Терсенов Арис Саввич

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С P-ЛАПЛАСИАНОМ И ИХ АНИЗОТРОПНЫХ АНАЛОГОВ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

НОВОСИБИРСК

2020

Работа выполнена в Лаборатории дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Официальные оппоненты:

Камынин Виталий Леонидович
доктор физико-математических наук, профессор
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», кафедра высшей математики, профессор

Мейрманов Анварбек Мукатович
доктор физико-математических наук, профессор
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский технический университет связи и информатики», кафедра теории вероятностей и прикладной математики, профессор

Радкевич Евгений Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», кафедра дифференциальных уравнений, профессор

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится **26 мая 2020 года** в **15 часов** на заседании диссертационного совета Д 003.015.04 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН) по адресу: 630090, Новосибирск, пр-т ак. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИМ СО РАН http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан «25» марта 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 003.015.04,
кандидат физико-математических наук М. А. Скворцова

Общая характеристика работы

Актуальность выбранной темы исследования. Диссертация посвящена исследованию разрешимости начально-краевых задач для вырождающихся и сингулярных параболических уравнений второго порядка и их стационарных аналогов, которые в общем виде можно записать следующим образом

$$u_t - div\,\mathcal{A}(t, x, \nabla u) + \mathcal{B}(t, x, u, \nabla u) = 0, \tag{1}$$

где компоненты вектор-функции $\mathcal{A} \equiv (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$ представимы в одном из следующих видов

$$\mathcal{A}_i(t, x, q) = a_i(t, x)|q|^{p(t,x)-2} q_i, \tag{2}$$

$$\mathcal{A}_i(t, x, q) = a_i(t, x)|q_i|^{p_i(t,x)-2} q_i, \tag{3}$$

$$q = (q_1, \ldots, q_n).$$

Интерес к исследованию этих уравнений обусловлен большим количеством приложений в различных областях механики. Они возникают при моделировании течений неньютоновских жидкостей, как дилатантных, так и псевдопластичных, в моделях нелинейной упругости, в обработке сигналов и изображений, теории капиллярных поверхностей и гляциологии, при описании течений жидкости в пористых средах. В частности, классические модели, связанные с изучением течения жидкости в пористых средах, строятся на законе Дарси. В то же время возможны отклонения от закона Дарси, связанные с неньютоновскими свойствами жидкости. Эти отклонения могут иметь различный характер в зависимости от этих свойств. Для ряда веществ, например, для растворов полимеров, проницаемость, входящая в уравнение Дарси, зависит от градиента давления полиномиально, что приводит к степенному закону фильтрации и как следствие к уравнениям вида вида (1), (2) либо (1), (3).

Заметим, что если в (2) положить $a_i \equiv 1$, $p(t, x) \equiv const$, то $div\,\mathcal{A}(t, x, \nabla u)$ дает нам классический оператор p-лапласиана. Уравнения вида (1) с оператором $\mathcal{A}$ вида (3) в литературе часто называются анизотропными параболическими (а соответствующие стационарные – эллиптическими) уравнениями. Такое название эти уравнения получили потому, что в отличие от оператора в (2), каждая компонента градиента имеет свой показатель. Эта модификация оператора p-лапласиана дает возможность моделировать процессы в анизотропных средах.

Исследованию разрешимости краевых задач для уравнений вида (1), (2) и их эллиптических аналогов посвящено большое количество публикаций. В случае постоянного показателя p история вопроса насчитывает более 50 лет. Среди первых важных результатов о существовании и регулярности решений можно отметить работы О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой, J. Serrin, K.

Ulenbeck, J. L. Lewis, L. C. Evans. Форму относительно законченной теории, по крайней мере что касается регулярности, результаты по p-лапласиану получили после работ E. DiBenedetto с соавторами. В рамках уравнений вида (1), (2) с постоянным показателем p можно выделить направление, связанное с существованием и качественным поведением радиально-симметричных решений. Отметим здесь работы M. Franca, B. Franchi, E. Lanconelli, J. Serrin, в которых изложены основы теории существования и единственности радиально-симметричных решений для уравнения с p-лапласианом, а также исследованы вопросы существования и качественного поведения ограниченных радиально-симметричных и сингулярных радиально-симметричных решений, убывающих на бесконечности.

Одной из пионерских работ о разрешимости краевых задач для анизотропных параболических уравнений является работа М. И. Вишика (1962), где было доказано существование и единственность решения $u \in \mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{W}^{1,p}(\Omega))$, с производной $u_t \in \mathbb{L}^2((0,T)\times\Omega)$, первой начально-краевой задачи для уравнения

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} = f(t,x),$$

при $p > 2$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, а $f \in \mathbb{L}^{p'}(0,T;\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, $p' = \frac{p}{p-1}$. В совместной работе Ж. Лере и Ж.-Л. Лионса (1965) этот результат был обобщен на класс анизотропных уравнений с различными показателями $p_i > 1$ с помощью метода монотонных операторов Минти-Браудера. Была доказана теорема существования и единственности решения $u \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$, с производными $u_{x_i} \in \mathbb{L}^{p_i}((0,T)\times\Omega)$, первой начально-краевой задачи для уравнения вида

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i})_{x_i} = f(t,x),$$

при $p_i > 1$, где функция $f \in \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{L}^{p_i'}(0,T;V_i^*(\Omega))$, $p_i' = \frac{p_i}{p_i-1}$. Здесь V_i^* – пространства, сопряженные к V_i (где в качестве закона двойственности взято скалярное произведение в $\mathbb{L}^2$), которые определяются как замыкание бесконечно дифференцируемых функций в пространстве

$$\mathbb{W}^{1,p_i}_{x_i}(\Omega) = \{v | v \in \mathbb{L}^{p_i}(\Omega), v_{x_i} \in \mathbb{L}^{p_i}(\Omega)\}.$$

Одной из первых работ в 21-ом веке, посвященных исследованию анизотропных уравнений с постоянными показателями при наличии нелинейного источника, является совместная работа I. Fragala, F. Gazzola, B. Kawohl (2004), в которой изучался вопрос существования положительного слабого, удовлетворяющего уравнению в интегральном смысле, решения однородной задачи

Дирихле для уравнения

$$-\sum_{i=1}^{n}(|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i})_{x_i} = \lambda u^{s-1} \quad \text{в} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

где $\lambda > 0$, $s > 1$, в различных соболевских классах функций. Отметим, в частности, следующий результат, показывающий влияние анизотропности на существование ограниченных решений. В предположении, что

$$s > 1, \quad p_i > 1,\ i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} > 1,$$

введем следующие величины

$$p_{cr} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} - 1}, \quad p^+ = \max\{p_1, \ldots, p_n\}, \quad p_\infty = \max\{p^+, p_{cr}\}.$$

Легко видеть, что можно подобрать такие p_i, при которых $p_+ > p_{cr}$. Было доказано, что любое слабое решение ограничено, если $s < p_\infty$, либо при $s = p_\infty$ и $p_\infty > p^+$.

Уравнения вида (1), (2) и (1), (3) с переменными показателями p и p_i стали объектом тщательного исследования последние два десятилетия. Такие уравнения принято называть уравнениями с нестандартными условиями роста. Отметим, что анизотропные уравнения, даже в случае постоянных показателей анизотропности, также принадлежат к упомянутой выше категории уравнений. Из представлений (2), (3) легко заметить, что функция $\mathcal{A}$ удовлетворяет следующему двойному неравенству

$$c_0|q|^{p^- - 1} - c_1 \leq |\mathcal{A}(t, x, q)| \leq c_2(1 + |q|^{p^+ - 1}), \tag{4}$$

где c_0, c_1, c_2 – некоторые положительные постоянные, $p^- = \min\{p_1, \ldots, p_n\}$. Нестандартность условий роста заключается в возможном строгом неравенстве $p^- < p^+$, т.е. показатели коэрцитивности и скорости роста по градиенту разные, в отличие от уравнения с p-лапласианом с постоянным p. Неравенство $p^- < p^+$, в частности, приводит к тому, что многие методы, например, метод ремасштабирования, использующий однородность главной части по градиенту, не может быть применен. В этом случае, для доказательства разрешимости краевых задач для уравнений вида (1), (2) и (1), (3) используются разнообразные аппроксимационные и топологические методы. Заметим, что уравнение с p-лапласианом с переменным показателем p уже принадлежит к категории уравнений с нестандартными условиями роста. Одной из ведущих школ, занимающихся исследованием уравнений этой категории, является научная школа, основателем и руководителем которой был долгие годы В. В.

Жиков. Коллектив этой школы, в лице Ю. А. Алхутова, О. В. Крашенинниковой, С. Е. Пастуховой, М. Д. Сурначева и др., внес существенный вклад в развитие теории разрешимости и качественного поведения решений указанного типа уравнений. Современное состояние теории уравнений с нестандартными условиями роста изложено в монографии С. Н. Антонцева и С. И. Шмарева (2015), являющихся одними из ведущих специалистов в этой области.

