впервые изучен А. Н. Дегтевым [8]. В процитированной работе изучается ряд определимых в Ω классов, среди которых и идеал уменьшаемых семейств Ω_M, определимый соотношением

$$\mathcal{S} \in \Omega_M \Leftrightarrow \forall \mathcal{F} \in \Omega\, [\mathcal{S} \setminus \mathcal{F} \in \Omega].$$

Основным результатом шестого параграфа является теорема 4.6.1, которая положительно решает сформулированный в работе [8]

Вопрос 5. *Совпадает ли идеал Ω_M с идеалом конечных семейств в.п. множеств?*

В качестве следствия приводится определимость последнего в Ω.

В пятой, заключительной главе диссертации исследуются спектры степеней семейств начальных сегментов как $\mathbb{N}$ так и $\mathbb{Q}$. Выразительные возможности семейств такого типа весьма обширны. Так из результатов работ Н. Г. Хисамиева [33; 48] вытекает, что спектры степеней семейств начальных сегментов $\mathbb{N}$ исчерпывают спектры степей абелевых p-групп вида $\bigoplus_{n \in S} \mathbb{Z}_{p^n}$. Следовательно, новые примеры спектров степеней, найденные для таких семейств, являются и спектрами классических алгебр, что в теории вычислимых моделей наблюдается довольно редко. Все результаты главы получены совместно и в нераздельном соавторстве с Калимуллиным.

В первом параграфе пятой главы приводятся основные сведения о предельно монотонных функциях и множествах и показывается, как к ним может быть сведено изучение семейств начальных сегментов $\mathbb{N}$.

Во втором параграфе исследуются теоретико-мерные и категорные свойства спектров степеней на примере спектров семейств начальных сегментов. Основными результатами параграфа являются

Теорема 5.2.8.[5,6] *Существует Δ^0_2-множество S такое, что $\lambda(\mathrm{SpLm}(S)) = 0$.*

Следствие 5.2.10. *Если $S \in \Sigma^0_2$, то* $\mathrm{SpLm}(S)$ *котощее множество.*

Следствием сформулированных результатов является пример абелевой p-группы, демонстрирующей различие между мерой и категорией на спектрах алгебраических систем. Независимо семейства с такими спектрами были найдены Гринбергом, Монталбаном и Сламаном в работе [44].

Третий параграф пятой главы посвящен исследованию семейств начальных сегментов $\mathbb{Q}$. В нем развивается теория предельно монотонных функций и множеств, заданных на $\mathbb{R}$. Основными результатами параграфа являются теоремы 5.3.6 и 5.3.7. В них доказывается существование не предельно монотонного подмножества $\mathbb{Q}$, которое является (с необходимостью неравномерно) предельно монотонным в каждой ненулевой тьюринговой степеней. Приложением сформулированного результата являются примеры таких алгебраических систем $\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{Q}$, заданных семействами верхнеровского типа, что массовая проблема представимости $\mathfrak{W}$ сводится по Мучнику (неравномерно) к проблеме представимости $\mathfrak{Q}$, в то время как медведевская (равномерная) сводимость не имеет места. Существование алгебраических систем с таким свойством было установлено Калимуллиным [18], однако их естественных примеров известно не было. Кроме того, сформулированный результат демонстрирует ключевое различие между классическим понятием предельной монотонности и предельной монотонностью в $\mathbb{R}$,

[5] $\mathrm{SpLm}(S)$ состоит из всех таких множеств X, что семейство $\{\{x \leqslant n\} : n \in S\}$ является X-вычислимым.

[6] λ — равномерная вероятностная мера в канторовском пространстве.

поскольку, согласно работе Калимуллина, Мельникова и Хусаинова [47], каждое не предельно монотонное множество остается таковым и в классе степеней мощности континуума.

Результаты главы 2 опубликованы в работах автора [56; 57; 62–64], главы 3 — в [58; 60; 61], главы 4 — в [59; 65–68], и главы 5 — в [69; 70].

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному консультанту Искандеру Шагитовичу Калимуллину, чье влияние было ключевым как при выборе темы диссертационной работы, так и при ее выполнении; руководителю казанской логической научной школы Марату Мирзаевичу Арсланову, в которой была создана плодотворная творческая атмосфера для научной работы и написания манускрипта; своему соавтору Вадиму Григорьевичу Пузаренко, открывшему автору новые научные направления и помогшему существенно расширить взгляды на исследуемые в работе объекты.

Литература

[1] С.А. Бадаев, О позитивных нумерациях // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 3. С. 483-496.

[2] С. А. Бадаев, С. С. Гончаров, О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 507-522.

[3] С. А. Бадаев, С. Ю. Подзоров, Минимальные накрытия в полурешетках Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 769-778.

[4] С. А. Бадаев, С. С. Гончаров, Обобщенно вычислимые универсальные нумерации // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 5. С. 555-569.

[5] С. А. Бадаев, А. А. Исахов, Некоторые абсолютные свойства A-вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 4. С. 426-447.

[6] С. С. Гончаров, А. Сорби, Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 621-641.

