На правах рукописи

Нестеров Михаил Николаевич

ХОЛЛОВЫ ПОДГРУППЫ И ПРОНОРМАЛЬНОСТЬ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Ревин Данила Олегович.

Официальные оппоненты:
Маслова Наталья Владимировна
доктор физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук»
ведущий научный сотрудник отдела алгебры и топологии.

Тимошенко Евгений Иосифович
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет»
профессор кафедры алгебры и математической логики.

Ведущая организация:
Государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования города Москвы
«Московский городской педагогический университет»

Защита состоится 8 мая 2020 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук»
по адресу: пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте http://math.nsc.ru Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан «___» ______ 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Стукачёв А. И.

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Диссертационная работа относится к классическому направлению теории конечных групп — теоремам силовского типа. В 1872 году норвежский математик Л. Силов [35] доказал следующую теорему.

Теорема (Л. Силов). *Пусть порядок конечной группы G равен $p^\alpha \cdot m$, где число p простое, а m не делится на p. Тогда справедливы следующие утверждения.*

($\mathcal{E}$) *Группа G содержит по крайней мере одну подгруппу порядка p^α (т.н. силовскую p-подгруппу).*

($\mathcal{C}$) *Любые две силовские p-подгруппы сопряжены.*

($\mathcal{D}$) *Всякая p-подгруппа группы G содержится в некоторой силовской p-подгруппе.*

По мнению специалистов теорема Силова является краеугольным камнем теории конечных групп. Получение теорем силовского типа в рамках этой теории сформировалось в большое самостоятельное направление, берущее своё начала в работах Холла и Чунихина [11–14, 24–26].

Ф. Холл предложил рассматривать объект, более общий, чем силовские p-подгруппы. В последствии подгруппы, введённые Ф. Холлом, стали называть π-холловы подгруппы. Напомним определение.

Пусть π — некоторое фиксированное множество простых чисел. Через π' будем обозначать дополнение к π во множестве всех простых чисел. Конечная группа называется π-группой, если всякий простой делитель её порядка принадлежит π. Подгруппа H группы G называется π-холловой, если она является π-подгруппой, а её индекс не делится на числа из π. Ф. Холл [25] доказал полный аналог теоремы Силова для π-подгрупп в разрешимых конечных группах.

Теорема (Ф. Холл). *Пусть конечная группа G разрешима. Тогда для любого множества π простых чисел справедливы следующие утверждения.*

($\mathcal{E}$) *Группа G содержит по крайней мере одну π-холлову подгруппу.*

($\mathcal{C}$) *Любые две π-холловы подгруппы сопряжены.*

($\mathcal{D}$) *Всякая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе.*

Для неразрешимых групп теорема Холла неверна. Например, знакопеременная группа A_5 не содержит $\{3,5\}$-холловых подгрупп. Полная линейная группа $\mathrm{GL}_3(2)$ обладает двумя классами сопряжённых $\{2,3\}$-холловых подгрупп. В группе A_5 все $\{2,3\}$-холловы подгруппы сопряжены и изоморфны группе A_4. При этом группа A_5 содержит подгруппу порядка 6, а в группе A_4 нет подгрупп данного порядка.

В соответствии с утверждениями $(\mathcal{E}), (\mathcal{C})$ и $(\mathcal{D})$, в 1956 году Ф. Холл [26] ввёл следующие обозначения для конечных групп. Говорят, что группа G *обладает свойством* $\mathcal{E}_\pi$, если в G имеется π-холлова подгруппа. Если при этом любые две π-холловы подгруппы сопряжены, то говорят, что группа G *обладает свойством* $\mathcal{C}_\pi$. Если, к тому же, любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то говорят, что группа G *обладает свойством* $\mathcal{D}_\pi$. Группу со свойством $\mathcal{E}_\pi$ ($\mathcal{C}_\pi$, $\mathcal{D}_\pi$) называют также *$\mathcal{E}_\pi$-группой* (соответственно, *$\mathcal{C}_\pi$-, $\mathcal{D}_\pi$-группой*). Обозначим также через $\mathcal{E}_\pi$, $\mathcal{C}_\pi$ и $\mathcal{D}_\pi$ классы всех $\mathcal{E}_\pi$-, $\mathcal{C}_\pi$- и $\mathcal{D}_\pi$-групп соответственно.