Одним из важных вопросов в теории краевых задач для уравнений вида (1) является существование глобальных по времени слабых решений. Первые результаты об условиях, гарантирующих существование положительного решения, а также об условиях, при которых обязательно наступает его разрушение, в случае $p > 2$ были получены в работе M. Tsutsumi (1972) и обобщены H. Levine и L. Payne (1976) для первой начально-краевой задачи для уравнения вида

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i})_{x_i} = u^{s-1} \quad \text{в} \quad \Omega_T = (0,T) \times \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

В частности, было доказано, что при $p > s$ существует решение u такое, что $u \in \mathbb{L}^\infty(0,T;\mathbb{W}^{1,p}(\Omega))$, $u_t \in \mathbb{L}^2(\Omega_T)$, при любых начальных данных. При $p < s$ для достаточно больших начальных данных всегда наступает разрушение решения указанного вида. В работе J. Zhao (1993) были получены аналогичные результаты для ограниченных решений $u \in \mathbb{L}^\infty(\Omega_T) \cap \mathbb{L}^p(0,T;\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, $u_t \in \mathbb{L}^2(\Omega_T)$, параболического уравнения с p-лапласианом в главной части и младшими членами вида $f = f(t,x,u,\nabla u)$ при $p > 2$, где функция f удовлетворяет условиям

$$f(t,x,u,\nabla u) sgn\, u \le C(1 + |u|^{s-1} + |\nabla u|^\sigma),$$

где C – постоянная, $\sigma < p - 1$. В работе Y. Li и C. Xie (2003) вопрос существования и разрушения решения при $f = \lambda |u|^{s-1} u$ был сведен к исследованию соответствующей задачи на собственные значения для оператора p-лапласиана.

Исследованию вопросов существования и разрушения решения при наличии нелинейного источника в случае переменных показателей $p(t,x) > 1$, ($p_i(t,x) > 1$), посвящены работы С. Н. Антонцева и С. И. Шмарева (2010), в которых исследовалась первая краевая задача для уравнения

$$u_t - div(a(t,x)|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = b(t,x)|u|^{\sigma(x)-2} u \quad \text{в} \quad \Omega_T, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

и его анизотропного аналога. Результаты, полученные в этих работах, обобщают результаты, перечисленные выше, о существовании и разрушении решений. В частности, полагая $a \equiv 1$, $b \equiv 1$, мы получаем разрушение слабого решения $u \in \mathbb{W}(\Omega_T) \cap \mathbb{L}^\infty(\Omega_T)$, где

$$\mathbb{W}(\Omega_T) = \{u(t,x) : u \in \mathbb{L}^2(\Omega_T), |\nabla u| \in \mathbb{L}^{p(t,x)}(\Omega_T)\},$$

при условии $\min \sigma(x) > 2$, $\max p(x) \leq \min \sigma(x)$ для достаточно больших начальных данных. Аналогичный результат имеет место и для анизотропного случая, если $\max p_i(x) \leq \min \sigma(x)$ и существует по крайней мере один индекс j, для которого $\max p_j(x) < \min \sigma(x)$. Вопросам разрушения и асимптотического поведения решений посвящены работы P. Cianci, А. В. Мартыненко, А. Ф. Тедеева, W. Gao, B. Guo, F. Li, B. Liu, S. Lian, H. Yuan.

Отметим также одно из направлений исследования уравнений вида (1), связанное с построением вязких по Лионсу решений, в отличие от решений, удовлетворяющих уравнению в интегральном смысле. Теория вязких решений была построена изначально в работах M. Crandall, P.-L. Lions, H. Ishii, R. Jensen и получила впоследствии широкое распространение при исследовании как равномерно эллиптических, так и вырождающихся уравнений. Основы этой теории изложены в монографии M. G. Crandall, H. Ishii, P. L. Lions (1992). В настоящей диссертации мы использовали теорию вязких решений, оказавшуюся особенно продуктивной в случае присутствия в уравнении произвольных градиентных нелинейностей. Отметим здесь недавние работы о существовании и локальной липшицевой регулярности вязких решений для эллиптических аналогов задачи (1), (3) в изотропном случае. Так в работе F. Demengel (2016) была доказана локальная липшицева регулярность вязких по Лионсу решений для уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i})_{x_i} = f$$

в единичном шаре, где $f(x) \in \mathbb{L}^{\infty}$. В совместной работе I. Birindelli и F. Demengel (2017) была рассмотрена однородная задача Дирихле для уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(x)|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i})_{x_i} + g(x, \nabla u) = f.$$

При условии гельдеровости функций $a_i(x)$, непрерывности функций g и f по своим аргументам, где g удовлетворяет следующему ограничению на рост по градиенту

$$|g(x, q)| \leq c(|q|^{p-1} + 1),$$

была доказана локальная липшицевость вязких решений этой задачи в ограниченной области с гладкой границей. Можно также отметить работу P. Juutinen, P. Lindqvist, J.J. Manfredi (2001) об эквивалентности вязких и слабых, в интегральном смысле, решений квазилинейных уравнений.

На данный момент теория разрешимости краевых задач для уравнений вида (1) – это быстро развивающаяся теория с большим числом открытых проблем, связанных с существованием, регулярностью и качественным поведением решений. Мы хотели бы выделить три направления, по которым нам удалось продвинуть общую теорию разрешимости краевых задач для уравнений указанного вида и из которых вытекают и цели настоящей диссертации.

Нас интересует проблема существования слабых ограниченных решений для начально-краевых и краевых задач для уравнений вида (1) и его эллиптических аналогов. Задачи для параболических уравнений будем ставить в цилиндре $(0,T)\times\Omega$, для эллиптических соответственно в области Ω, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Для удобства описания упомянутых направлений представим функцию $\mathcal{B}(t,x,u,\nabla u)$ в виде

$$\mathcal{B}(t,x,u,\nabla u) = g(t,x,u,\nabla u) + c(t,x,u) + f(t,x).$$

Первое направление связано с наличием в уравнении произвольного нелинейного источника $c(t,x,u)$ одновременно с ненулевой функцией f, которая при описании физических процессов моделирует источники массовых сил. Как известно, в случае нелинейного источника $c(t,x,u)$ может происходить разрушение решения за конечный промежуток времени и для получения глобального решения налагают различные условия малости на входные данные задачи. Так, например, в этом случае для ограниченной функции f как в эллиптическом, так и в параболическом случае, условия на f, полученные в работах G. Tarantello (1992), Y. X. Huang (1994), M. Clapp, M. del Pino, M. Musso (2004), Q. Dai, J. Yang (2004), Q. Dai, L. Peng (2007), X. Fan (2011), имеют характер малости ее нормы в $\mathbb{L}^\infty$. Отметим, что условия малости, полученные в наших работах, дают возможность, в отличие от упомянутых результатов, получать их в явном виде через данные задачи [6], [11], [12], [14].

Второе направление связано с градиентным членом $g(t,x,u,\nabla u)$, который в приложениях отвечает за конвекцию. Одним из классических методов исследования краевых задач для уравнений вида (1), (2) и (1), (3) является применение вариационных методов. Это связано с вариационным характером уравнений вида (1), которые могут быть записаны как уравнения Эйлера-Лагранжа для определенных соответствующим образом функционалов. Отметим однако, что наличие градиентных членов сильно усложняет применение теории вариационного исчисления и, в случае их присутствия в уравнении, чаще используются различные аппроксимационные и топологические методы. На сегодняшний день известно немного результатов о разрешимости краевых задач для уравнений вида (1) с более чем линейным ростом по градиенту. Отметим среди них работы L. Iturriaga, S. Lorca, J. Sanchez (2008), A. Dall'Aglio, D. Giachetti, S. Segura de Leon (2009), D. G. Figueiredo, J. Sanchez, P. Ubilla (2009), Y. Fu, N. Pan (2010), J. Li, J. Yin, Y. Ke (2011), в которых были получены теоремы существования слабых решений, принадлежащих различным соболевским пространствам. В настоящей диссертации, в отличие от упомянутых выше работ, нам удалось доказать теоремы существования для уравнений вида (1), (3) при произвольном росте функции $\mathcal{B}$ по градиенту [9], [13], [16], [17].