[7] С. С. Гончаров, С. Лемпп, Д. Соломон, Фридберговские нумерации семейств n-вычислимо перечислимых множеств // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 143-154.

[8] А. Н. Дегтев. О полурешетке вычислимых семейств рекурсивно перечислимых множеств // Матем. заметки. 1991. Т. 50, № 4. С. 61-66.

[9] Доржиева М.В. Элиминация метарекурсии из теоремы Оуинса // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2014. Т. 14. С. 35-43.

[10] Доржиева М.В. Неразрешимость элементарных теорий полурешеток Роджерса аналитической иерархии // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. № 13. С. 148–153.

[11] Доржиева М.В. Однозначная нумерация для семейства всех Σ^1_2-множеств // Вестник НГУ, Серия: Математика, механика, информатика. 2018. Т. 18, № 2. С. 47-52.

[12] Ю. Л. Ершов, Нумерации семейств общерекурсивных функций // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1015-1025.

[13] Ю. Л. Ершов, Теория нумераций. М., Наука, 1977.

[14] Ю. Л. Ершов, Определимость и Вычислимость. Новосибирск, Научная книга, М., Экономика, 2000.

[15] А. А. Исахов, Идеалы без минимальных элементов в полурешётках Роджерса // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 3. С. 305-314.

[16] И. Ш. Калимуллин, Спектры степеней некоторых алгебраических структур // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 729-744.

[17] И. Ш. Калимуллин, Почти вычислимо перечислимые семейства множеств // Матем. сб. 2008. Т. 199, № 10. С. 33-40.

[18] И. Ш. Калимуллин, Равномерность сводимостей проблем представимости алгебраических систем // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. P. 334-343.

[19] А. И. Мальцев, Конструктивные алгебры. I // УМН. 1961. Т.16, № 3. С. 3-60.

[20] А. С. Морозов, В. Г. Пузаренко, О Σ-подмножествах натуральных чисел // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 291-320.

[21] С. Ю. Подзоров, Начальные сегменты в полурешетках Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 2003. Т.42, № 2. С. 211-226.

[22] С. Ю. Подзоров, О предельности наибольшего элемента полурешётки Роджерса // Матем. тр. 2004. Т. 7, № 2. С. 98-108.

[23] В. Г. Пузаренко, О разрешимых вычислимых $\mathbb{A}$-нумерациях // Алгебра и логика. 2022. Т. 41, № 5. С. 568-584.

[24] В. Г. Пузаренко, Об одной сводимости на допустимых множествах // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 415-429

[25] В. Г. Пузаренко, Об одной полурешетке нумераций // Матем. тр. 2009. Т. 12, № 2. С. 170-209.

[26] В. Г. Пузаренко, Об одной полурешётке нумераций. II // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 4. С. 498-519.

[27] В. Г. Пузаренко, Натуральные числа и обобщенная вычислимость, диссертация … доктора физико-математических наук: 01.01.06. Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Новосибирск. 2013. 333 с.

[28] В. Л. Селиванов, Две теоремы о вычислимых нумерациях // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 4. С. 470-484.

[29] В. А. Успенский, Системы перечислимых множеств и их нумерации // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103. С. 773-776.

[30] В. А. Успенский, К теореме о равномерной непрерывности // УМН. 1957. Т. 12, № 1. С. 99-142.

[31] В. А. Успенский, Несколько замечаний о перечислимых множествах // ZML. 1957. Т. 3, №. 12. С. 157-170.

[32] В. А. Успенский, Лекции о вычислимых функциях. Физматгиз, М., 1960.

[33] Н. Г. Хисамиев, Критерий конструктивизируемости прямой суммы циклических p-групп // Изв. АН Каз ССР. Сер. физ.-мат. 1981. № 1. С. 51-55.

[34] А. Б. Хуторецкий, О мощности верхней полурешетки вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, №. 5, С. 561-569.

[35] Колмогоров в воспоминаниях учеников: Сб. ст. / Ред.-сост. А. Н. Ширяев. М.: МЦНМО, 2006. 472 с.

[36] U. Andrews, M. Cai, I. Sh. Kalimullin, St. Lempp, J. S. Miller, A. Montalban, The complements of lower cones of degrees and the degree spectra of structures // J. Symb. Log. 2016. V. 81, № 3. P. 997-1006.

[37] C. Ash, J. Knight, Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy, volume 144. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[38] S. A. Badaev, S. S. Goncharov, A. Sorbi, Isomorphism types and theories of Rogers semilattices of arithmetical nuberings, in: Computability and models, S. B. Cooper, S. S. Goncharov (eds.), New York, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003, 79-91.

[39] B. F. Csima, I. S. Kalimullin, Degree spectra and immunity properties // Math. Log. Quart. 2010. V. 56. P. 67-77.

[40] J. C. Dekker, J. Myhill, Some theorems on classes of recursively enumerable sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 89. P. 25-59.

[41] D. Diamondstone, N. Greenberg, D. Turetsky, Natural large degree spectra // Computability. 2013. V. 2, № 1. P. 1-8.