Многие важные утверждения о холловых подгруппах и группах со свойствами $\mathcal{E}_\pi, \mathcal{C}_\pi$ и $\mathcal{D}_\pi$ могут быть сформулированны с использованием понятия пронормальности (см. ниже), и именно изучению вопросов пронормальности π-холловых подгрупп преимущественно посвящена диссертационная работа.

Напомним, что подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в группе $\in \langle H, H^g\rangle$. Классическими примерами пронормальных подгрупп являются нормальные подгруппы, максимальные подгруппы, силовские подгруппы конечных групп, холловы и картеровы[1] подгруппы разрешимых конечных групп.

В неразрешимых группах π-холловы подгруппы могут быть непронормальными. Например регулярное сплетение $\mathrm{GL}_3(2)\wr\mathbb{Z}_5$ содержит непронормальную $\{2,3\}$-холлову подгруппу.

Тем более удивительным оказывается следующее утверждение

Теорема (Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин). (mod CFSG) [34, теорема 1] *Холловы подгруппы конечных простых групп пронормальны.*

С использованием этой теоремы доказываются многие другие утверждения. Так, в работе [5] получено утверждение о наследуемости свойства $\mathcal{C}_\pi$ надгруппами π-холловых подгрупп. Эквивалентно, π-холловы подгруппы в $\mathcal{C}_\pi$-группах пронормальны. Из этого утверждения вытекает полученный в 2010 году критерий свойства $\mathcal{C}_\pi$ [3, Следствие 2]. Но и само утверждение о пронормальности π-холловых подгрупп в $\mathcal{C}_\pi$ группах допускает следующее усиление: всякая $\mathcal{E}_\pi$-группа содержит пронормальную π-холлову подгруппу. Более того, справедлива следующая

Теорема (Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин). (mod CFSG) [8, теорема 1] *Пусть A — нормальная подгруппа $\mathcal{E}_\pi$-группы G. Тогда A содержит π-холлову подгруппу, пронормальную в G.*

По-видимому, эта теорема представляет собой наиболее сильное положительное утверждение о холловых подгруппах в произвольных (т.е. необязательно разрешимых) группах, известное на данный момент. Оно, в частности, содержит аргумент Фраттини для холловых подгрупп [33, теорема 1]: *Если A — нормальная подгруппа $\mathcal{E}_\pi$-группы G, то A содержит такую π-холлову подгруппу H, что* $G = AN_G(H)$.

Ключевым фактом, на который опираются перечисленные утверждения, является отмеченая выше теорема о пронормальности холловых подгрупп в простых группах. В диссертации исследуется, в какой мере этот факт может быть обобщён.

Можно ли, например, утверждать, что холловы подгруппы в почти простых группах пронормальны[2]?

[1]Подгруппа называется *картеровой*, если она нильпотентна и самонормализуема. В 2007 году Е.П. Вдовин доказал сопряжённость и, как следствие, пронормальность картеровых подгрупп в любой, а не только разрешимой, конечной группе [1, теорема 9.2].

[2]Напомним, что группа G называется *почти простой*. Если её *цоколь*, т.е. подгруппа порождённая всеми минимальными подгруппами, является неабелевой простой группой.