Третье направление связано с гладкостью решений краевых задач для уравнений вида (1), (3). Как известно, теория регулярности для уравнений вида (1), (2) в целом построена. Решения уравнений этого класса, хоть и не обладают гладкостью классических решений, тем не менее, при достаточно общих условиях на входные параметры задачи, принадлежат классу непрерывных по Гельдеру функций по переменным (t, x) и классу $\mathbb{C}^{1+\alpha}_{loc}$ по пространственным переменным. В то же время для решений уравнений вида (1), (3), вопрос о $\mathbb{C}^1$-регулярности по пространственным переменным на сегодняшний день является открытым, вследствие чего некоторые из классических методов исследования становятся недоступными. Так, например, при доказательстве несуществования решений часто используется известное тождество Похожаева, даже слабый вариант которого требует, однако, $\mathbb{C}^1$-гладкости решений. В работе V. Bögelein, F. Duzaar. P. Marcellini (2013) были получены результаты о регулярности решения задачи Дирихле для анизотропного параболического уравнения вида

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})_{x_i} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_T,$$

с постоянными p_i, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область. Доказано, что при условии

$$2 \le \min_i p_i \le \max_i p_i < \min_i p_i + \frac{4}{n},$$

любое слабое решение $u \in \mathbb{L}^{p^-}(0, T; \mathbb{W}^{1,p^-}(\Omega)) \cap \mathbb{L}^{p^+}_{loc}(0, T; \mathbb{W}^{1,p^+}_{loc}(\Omega))$ обладает локально ограниченным градиентом ∇u. Более того, в случае когда p_i удовлетворяют несколько более жестким ограничениям вида

$$2 \le \min_i p_i \le \max_i p_i < \min_i p_i + \frac{4}{n+2},$$

удалось доказать теорему существования указанного слабого решения, производная по времени которого $u_t \in \mathbb{L}^{\frac{p^-}{p^+-1}}(0, T; \mathbb{W}^{-1,\frac{p^-}{p^+-1}}(\Omega))$, для неоднородной начально-краевой задачи при достаточно общих предположениях относительно начальной функции. Нами получено слабое решение, обладающее глобально ограниченной производной по пространственным переменным в случае, когда область Ω удовлетворяет условию внешней сферы, начальная функция $u_0(x)$ является непрерывной по Липшицу, в присутствии младших членов (как линейных, так и нелинейных по градиенту), а показатели $p_i = p_i(t)$ удовлетворяют условиям

$$2 \le \max_i p_i(t) \le 2 \min_i p_i(t), \quad t \in [0, T].$$

Более того, в диссертации приведены условия полной непрерывности по Липшицу слабых решений для случая постоянных p_i [15]. Наложив определенные ограничения на геометрию области, нам удалось выделить класс уравнений с переменными показателями p_i, для которых получены слабые решения, непрерывные по Липшицу по пространственным переменным и непрерывные по Гельдеру по t, без ограничений на взаимосвязь между p^- и p^+ [17], [18].

Цели и задачи диссертации. Таким образом, цель данной диссертации состоит в определении наиболее широкого класса уравнений вида (1), (3) и условий, которые гарантируют существование слабых решений краевых задач для указанных уравнений, непрерывных по Липшицу как по пространственным переменным, так и по времени. Что касается эллиптического аналога уравнений вида (1), (2), то тут целью диссертации является определение наиболее широкого класса функций $\mathcal{B}$, для которых можно построить слабое решение задачи Дирихле. Для достижения этих целей планируется решить следующие задачи:

1. Исследовать разрешимость задачи Дирихле в шаре для уравнения с p-лапласианом в классе радиально-симметричных решений при наличии нелинейных источника и конвективного члена, а также массовых сил.
2. Исследовать задачу Дирихле для уравнения с p-лапласианом при наличии нелинейных источника и конвективного члена, а также массовых сил без ограничений радиальной симметрии.
3. Построить решения с ограниченной производной по времени для первой начально-краевой задачи для уравнений вида (1), (3) с постоянными показателями p_i.
4. Доказать теорему существования и единственности слабых, в интегральном смысле, решений первой краевой задачи для уравнений вида (1), (3) с показателями p_i, зависящими от времени.
5. Доказать теорему существования и единственности вязких по Лионсу решений первой краевой задачи для уравнений вида (1), (3) с показателями $p_i(t)$ и функцией $\mathcal{B}$, не удовлетворяющей условию Бернштейна.

Методы исследования. Перейдем теперь к описанию методов, разработанных нами для достижения поставленных целей.

Один из методов, реализуемых в диссертации, основан на регуляризации исходной задачи с целью построения последовательности классических решений регуляризованных задач, аппроксимирующих решение исходной. Регуляризацию исходной задачи осуществляем как при исследовании анизотропных уравнений, так и при построении радиально-симметричных решений для уравнения с p-лапласианом.

Для получения слабого решения для анизотропных параболических уравнений применяется предельный переход, основанный на методе монотонности

Минти-Браудера. Как известно, этот метод позволяет доказывать теоремы существования при минимальном наборе априорных оценок. Для осуществления предельного перехода априорные оценки семейства классических решений получаются так, чтобы они не зависели от параметра регуляризации. Разработанная методика, основанная на аппроксимации решения исходной задачи классическими решениями регуляризованной, позволяет, во-первых, получать решения высокой гладкости, во-вторых, исследовать уравнения с сильными градиентными нелинейностями, давая возможность распространять на решения вырождающихся и сингулярных уравнений результаты для классических решений. Так удалось применить технику, разработанную в соавторстве с Ал. С. Терсеновым, основанную на идее С. Н. Кружкова введения дополнительной пространственной переменной и позволяющую доказывать существование классических решений невырождающихся эллиптических и параболических уравнений с произвольным ростом по градиенту. В частности, такой способ аппроксимации позволяет получать разрешимость без каких-либо дополнительных условий на показатели p_i, связанных с теоремами вложения соболевских пространств. Метод введения дополнительной временной переменной, предложенный в диссертации, позволяет доказывать существование решений с ограниченной производной по времени без соответствующего дифференцирования регуляризованного уравнения.

При наличии в уравнении нелинейного градиента не удается осуществить предельный переход в последовательности классических решений для получения слабого решения, удовлетворяющего уравнению в интегральном смысле, обладающего ограниченными пространственными производными. Главная трудность заключается в доказательстве возможности предельного перехода в нелинейных градиентных членах. Для преодоления этой проблемы мы используем аппарат теории вязких по Лионсу решений. Мы доказываем существование вязкого решения, используя процедуру предельного перехода по вязким решениям, коими, в частности, являются классические решения регуляризованной задачи при определенных дополнительных условиях, налагаемых на структуру уравнения.

Тем не менее, при исследовании разрешимости задачи Дирихле для уравнения с p-лапласианом в классе радиально-симметричных решений, удовлетворяющих уравнению в интегральном смысле, удается получить существование решений с произвольными градиентными нелинейностями с использованием регуляризации главной части уравнения. Происходит это за счет дополнительных априорных оценок на градиент решения, использующих специфику радиально-симметричного случая.

С помощью теории вязких решений удается получить разрешимость задачи Дирихле для уравнений с p-лапласианом в главной части для широкого класса градиентных нелинейностей, без ограничения радиальной симметрии. В диссертации предложены методы построения суб- и суперрешений, удовлетворяющих граничным условиям, позволяющих с помощью теоремы Ishii-Perron доказывать существование и единственность непрерывных вязких решений. Отметим, что в этом случае теоремы существования доказываются без регуляризации уравнения, т.е. без применения аппроксимационной техники, априорных оценок и предельных переходов. Здесь далеко не всегда удается построить решения, гладкие по Липшицу, тем не менее разрешимость, как уже отмечалось выше, удается получить в классе непрерывных решений без ограничений радиальной симметрии. Кроме того, в некоторых случаях удается построить вязкие непрерывные решения с более общим оператором в главной части.

Основные результаты диссертации. Перечислим основные результаты, полученные в диссертации.

1. Рассмотрена задача Дирихле для уравнения с p-лапласианом с нелинейными младшими членами. Построено радиально-симметричное решение, удовлетворяющее уравнению в интегральном смысле и принадлежащее классу $\mathbb{C}^{1+\frac{1}{p-1}}$ при $p > 2$, имеющее липшицеву производную при $1 < p \leq 2$. Указанный результат получен для функции $\mathcal{B}$, имеющей произвольный рост по градиенту.
2. Рассмотрена задача, описанная в пункте 1, без ограничения радиальной симметрии. Построено непрерывное вязкое по Лионсу решение для уравнения с p-лапласианом для функции $\mathcal{B}$, имеющей произвольный рост по градиенту.
3. Рассмотрена первая краевая задача для анизотропного параболического уравнения вида (1), (3) с постоянными показателями p_i без младших членов. Доказано существование и единственность решения с ограниченной производной по времени, удовлетворяющего уравнению в интегральном смысле. Для выпуклых областей имеет место аналогичный результат в классе липшицевых по всем переменным функций.
4. Для первой краевой задачи в выпуклых областях для анизотропного параболического уравнения вида (1), (3) с младшими членами, нелинейными по u и линейными по градиенту, доказано существование и единственность решения непрерывного по Гельдеру по времени и непрерывного по Липшицу по пространственным переменным, удовлетворяющего уравнению в интегральном смысле. Рассмотрен случай, когда показатели p_i зависят от времени.
5. Рассмотрена первая начально-краевая задача для уравнений вида (1), (3) с показателями p_i, зависящими от времени, и функцией $\mathcal{B}$, не удовлетворяющей условию Бернштейна-Нагумо. Доказано существование непрерывного по Гельдеру по времени и непрерывного по Липшицу по пространственным переменным вязкого по Лионсу решения.
6. Для первой краевой задачи для анизотропного параболического уравнения

(1), (3) как для линейной, так и для нелинейной по градиенту функции $\mathcal{B}$, доказано существование как соболевских, так и вязких по Лионсу решений, обладающих гладкостью решений из пунктов 4, 5, в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы, при дополнительных ограничениях на гладкость входных данных и показатели анизотропности.