[42] R. G. Downey, D. R. Hirschfeldt, Algorithmic randomness and complexity (Theory and Applications of Computability), Springer, 2010.

[43] S. Goncharov, V. Harizanov, J. Knight, C. McCoy, R. Miller, R. Solomon, Enumerations in computable structure theory // Ann. Pure Appl. Logic. 2005. V. 136. P. 219-246.

[44] N. Greenberg, A. Montalbán, T. A. Slaman, Relative to any non-hyperarithmetic set // J. Math. Log. 2013. V. 13, № 1. P. 1250007-1 – 1250007-26.

[45] C. G. Jockusch, Jr., Relationships between reducibilities // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 142. P. 229-237.

[46] C. G. Jockusch, Jr., R. Soare, Π^0_1-classes and degrees of theories // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 173. P. 33-56.

[47] I. Sh. Kalimullin, B. Khoussainov, A. Melnikov. Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. V. 141, № 9. P. 3275-3289.

[48] N. G. Khisamiev, Constructive abelian groups. In Handbook of recursive mathematics, Vol. 2, volume 139 of Stud. Logic Found. Math., pages 1177-1231. North-Holland, Amsterdam, 1998.

[49] J.C. Owings, The meta r.e. sets but not the Π^1_1 sets can be enumerated without repetition // J. Symb. Log. 1970. V. 35, № 2. P. 223-229.

[50] H. G. Rice, On Completely Recursively Enumerable Classes and Their Key Arrays // J. Symb. Log. 1956. V. 21, № 3. P. 304-308.

[51] H. Rogers, Gödel Numberings of Partial Recursive Functions // J. Symb. Log. 1958. V. 23, № 3. P. 331-341.

[52] I. N. Soskov, Effective properties of Marker's extensions // J. Log. Comput. 2013. V. 23, № 6. P. 1335-1367.

[53] I. N. Soskov, A note on ω-jump inversion of degree spectra of structures. In Proceeding of CiE 2013, volume 7921 of Lecture Notes in Comp. Sci., pages 365–370. Springer-Verlag, 2013.

[54] F. Stephan, On the structures inside truth-table degrees // J. Symb. Log. 2001. V. 66., № 2. P. 731-770.

[55] St. Wehner, Enumerations, countable structures and Turing degrees // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126, № 6. P. 2131-2139.

Работы автора по теме диссертации

[56] М. Х. Файзрахманов, О теореме Хуторецкого для обобщенно вычислимых семейств // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 4. С. 528-541.

[57] М. Х. Файзрахманов, Решеточные свойства полурешеток Роджерса вычислимых и обобщенно вычислимых семейств // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1927-1936.

[58] И. Ш. Калимуллин, В. Г. Пузаренко, М. Х. Файзрахманов, Частичные разрешимые представления в гиперарифметике // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 3. С. 599-609.

[59] M. Faizrahmanov, A. Kach, I. Kalimullin, A. Montalban, V. Puzarenko, Jump inversions of algebraic structures and Σ-definability // Math. Log. Quart. 2019. V. 65, № 1. P. 37-45.

[60] И. Ш. Калимуллин, В. Г. Пузаренко, М. Х. Файзрахманов, Позитивные представления семейств относительно e-оракулов // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 823-833.

[61] И. Ш. Калимуллин, В. Г. Пузаренко, М. Х. Файзрахманов, Позитивные представления семейств относительно сводимости по перечислимости // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 4. С. 492-498.

[62] М. Х. Файзрахманов, Минимальные обобщенно вычислимые нумерации и высокие степени // Сиб. мат. журн. 2017. № 3. С. 710-716.

[63] М. Х. Файзрахманов, О полурешетках Роджерса обобщенно вычислимых нумераций // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 6. С. 1418-1427.

[64] М. Х. Файзрахманов, Универсальные обобщенно вычислимые нумерации и гипериммунность // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 4. С. 506-521.

[65] M. Faizrahmanov, I. Kalimullin, A. Montálban, V. Puzarenko, The Least Σ-jump Inversion Theorem for n-families // J. Univers. Comput. Sci. 2017. V. 23, № 6. P. 529-538.

[66] M. Faizrahmanov, I. Kalimullin, The enumeration spectrum hierarchy of n-families // Math. Log. Quart. 2016. V. 62, № 4. P. 420-426.

[67] M. Faizrahmanov, I. Kalimullin, The Enumeration Spectrum Hierarchy and Low_α Degrees // J. Univers. Comput. Sci. 2016. V. 22, № 7. P. 943-955.

[68] И. Ш. Калимуллин, М. Х. Файзрахманов, Иерархия классов семейств и n-низкие степени // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 4. С. 536-541.

[69] M. Faizrahmanov, I. Kalimullin, Limitwise monotonic sets of reals // Math. Log. Quart. 2015. V. 61, № 3. P. 224-229.

[70] И. Ш. Калимуллин, М. Х. Файзрахманов, Спектры предельной монотонности Σ^0_2-множеств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ-матем. науки. 2012. Т. 154, кн. 2. С. 107-116.