Научная новизна и значимость работы. Работа носит теоретический характер. Все основные результаты являются новыми.

В диссертации доказано существование радиально-симметричного решения $u \in \mathbb{C}^{1,\frac{1}{p-1}}$, имеющего липшицеву производную при $1 < p < 2$, задачи Дирихле для уравнения с p-лапласианом и младшими членами, не удовлетворяющими условию Бернштейна-Нагумо, т.е. без ограничения на скорость роста градиентного члена [13], [16]. Достаточные условия существования, а также новые оценки на решение и его производные, выписаны в явном виде через данные задачи [11], [13], [14], [16]. Результаты, полученные в ходе исследования, применимы также и к обобщенной задаче Гельфанда-Лиувилля [11], [14]. В частности, результат о разрешимости в случае, когда размерность задачи не превышает показатель p, является новым. Также получены новые, близкие к оптимальным, условия существования радиально-симметричного решения при отсутствии градиентных членов. Приведены условия на поведение функции $f(r)$, моделирующей массовые силы, позволяющие получать ограниченное радиально-симметричное решение без ограничения на малость нормы $f(r)$, при наличии произвольного нелинейного источника [16].

Доказано существование непрерывных вязких по Лионсу решений задачи Дирихле для уравнения p-лапласиана с градиентными членами произвольного роста без ограничений радиальной симметрии [7], [9].

Как известно, липшицевость решений анизотропных параболических уравнений – это максимальная регулярность известная на сегодняшний день. Нам удалось для первой начально-краевой задачи определить широкий класс анизотропных уравнений, для которых такие решения могут быть построены. В случае, когда показатели анизотропности являются постоянными, доказано существование соболевских решений с ограниченной производной по времени в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы [15]. Приведенный в диссертации метод введения дополнительной временной переменной позволяет получать этот результат при минимальных требованиях на гладкость по времени от младших членов уравнения. При дополнительном условии выпуклости области и некоторой симметрии относительно начала координат доказано существование непрерывных по Липшицу решений. В сингулярном же случае удалось показать большую гладкость решений, а именно, что вторые производные по пространственным переменным суммируемы с квадратом [15].

Для первой начально-краевой задачи в выпуклых областях для анизотропного параболического уравнения с переменными по времени показателями анизотропности доказано существование липшицева по пространственным переменным решения при $p_i(t) > 1$, $i = 1, \ldots, n$, являющегося непрерывным по Гельдеру по времени при $p_i(t) \geq 2$, $i = 1, \ldots, n$ [18]. Используя аппарат вязких решений, нам удалось доказать существование решения также и при градиентных членах, не удовлетворяющих условию Бернштейна–Нагумо [17]. Заметим, что в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы, удалось доказать существование решений указанной выше гладкости (в зависимости от того, зависят ли показатели анизотропности от времени или нет), в случае дополнительной гладкости входных данных и взаимосвязи между показателями анизотропности $p_i(t) \geq 2$.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Результаты носят теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в исследованиях вырождающихся и сингулярных эллиптических и параболических уравнений, а также прикладных задач механики сплошных сред.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

- Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященная столетию со дня рождения академика И. Н. Векуа, Новосибирск, 28 Мая – 2 Июня, 2007.
- Всероссийский семинар по качественной теории дифференциальных уравнений, посвященный 75-летию со дня рождения Т. И. Зеленяка. Новосибирск. 20 – 22 Сентября, 2010.
- Всероссийская конференция, посвященная памяти член-корр. РАН В. М. Тешукова, «Нелинейные волны: теория и новые приложения», Новосибирск, 2 – 4 марта, 2011.
- Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная 110-ой годовщине со дня рождения И .Г. Петровского (XXIII совместное заседание Московского математического общества и семинара им. И. Г. Петровского), 29 мая — 4 июня, 2011.
- Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», 18 – 24 августа, 2013.
- Всероссийская конференция «Нелинейные волны: теория и новые приложения», посвященная 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В. М. Тешукова. Новосибирск, 29 февраля — 2 марта, 2016.
- Международная конференция «Математика в современном мире», посвященная 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева. Новосибирск, 14 — 19 августа, 2017.

- Международная школа-конференция «Соболевские чтения», посвященная 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Новосибирск, 10 – 16 декабря, 2018.
- Международная конференция «Математика в приложениях», посвященная 90-летию со дня рождения С. К. Годунова. Новосибирск, 4 – 10 августа, 2019.

Результаты работы докладывались на научных семинарах:

- Семинар лаборатории волновых процессов Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (руководители семинара член-корр. РАН В. Г. Романов, д.ф.-м.н. Д. С. Аниконов).
- Семинар лаборатории дифференциальных и разностных уравнений Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (руководитель семинара д.ф.-м.н. Г. В. Демиденко).
- Семинар лаборатории дифференциальных уравнений и смежных вопросов анализа Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (руководитель семинара д.ф.-м.н. В. С. Белоносов).
- Семинар лаборатории дифференциальных уравнений теоретического отдела Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (руководитель семинара д.ф.-м.н. А. П. Чупахин).
- Семинар лаборатории математического моделирования фазовых переходов теоретического отдела Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (руководители семинара член-корр. РАН П. И. Плотников, д.ф.-м.н. В. Н. Старовойтов).
- Семинар лаборатории вычислительных проблем задач математической физики Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (руководитель семинара д.ф.-м.н. А. М. Блохин).
- Общеинститутский математический семинар Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Публикации. Материалы диссертации изложены в 18 статьях в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, базы данных Web of Science и Scopus.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 244 страниц. Библиографический список содержит 222 наименований.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи диссертационной работы, показана ее теоретическая значимость, описаны методы исследования и положения, выносимые на защиту, приведена апробация результатов.

В **первой главе** исследуется задача Дирихле для уравнения с p-лапласианом вида

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \psi(x, u, \nabla u) + c(|x|)g(u) + f(|x|) \quad \text{в} \quad B_R \subset \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$u\Big|_{\partial B_R} = 0, \tag{6}$$

где B_R – шар радиуса R, ∂B_R – граница B_R. Без ограничения общности считаем, что $\psi(x, u, 0) = 0$, $g(0) = 0$. Нас интересует существование радиально-симметричных решений задачи (5), (6). Предполагаем, что функция $\psi(x, u, \nabla u)$ может быть представлена в виде $\psi(r, u, u_r)$ при замене переменных $r = |x|$.

Радиально-симметричное решение (5), (6) удовлетворяет задаче

$$-(|u'|^{p-2}u')' - \frac{n-1}{r}|u'|^{p-2}u' = \psi(r, u, u') + c(r)g(u) + f(r), \tag{7}$$

$$u'(0) = 0, \quad u(R) = 0. \tag{8}$$

Определение 1. *Будем говорить, что функция $u(r)$ является слабым решением задачи (7), (8), если $u'(r)$ непрерывна по Гельдеру на $[0, R]$, удовлетворяет (8) и для любой $\phi \in \mathbb{C}_0^\infty(0, R)$ имеет место интегральное тождество*

$$\int_0^R |u'(r)|^{p-2}u'(r)\phi'(r)\,dr =$$

$$\int_0^R \frac{n-1}{r}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\phi(r)\,dr + \int_0^R (\psi(r, u, u') + c(r)g(u) + f(r))\,\phi(r)\,dr.$$

Пусть $\psi \equiv 0$. Положим

$$\varphi_+^* = ess \sup_{[0,R]\times[0,M]} (c(r)g(u) + f(r)), \quad \varphi_-^* = ess \inf_{[0,R]\times[-M,0]} (c(r)g(u) + f(r)),$$

$$\mathfrak{M} = \left\{ M \in (0, \infty) : \pm\varphi_\pm^* < n\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\frac{M^{p-1}}{R^p} \right\}, \quad M_* = \inf\ \mathfrak{M},$$

$$\varphi_+ = ess \sup_{[0,R]\times[-M_*,M_*]} (c(r)g(u) + f(r)), \quad \varphi_- = ess \inf_{[0,R]\times[-M_*,M_*]} (c(r)g(u) + f(r)),$$

Предположим, что существует положительная постоянная M такая, что

$$\mathfrak{M} \neq \varnothing. \tag{9}$$

Теорема 1. *Предположим, что функции $c(r)$, $f(r) \in \mathbb{L}^\infty(0, R)$, $g(u)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ и выполнено условие (9). Тогда существует слабое решение задачи (7), (8), удовлетворяющее следующим неравенствам*

$$|u| \le M_*, \quad |u'| \le (1 + R)C,$$

где

$$C^{p-1} > \max\left\{\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2(p-1)},\ \frac{p}{p-1}\frac{M_*}{R}\right\}, \quad \textit{при} \quad p \geq 2,$$

$$C^{p-1} > \max\left\{\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2(p-1)(1+R)^{p-2}},\ \frac{p}{p-1}\frac{M_*}{R}\right\}, \quad \textit{при} \quad 1 < p < 2.$$

Пример 1. Рассмотрим следующее уравнение

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |u|^{q-1}u + f(|x|) \quad \text{в} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Из теоремы 1 вытекает, что существует слабое радиально-симметричное решение задачи Дирихле для уравнения (10), если выполнено неравенство

$$f^* < \left(1 - \frac{p-1}{q}\right)\left(\frac{p-1}{q}\right)^{\frac{p-1}{q-p+1}} n^{\frac{q}{q-p+1}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{q(p-1)}{q-p+1}},$$

где $f^* = ||f(r)||_{\mathbb{L}^\infty}$, которое дает достаточно простые для поиска условия разрешимости и связывает в явном виде входные параметры задачи.

Пусть теперь ψ не равна тождественно нулю. Будем считать, что положительные постоянные M и $\widetilde{M}$ связаны между собой соотношением $M = \widetilde{M}R$. Положим

$$\check{\varphi}_+ = ess \sup_{[0,R]\times[0,M]} \left(c(r)g(u) + \psi\left(r, u, -\widetilde{M}\right)\right),$$

$$\check{\varphi}_- = ess \inf_{[0,R]\times[-M,0]} \left(c(r)g(u) + \psi\left(r, u, \widetilde{M}\right)\right),$$

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{M > 0 :\ r(\pm f(r) \pm \check{\varphi}_\pm) < (n-1)\widetilde{M}^{p-1},\ \forall r \in (0, R)\right\}, \quad M_{1*} = \inf\, \mathfrak{M}_1,$$

Предположим, что существует положительная постоянная M такая, что

$$\mathfrak{M}_1 \neq \varnothing. \tag{11}$$

Выберем постоянную $\widetilde{C}$, которая появляется в теореме 2, сформулированной ниже, так, чтобы она удовлетворяла следующим неравенствам

$$\widetilde{C}^{p-1} > \max\left\{\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2(p-1)}, \left(\frac{M_{1*}}{R}\right)^{p-1}\right\}, \quad p \geq 2,$$

$$\widetilde{C}^{p-1} > \max\left\{\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2(p-1)(1+R)^{p-2}}, \left(\frac{M_{1*}}{R}\right)^{p-1}\right\}, \quad 1 < p < 2.$$

Предположим, что $\psi(r, u, u')$ удовлетворяет при $x > y$, $u_1 - u_2 > 0$, $q > 0$ соотношениям

$$\psi(x, u_1, q) - \psi(y, u_2, q) \leq 0, \quad \psi(y, u_1, -q) - \psi(x, u_2, -q) \leq 0. \tag{12}$$

Теорема 2. *Пусть функции* $c(r)$, $f(r)$ *принадлежат* $\mathbb{L}^\infty(0,R)$, $g(u)$ *является непрерывной на* $\mathbb{R}$, $\psi(r,u,u')$ *непрерывна множестве* $[0,R]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. *Предположим также, что выполнены условия* (11), (12). *Тогда существует слабое решение задачи* (7), (8), *удовлетворяющее неравенствам*

$$|u| \le M_{1*}, \quad |u'| \le (1+R)\widetilde{C}.$$

Пример 2. Рассмотрим в шаре $B_R \subset \mathbb{R}^n$ уравнение

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \left(\frac{1}{|x|(|x|+1)}\sum_{i=1}^{n} x_i u_{x_i}\right)^s + c(|x|)|u|^\sigma + f(|x|), \qquad (13)$$

где $s = 2k+1$, $k \ge 0$ – целое число, $\sigma > 0$, f – произвольная ограниченная функция. Из теоремы 2 вытекает существование слабого радиально-симметричного решения задачи Дирихле для уравнения (13) при любом s, когда $p-1>\sigma$, а также для произвольного $p>1$, когда $s>\sigma$. В этом случае можно сказать, что конвективный член не позволяет нелинейному источнику разрушить решение.

Вторая глава посвящена построению непрерывных вязких по Лионсу решений для уравнения с p-лапласианом с младшими членами при постоянном $p \ge 2$. В первом параграфе исследуется задача

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(x,u,\nabla u) + f(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \qquad (14)$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (15)$$

где Ω – ограниченная область, которая удовлетворяет условию (A_i):
(A_i) *область* Ω *является выпуклой и по крайней мере для одного* i *части границы* $\partial\Omega$, *лежащие в полупространствах* $x_i<0$ *и* $x_i>0$, *могут быть представлены в виде*

$$x_i = F_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \quad и \quad x_i = G_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$$

соответственно, где функции F_i *и* G_i *принадлежат классу* $\mathbb{C}^2$ *по всем своим переменным.*

Определение 2. *Функция* $u(x)$ *называется вязким субрешением для* (14), *если* $u(x)$ *полунепрерывна сверху на* Ω *и для любой* $\phi(x)\in\mathbb{C}^2(\Omega)$ *и точки локального максимума* $\hat{x}\in\Omega$ *разности* $u-\phi$, *имеет место следующее неравенство*

$$\Phi(\hat{x}, u(\hat{x}), \nabla\phi(\hat{x}), \nabla^2\phi(\hat{x})) \le 0,$$

где

$$\Phi(x,r,q,X) =$$
$$-|q|^{p-2}Tr(X) - (p-2)|q|^{p-4}Tr((q\otimes q)X) + g(x,r,q) + f(x). \qquad (16)$$

Понятие вязкого суперрешения вводится аналогичным образом с очевидными изменениями. И, наконец, функция $u(x)$ называется вязким решением для (14)*, если $u(x)$ непрерывна на Ω и является одновременно суб- и суперрешением задачи Дирихле для* (14)*.*

В этой главе представлен новый метод построения суб- и суперрешений для задачи Дирихле для (14), который может быть использован для широкого класса вырождающихся и неравномерно эллиптических уравнений. Эти суб- и суперрешения являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений, где роль независимой переменной играет функция, описывающая границу области Ω. Стоит отметить, что суб- и суперрешения строятся в явном виде и могут быть использованы для оценки модуля непрерывности решений.

Теория вязких решений предполагает следующие структурные ограничения на оператор $\Phi(x, r, q, X)$: существует постоянная $\nu > 0$ такая, что

$$\nu(r - s) \leq g(x, r, q) - g(x, s, q) \text{ при } s \leq r, \quad (x, q) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \tag{17}$$

и, кроме того, существует функция $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$, удовлетворяющая $\omega(0+) = 0$, такая, что

$$g(y, r, \beta(x - y)) - g(x, r, \beta(x - y)) + f(y) - f(x) \leq \omega(\beta|x - y|^2 + |x - y|), \tag{18}$$

когда $x, y \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}$, а $\beta > 0$ является параметром, удовлетворяющим следующему соотношению $\lim\limits_{\beta \to \infty} \beta|x - y|^2 = 0$.

Сформулируем теперь наши предположения относительно функции g. Положим $\tilde{x} = (x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Без ограничения общности будем считать, что Ω удовлетворяет условию (A_1) и $g(x, 0, 0) = 0$. Пусть существуют положительные постоянные C_0 и C_1 такие, что при всех $\rho \geq C_0$ имеют место следующие неравенства

$$\pm g(x, 0, \pm\rho, \mp\rho\nabla G_1(\tilde{x})) \leq C_1(p - 1)\rho^{p-1}, \tag{19}$$

$$\pm g(x, 0, \mp\rho, \pm\rho\nabla F_1(\tilde{x})) \leq C_1(p - 1)\rho^{p-1}. \tag{20}$$

Теорема 3. Пусть Ω удовлетворяет условию (A_1), $g \in \mathbb{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $f(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$. Предположим, что выполнены условия (17)–(20), тогда существует единственное непрерывное вязкое решение задачи (14), (15).

Пример 3. Из теоремы 3 вытекает, что задача Дирихле для уравнения

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + u + u|\nabla u|^s + f(x) = 0$$

имеет единственное непрерывное вязкое решение при произвольной непрерывной функции $f(x)$ и любом значении параметра $s > 0$.

Второй параграф посвящен построению непрерывного вязкого решения задачи Дирихле для вырождающегося уравнения вида

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, \nabla u)u_{x_i x_j} + g_1(x, u, \nabla u) = 0 \text{ в } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{21}$$

где $g_1 = g + f$. Здесь для $x \in \Omega$, $q \in \mathbb{R}^n$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, q)\xi_i\xi_j \geq 0,$$

а область Ω представляет из себя n-мерный параллелепипед. Субрешение (соответственно суперрешение), удовлетворяющее граничным условиям исходной задачи, представляет из себя максимум (соответственно минимум) множества решений специальным образом подобранных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Сделаем теперь некоторые предположения о поведении градиентных членов в уравнении (21). Положим $\mathbf{q}_i = (0, \ldots, 0, q_i, 0, \ldots, 0)$. Будем считать, что функция g_1 удовлетворяет следующим условиям

$$|g_1(x, 0, \mathbf{q}_i)| \leq a_{ii}(x, \mathbf{q}_i)\psi_i(|\mathbf{q}_i|), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{22}$$

где ψ_i – положительные непрерывные функции такие, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\psi_i(\rho)} > l_i. \tag{23}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (17), (18), (22), (23). *Тогда существует единственное непрерывное вязкое решение задачи* (21), (15).

Заметим, что в силу определения 2, результаты этого параграфа могут быть распространены на случай уравнений с p-лапласианом в главной части или его анизотропным аналогом.

Основным результатом **третьей главы** является построение глобально липшицевых решений первой начально-краевой задачи для анизотропных параболических уравнений. Причем ключевым моментом является доказательство ограниченности производной по времени у слабого решения для областей, удовлетворяющих условию внешней сферы.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию внешней сферы. Рассмотрим следующую задачу

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p_i - 2} u_{x_i})_{x_i} \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{24}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad (0, T) \times \partial\Omega, \tag{25}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_0(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{26}$$

где $p_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$. Без ограничения общности предполагаем, что $1 < p_i < 2$ при $i = 1, ..., m$ и $p_i \geq 2$ при $i = m + 1, ..., n$, где $0 \leq m \leq n$.

Определение 3. *Будем говорить, что функция $u(t,x)$ является слабым решением задачи (24)–(26), если*

$$u \in \mathbb{L}^{\infty}(\Omega_T), \quad u_{x_i} \in \mathbb{L}^{p_i}(\Omega_T), \quad u_t \in \mathbb{L}^{\infty}(\Omega_T),$$

и удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_T} \left(u_t\, \phi + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}\, \phi_{x_i} \right) d\,x d\,t = 0$$

для произвольной гладкой функции ϕ, которая обращается в ноль на $(0,T)\times \partial\Omega$. Начальное условие выполняется в классическом смысле. Граничные условия принимаются в смысле следов функций из соболевских классов.

Пусть начальная функция $u_0(x)$ такова, что

$$C_0 = \sum_{i=1}^{n} \max_{\Omega} |(|u_{0x_i}|^{p_i-2} u_{0x_i})_{x_i}| < +\infty. \tag{27}$$

Теорема 5. *Пусть выполнено (27). Тогда для произвольного $T > 0$ существует единственное слабое решение задачи (24)–(26). Более того*

$$\|u_t\|_{\mathbb{L}^{\infty}(\Omega_T)} \le C_0.$$

Доказательство теоремы 5 основано на идее введения дополнительной временной переменной, которая подобна идее введения дополнительной пространственной переменной, впервые реализованной в работах С. Н. Кружкова при исследовании квазилинейных параболических уравнений с одной пространственной переменной.

Будем говорить, что Ω удовлетворяет условию (A), если оно удовлетворяет (A_i) для $i = 1, \dots, n$.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие (27), Ω удовлетворяет условию (A) или является параллелепипедом. Тогда для произвольного $T > 0$ существует единственное слабое решение задачи (24)–(26) такое, что $u_{x_i} \in \mathbb{L}^{\infty}(\Omega_T)$. Более того,*

$$\|u_t\|_{\mathbb{L}^{\infty}(\Omega_T)} \le C_0, \quad \|u_{x_i}\|_{\mathbb{L}^{\infty}(\Omega_T)} \le C_i = \max_{\Omega} |u_{0x_i}|, \quad i = 1, ..., n.$$

Начальные и граничные условия понимаются в обычном смысле.

Если область Ω является параллелепипедом, а уравнение является сингулярным, т.е. $p_i \in (1,2)\ \forall i$, тогда можно показать, что решение задачи Дирихле имеет лучшие показатели гладкости нежели в теореме 6.

Определение 4. *Говорим, что непрерывная по Липшицу функция $u(t,x)$ является сильным решением задачи (24)–(26), если $u_{x_i x_j} \in \mathbb{L}^2(\Omega_T)$, $i, j =$*

$1, \ldots, n$, $u(t,x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} (p_i - 1)|u_{x_i}|^{p_i - 2} u_{x_i x_i}$$

почти всюду в Ω_T, *а начальные и граничные условия выполняются в обычном смысле.*

Теорема 7. *Пусть выполнено* (27), $\Omega = \prod_{i=1}^{n}(-l_i, l_i)$ *и для любого* i *выполнено* $1 < p_i < 2$. *Тогда для произвольного* $T > 0$ *существует единственное сильное решение задачи* (24)–(26). *Более того,*

$$\|u_t\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega_T)} \le C_0, \quad \|u_{x_i}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega_T)} \le C_i,$$

$$\|u_{x_i x_j}\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_T)} \le \frac{1}{2(p_j - 1)} K_i^2 C_j^{2-p_j}, \quad K_i = \|u_{0x_i}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad i, j = 1, ..., n.$$

Из теорем 6, 7 непосредственно вытекают аналогичные результаты для задачи Коши при условии, что функция $u_0(x)$ имеет компактный носитель.

Четвертая глава посвящена исследованию первой начально-краевой задачи в Ω_T для анизотропного параболического уравнения вида

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)(|u_{x_i}|^{p_i(t)-2} u_{x_i})_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i(t,x,u) u_{x_i} + c(t,x) g(u) + f(t,x), \quad (28)$$

с условиями (25), (26), где

$$\mu_i(t) \ge \mu_0 > 0, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (29)$$

Предполагаем, что при любом фиксированном i либо $p_i(t) \ge 2$, либо $1 < p_i(t) \le 2$ для всех $t \in [0, T]$. Без ограничения общности считаем, что $g(0) = 0$.

Положим $\mathfrak{V}(\Omega_T) = \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{1,\infty}(\Omega))$, $\mathfrak{G}(\Omega_T) = \mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{W}_0^{1,1}(\Omega))$. Тогда $\mathfrak{G}^*(\Omega_T) = \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}^{-1,\infty}(\Omega))$ пространство двойственное к $\mathfrak{G}(\Omega_T)$.

Определение 5. *Говорим, что функция* $u(t,x)$ *является обобщенным решением задачи* (28), (25), (26), *если* $u \in \mathfrak{V}(\Omega_T)$, $u_t \in \mathfrak{G}^*(\Omega_T)$ *и следующее интегральное тождество*

$$\int_{\Omega_T} \Big(u\phi_t - \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{p_i(t)-2} u_{x_i} \phi_{x_i} + \Big[\sum_{i=1}^{n} c_i u_{x_i} + cg + f \Big] \phi \Big) dx dt = - \int_{\Omega} u_0 \phi_0 \, dx$$

имеет место для произвольной гладкой функции $\phi(t,x)$, *обращающейся в ноль при* $x \in \partial\Omega$ *и* $t = T$ (*здесь* $\phi_0(x) = \phi(0,x)$). *Начальные и краевые условия понимаются в обычном смысле.*

Пусть $l_1, \ldots, l_n$ – положительные постоянные такие, что

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : -l_i < x_i < l_i, \, i = 1, \ldots, n\}.$$

Для простоты изложения результатов положим $f \equiv 0$, $c_i(t,x,u) \equiv c_i(t)$, $c(t,x) \equiv \lambda \geq 0$. Для общего же случая в диссертации сделаны соответствующие пояснения и замечания. Пусть начальная функция удовлетворяет условию

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq K, \quad x, y \in \overline{\Omega}, \tag{30}$$

где $K \geq 0$ – некоторая постоянная. Положим

$$m = \|u_0(x)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}, \quad c_i^0 = \max_{t\in[0,T]} |c_i(t)|.$$

Обозначим через M_i, $\widetilde{M_i}$ и $\gamma_i > c_i^0$ некоторые положительные постоянные, связанные равенством $M_i = \widetilde{M_i}(1-e^{-\gamma_i l_i})$. Определим для каждого $i = 1,\dots,n$ следующие величины

$$p_i^- = \min_{t\in[0,T]} p_i(t), \quad q_i \in \left[\widetilde{M_i}\gamma_i e^{-2\gamma_i l_i}, \widetilde{M_i}\gamma_i\right],$$

$$\varphi_i^+ = \lambda \max_{[0,M_i+m]} g(u), \quad \varphi_i^- = \lambda \min_{[-M_i-m,0]} g(u),$$

$$\mathfrak{M}_i = \left\{(\gamma_i, \widetilde{M_i}) : \pm\varphi_i^\pm < \mu_0\gamma_i(p_i^- - 1)q_i^{p_i(t)-1} - c_i^0 q_i,\ t \in (0,T)\right\},$$

Будем говорить, что функция $g(u)$ имеет не более чем линейный рост на бесконечности, если существуют постоянные $C > 0$ и $R > 0$ такие, что

$$|g(u)| \leq C|u| \quad \text{при} \quad |u| > R. \tag{31}$$

За исключением случая, когда $g(u)$ имеет не более чем линейный рост на бесконечности, будем считать, что постоянная λ, а также функции g и c_i, $i = 1,\dots,n$ таковы, что существует по крайней мере один индекс i_0, для которого

$$\mathfrak{M}_{i_0} \neq \varnothing. \tag{32}$$

Теорема 8. *Пусть Ω удовлетворяет условию (A), $g(u) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$, $c_i(t)$, $\mu_i(t)$, $p_i(t) \in \mathbb{C}^\beta([0,T])$, $i = 1,\dots,n$, при некотором $\beta \in (0,1)$. Пусть выполнены* (29), (30), *а в случае, когда $g(u)$ не удовлетворяет* (31), *считаем, что также выполнено условие* (32). *Тогда для любого $T > 0$, существует единственное обобщенное решение задачи* (28), (25), (26). *Если дополнительно известно, что $p_i(t) \geq 2$, $i = 1,\dots,n$, тогда обобщенное решение $u(t,x)$ будет непрерывным по Гельдеру по переменной t с показателем $\frac{1}{2}$.*

Пример 4. Рассмотрим в Ω_T уравнение

$$u_t - \sum_{i=1}^n \mu_i(t)(|u_{x_i}|^{p_i(t)-2}u_{x_i})_{x_i} = \sum_{i=1}^n c_i(t)u_{x_i} + \lambda g(u), \tag{33}$$

где $g(u)$ удовлетворяет условию (31). Из теоремы 8 вытекает существование непрерывного по Липшицу относительно пространственных переменных обобщенного решения первой начально-краевой задачи для уравнения (33). Если $p_i(t) \geq 2$, тогда это решение является непрерывным по Гельдеру по переменной t.

В **пятой главе** мы продолжаем исследования параболических анизотропных уравнений. Отличительной чертой данной главы является присутствие градиентных нелинейностей в уравнении, не позволяющих построить обобщенные решения желаемой гладкости, удовлетворяющие уравнению в интегральном смысле. В этом случае мы доказываем разрешимость исследуемых задач в классе вязких по Лионсу решений.

Рассмотрим уравнение

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)(|u_{x_i}|^{p_i(t)-2}u_{x_i})_{x_i} = g(t,u,\nabla u) - \lambda u + f(t,x) \quad \text{в} \quad \Omega_T \qquad (34)$$

с условиями (25), (26), где $\lambda > 0$ – некоторая постоянная. Считаем, что $g(t,u,0) = 0$. Показатели анизотропности удовлетворяют неравенствам $p_i(t) \geq 2$, $i = 1,\ldots,n$. Обозначим через $q = (q_1,\ldots,q_n) \in R^n$, $X = \{X_{ij}\} \in S^n$, где S^n – пространство симметричных матриц. Положим

$$\Phi(t,x,r,q,X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)(p_i(t)-1)|q_i|^{p_i(t)-2}X_{ii} + g(t,r,q) - \lambda r + f(t,x).$$

Определение 6. *Говорим, что функция* $u(t,x)$ *является вязким субрешением (суперрешением) задачи* (34), (25), (26), *если*

$$u \leq 0\,\big(\geq 0\big) \quad \textit{на} \quad (0,T)\times\partial\Omega, \quad u(0,x) \leq u_0(x)\,\big(\geq u_0(x)\big) \quad \textit{в} \quad \Omega,$$

и для любой $\phi(t,x) \in \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(\Omega_T)$, *удовлетворяющей при* $(t,x),(t_0,x_0) \in \Omega_T$

$$u(t,x) \leq \phi(t,x)\big(\geq \phi(t,x)\big), \quad u(t_0,x_0) = \phi(t_0,x_0),$$

вытекает

$$\phi_t(t_0,x_0) - \Phi(t_0,x_0,\phi(t_0,x_0),\nabla\phi(t_0,x_0),\nabla^2\phi(t_0,x_0)) \leq 0\,\big(\geq 0\big).$$

Непрерывная функция $u(t,x)$ *является вязким решением задачи* (34), (25), (26), *если она одновременно является суб- и суперрешением.*

Пусть

$$M_1 = \min\left\{\frac{\min f(t,x)}{\lambda}, \min u_0(x), 0\right\}, M_2 = \max\left\{\frac{\max f(t,x)}{\lambda}, \max u_0(x), 0\right\}.$$

$$q = (q_1,\ldots,q_n), \quad a_i(t,q_i) = \mu_i(t)(p_i(t)-1)|q_i|^{p_i(t)-2}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Положим $f^+ = \max\{f(t,x),0\}$, $f^- = \min\{f(t,x),0\}$, $u^+ = \max\{u(t,x),0\}$, $u^- = \min\{u(t,x),0\}$, $Q_i = (0,\ldots,0,-q_i,0,\ldots,0)$.

Предположим, что g может быть представлена в виде суммы $g = g_1 + g_2$. Для того, чтобы сформулировать условия на функции g_1 и g_2, введем неубывающие, неотрицательные функции $\psi_i(\rho) \in \mathbb{C}^1(0,+\infty)$ такие, что существуют постоянные q_{0i}, q_{1i} такие, что $0 \le K \le q_{0i} < q_{1i} < +\infty$ и выполнено

$$\int\limits_{q_{0i}}^{q_{1i}} \frac{\rho d\rho}{\psi_i(\rho)} = M = \max\{M_2, M_2 - M_1, -M_1\}. \tag{35}$$

Рассмотрим сначала случай, когда Ω – параллелепипед. Пусть для каждого i функция g_1 удовлетворяет

$$\pm g_1(t,u^\pm,\pm Q_i) \pm f^\pm \le a_i(t,q_i)\psi_i(|q_i|), \tag{36}$$

при $t \in [0,T]$, $M_1 \le u \le M_2$ и $q_i \ge q_{0i}$.

Более того, при $t \in [0,T]$, $M_1 \le u \le M_2$

$$ug_2(t,u,\pm Q_i) \le 0, \quad q_i \ge q_{0i}, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{37}$$

$$g(t,u_2,q) - g(t,u_1,q) \le 0, \quad u_1 < u_2, \quad q = (q_1,\ldots,q_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{38}$$

Теорема 9. *Пусть Ω – параллелепипед, $f \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}_T)$, $g(t,u,\nabla u) \in \mathbb{C}^1([0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $\mu_i(t), p_i(t) \in \mathbb{C}^\beta([0,T])$, при некотором $\beta \in (0,1)$, $\lambda > 0$. Предположим, что выполнены условия* (29), (30), (35)–(38). *Тогда для любого $T > 0$ существует единственное вязкое решение задачи* (34), (25), (26) *такое, что функция $u(t,x)$ является непрерывной по Гельдеру по переменной t с показателем $\frac{1}{2}$, непрерывной по Липшицу по пространственным переменным и*

$$\|u\|_{\mathbb{C}(\Omega_T)} \le M, \quad ||u_{x_i}||_{\mathbb{L}^\infty(\Omega_T)} \le q_{1i} \quad i = 1,...,n. \tag{39}$$

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$u_t - \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i(t)-2}u_{x_i})_{x_i} = \prod_{i=1}^n |u_{x_i}|^{s_i} - u + f(t,x) \quad \text{в} \quad \Omega_T. \tag{40}$$

Положив $g_1 \equiv 0$, $g_2 = \prod_{i=1}^n |u_{x_i}|^{s_i}$, легко видеть, что теорема 9 гарантирует существование и единственность вязкого решения задачи (40), (25), (26) указанной гладкости для произвольных $s_i > 1$, $i = 1,\ldots,n$.

Пусть теперь Ω удовлетворяет условию (A). Полагаем, что g_1 удовлетворяет

$$\pm g_1(t,u^\pm,\pm Q_k^*) \pm f^\pm \le$$

$$a_k(t,\rho)\psi_k(|\rho|) + \sum_{i=1, i\ne k}^n a_i(t,\rho r_i)\psi_k(|\rho|)r_i^2, \quad k = 1,\ldots,n \tag{41}$$

при $(t,x) \in \overline{\Omega}_T$, $M_1 \le u \le M_2$ и произвольных r_i, где

$$Q_k^* = (\rho r_1, \dots, \rho r_{k-1}, -\rho, \rho r_{k+1}, \dots, \rho r_n), \quad \rho > q_{0k}.$$

Предположим, что g_2, вместо (37), удовлетворяет условию

$$u g_2(t,u,\pm Q_k^*) \le 0, \quad t \in [0,T], \quad M_1 \le u \le M_2, \quad \forall Q_k^*. \tag{42}$$

Теорема 10. *Пусть Ω удовлетворяет условию (A), $f \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}_T)$, $g(t,u,\nabla u) \in \mathbb{C}^1([0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $\mu_i(t), p_i(t) \in \mathbb{C}^\beta([0,T])$, при некотором $0 < \beta < 1$, $i = 1,\dots,n$, $\lambda > 0$. Пусть выполнены условия* (29), (30), (35), (38), (41) *и* (42). *Тогда для произвольного $T > 0$ существует единственное вязкое решение задачи* (34), (25), (26) *такое, что $u(t,x)$ является непрерывной по Гельдеру по переменной t с показателем $\frac{1}{2}$, непрерывной по Липшицу по пространственным переменным и*

$$\|u\|_{\mathbb{C}(\Omega_T)} \le M, \quad ||u_{x_i}||_{L^\infty(\Omega_T)} \le q_{1i} \quad i = 1,...,n. \tag{43}$$

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$u_t - \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i(t)-2} u_{x_i})_{x_i} = -u|\nabla u|^r - u + f(t,x) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{44}$$

где $r > 1$. Положив $g_1 \equiv 0$, $g_2 = -u|\nabla u|^r$, получаем существование вязкого решения указанной гладкости первой начально-краевой задачи для уравнения (44).

В заключении главы 5 мы приводим теорему существования и единственности вязкого решения для уравнения

$$u_t - \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p_i(t)-2} u_{x_i})_{x_i} = g(t,\nabla u) - \lambda u + f(t,x) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{45}$$

с начально-краевыми условиями (25), (26), где Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию внешней сферы.

Теорема 11. *Пусть Ω удовлетворяет условию внешней сферы, $g(t,\nabla u) \in \mathbb{C}^1([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, $p_i(t) \in \mathbb{C}^\beta([0,T])$, при некотором $0 < \beta < 1$, $i = 1,\dots,n$, $f(t,x) \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}_T)$, $\lambda > 0$. Пусть $u_0(x)$ удовлетворяет* (30). *Более того, предположим, что $p_i(t) \ge 2$, $i = 1,\dots,n$ и*

$$\max_i p_i(t) \le 2 \min_i p_i(t), \quad t \in [0,T], \tag{46}$$

а функция g удовлетворяет условию

$$|g(t,\nabla u)| \le \gamma |\nabla u|^{p_-(t)}, \quad p_-(t) = \min_i p_i(t), \quad \gamma \ge 0 - \text{постоянная.} \tag{47}$$

Тогда для любого $T > 0$, существует единственное вязкое решение задачи (45), (25), (26) *такое, что $u(t, x)$ является непрерывной по Гельдеру по t с показателем $\frac{1}{2}$, непрерывной по Липшицу по пространственным переменным.*

Аналогично, с соответствующими изменениями, можно сформулировать теорему существования обобщенных решений.

Заключение

В диссертации исследуются уравнение с p-лапласианом и его параболический анизотропный аналог. Как в первом, так и во втором случае предполагается наличие младших членов в составе нелинейного источника, конвективного члена и массовых сил. Глава 1 данной работы посвящена построению ограниченного радиально-симметричного решения задачи Дирихле для уравнения с p-лапласианом, удовлетворяющего уравнению в интегральном смысле. Были получены условия, гарантирующие существование решения, и связывающие входные данные задачи в явном виде. Глава 2 посвящена исследованию той же задачи, что и глава 1, в выпуклых областях, но без ограничения радиальной симметрии. Были доказаны теоремы существования вязких по Лионсу решений. Как в первой, так и во второй главе конвективный член не имеет ограничений на рост бернштейновского типа. В главе 3 была исследована первая начально-краевая задача для анизотропного параболического уравнения без младших членов, на примере которой был продемонстрирован метод построения обобщенных решений с ограниченной производной по времени. Глава 4 посвящена исследованию первой начально-краевой задачи для анизотропного параболического уравнения с переменными по времени показателями анизотропности, нелинейным источником, линейным конвективным членом и массовыми силами. Доказано существование обобщенного решения, удовлетворяющего уравнению в интегральном смысле. В главе 5 продолжены исследования главы 4 с той разницей, что в ней рассматривается конвективный член без ограничения роста по градиенту на бесконечности, который не позволяет получить обобщенное решение той же гладкости, что и в главе 4. Эта проблема была решена с помощью аппарата вязких решений. Было доказано существование вязкого по Лионсу решения, той же гладкости, что и в главе 4.

Новизна предложенной методики, для решения перечисленных задач, заключается в аппроксимации решения исходной задачи последовательностью классических решений регуляризованных задач, с последующим предельным переходом, основанным на методе монотонности Минти–Браудера. Для использования указанной методики решения был развит метод получения априорных оценок классических решений регуляризованных задач, а также применен метод введения дополнительной временной переменной, позволившей получить решения с ограниченной производной по времени без применения процедуры соответствующего дифференцирования. Также был развит метод построения суб- и суперрешений для широкого класса вырождающихся уравнений в выпуклых областях, позволяющий доказывать существование вязких решений.

Предложенные решения задач имеют ряд преимуществ перед ранее известными решениями аналогичных задач:

Уравнение с p-лапласианом

– Предложенный метод решения позволяет в полной мере применить теорию существования классических решений для эллиптических уравнений с одной переменной с конвективным членом, имеющим произвольный рост на бесконечности.

– Достаточные условия существования выписаны в явном виде через данные задачи. Также в явном виде получены оценки на решение и его производную.

Анизотропные параболические уравнения

– Также как и в случае p-лапласиана, метод исследования позволяет применить теорию существования классических решений для параболических уравнений с многими пространственными переменными с конвективным членом, имеющим произвольный рост на бесконечности.

– В случае постоянных показателей анизотропности, построены решения, являющиеся липшицевыми в выпуклых областях, без каких-либо ограничений на показатели анизотропности.

– В случае переменных показателей анизотропности по времени, построены решения, являющиеся в выпуклых областях липшицевыми по пространственным переменным и гельдеровыми по времени в случае $p_i(t) \geq 2$.

– Для областей, удовлетворяющих условию внешней сферы, удалось доказать существование решения указанной выше гладкости, при достаточно общих предположениях на связь между показателями анизотропности.

– Построение решений, имеющих максимально возможную регулярность, известную на сегодняшний день, происходит без каких-либо ограничений на взаимосвязь между показателями анизотропности для выпуклых областей, и с минимальными, по сравнению с известными, для областей, удовлетворяющих условию внешней сферы.

– Оценки на решение и его производные, как и условия разрешимости, выписаны в явном виде через входные данные задачи.

Список публикаций по теме диссертации

1. Al. S. Tersenov, Ar. S. Tersenov. Global solvability for a class of quasilinear parabolic equations // Indiana Univ. Math. J. (2001), V. 50 (4), pp. 1899–1913.

2. Al. S. Tersenov, Ar. S. Tersenov. On the Cauchy problem for a class of quasilinear parabolic equations // Ann. Mat. Pura Appl. (2003), V. 182 (3), pp. 325–336.

3. Al. S. Tersenov, Ar. S. Tersenov. On the Bernstein-Nagumo's condition in the theory of nonlinear parabolic equations // J. Reine Angew. Math. (2004), V. 572, pp. 197–217.

4. Ar. S. Tersenov. A remark on the existence of viscosity solutions for quasilinear elliptic equations // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. (2006), V. 65, pp. 230–241.

5. Ar. S. Tersenov. On sufficient conditions for nonexistence of interior blow-up phenomena for fully nonlinear parabolic equations // Electron. J. Differ. Equ. (2007), No. 57, pp. 1–12.

6. Al. S. Tersenov, Ar. S. Tersenov. The problem of Dirichlet for anisotropic quasilinear degenerate elliptic equations // J. Differ. Equ. (2007), V. 235 (2), pp. 376–396.

7. Al. S. Tersenov, Ar. S. Tersenov. Viscosity solutions of p-Laplace equation with nonlinear source // Arch. Math. (2007), V. 88, pp. 259–268.

8. Al. S. Tersenov, Ar. S. Tersenov. The problem of Dirichlet for evolution one-dimensional p-laplacian with nonlinear source // J. Math. Anal. Appl. (2008), V. 340, pp. 1109–1119.

9. Ar. S. Tersenov. Viscosity subsolutions and supersolutions for non-uniformly and degenerate elliptic equations // Arch. Mathematicum (2009), V. 45 (1), pp. 19–35.

10. Ар. С. Терсенов. Новые априорные оценки решений анизотропных эллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. (2012), Т. 53 (3), с. 672–686.

11. Ar. S. Tersenov. On existence of radially symmetric solutions for p-Laplace equation // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. (2014), V. 95, pp. 539–551.

12. Ар. С. Терсенов. О существовании неотрицательных решений задачи Дирихле для уравнения p-лапласиана при наличии внешних массовых сил // Сиб. журн. индустр. матем. (2016), Т. 19 (1), с. 82–93.

13. Ар. С. Терсенов. О влиянии градиентных членов на существование решения задачи Дирихле для уравнения р-лапласиана // Сиб. журн. чистой и прикл. матем. (2016), Т 1, с. 130–142.

14. Ар. С. Терсенов. О существовании радиально-симметричных решений задачи Дирихле для неоднородного уравнения p-лапласиана // Сиб. мат. журн. (2016), Т. 57 (5), с. 1171–1183.

15. Al. S. Tersenov, Ar. S. Tersenov. Existence of Lipschitz continuous solutions to the Cauchy–Dirichlet problem for anisotropic parabolic equations // J. Funct. Anal. (2017), V. 272 (10), pp. 3965–3986.

16. Ар. С. Терсенов. Радиально-симметричные решения уравнения p-лапласиана при наличии градиентного члена // Сиб. журн. индустр. матем. (2018), Т. 21 (4), с. 121–136.

17. Al. S. Tersenov, Ar. S. Tersenov. Existence results for anisotropic quasilinear parabolic equations with time-dependent exponents and gradient term // J. Math. Anal. Appl. (2019), V. 480 (1), Art. 123386., pp. 1–18.

18. Ал. С. Терсенов, Ар. С. Терсенов. О квазилинейных параболических уравнениях с переменным показателем анизотропности // Сиб. мат. журн. (2020), Т. 61 (1), с. 201–223.