Другой вопрос, возникающий из сопоставления примера группы с непронормальной π-холловой подгруппой и пронормальности холловых подгрупп в простых группах, сформулирован [5, Гипотеза 11]:

Проблема 1. *Будут ли холловы подгруппы пронормальными в своём нормальном замыкании?*

В последствии этот вопрос был записан в «Коуровскую тетрадь» [28, 18.32]. В диссертации на этот вопрос даётся отрицательный ответ. Более того, показывается, что для данного множества π существование группы, содержащей π-холлову подгруппу, непронормальную в своём нормальном замыкании, равносильно существованию группы, с несопряжёнными π-холловыми подгруппами, т.е. равносильно утверждению $\mathcal{E}_\pi \neq \mathcal{C}_\pi$. Как известно [5, теорема 2], последнее равносильно также существованию группы с непронормальными π-холловыми подгруппами.

Данный результат подчёркивает актуальность вопроса:

Проблема 2. *Для каких множеств π выполнено равенство $\mathcal{E}_\pi = \mathcal{C}_\pi$?*

Этот вопрос отмечен в [7, Проблема 7.20], [10, Проблема 6], [5, замечание после следствия 4]. В диссертации этот вопрос исследуется в частном случае, когда $\pi = p'$ для некоторого простого числа p.

Если свойство пронормальности оказывается естественным и полезным, например, для доказательства наследуемости свойства $\mathcal{C}_\pi$ надгруппами π-холловых подгрупп, то при изучении аналогичного вопроса для свойства $\mathcal{D}_\pi$ возникло понятие сильно пронормальной подгруппы. В соответствии с [5] подгруппа H группы G называется *сильно пронормальной*, если для любых $K \leq H$ и $g \in G$ подгруппа K^g сопряжена с некоторой подгруппой из H в $\in \langle H, K^g\rangle$. Все вышеупомянутые классические примеры пронормальных подгрупп (кроме картеровых[3]) будут также примерами сильно пронормальных подгрупп. Гипотеза о наследуемости свойства $\mathcal{D}_\pi$ надгруппами π-холловых подгрупп, впоследствии доказанная в [31], эквивалентна сильной пронормальности π-холловых подгрупп в $\mathcal{D}_\pi$-группах. Один из подходов, предложенных в [5], состоял в изучении следующего усиления пронормальности холловых подгрупп в простых группах [5, Гипотеза 7], [7, Проблема 7.1], [28, 11.45(б)]:

Проблема 3. *Верно ли что холловы подгруппы в простых группах сильно пронормальны?*

В диссертации дан отрицательный ответ на этот вопрос.

Цели диссертации. Целями настоящей работы являются:

1. Изучение вопроса пронормальности холловых подгрупп в почти простых группах, в своём нормальном замыкании.

2. Изучение вопроса сильной пронормальности холловых подгрупп в простых группах.

Основные результаты диссертации.

[3]В работе [4] показано, что картеровы подгруппы конечных групп, вообще говоря, не являются сильно пронормальными даже в разрешимых группах.

1. Доказана пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах.

   Опубликовано в [37].

2. Найдены примеры холловых подгрупп,

   (a) не являющихся пронормальными в своём нормальном замыкании,

   (b) в простых группах, не являющихся сильно пронормальными.

   Опубликовано в [38].

3. Доказано, что для множества π простых чисел существование группы с π-холловой подгруппой, не пронормальной в своём нормальном замыкании, эквивалентно существованию группы с несопряжёнными π-холловыми подгруппами. Для случая $\pi = p'$ получен получен арифметический критерий существования группы с несопряжёнными p'-холловыми подгруппами (т.е. с несопряжёнными p-дополнениями).

   Опубликовано в [36, 39].

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер.

Научная новизна работы. Все результаты диссертации являются новыми.

Методы исследования. В работе используется теория конечных простых групп, строение и свойства линейных алгебраических групп, классификация холловых подгрупп в конечных простых группах, классификация p'-холловых подгрупп в конечных простых группах.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [36–49]. При этом основные результаты опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК [36–39].

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на 52-й и 53-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научный прогресс» (Новосибирск 2014, 2015), Международная (45-я и 46-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург 2014, 2015), Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск 2014, 2015), Международная конференция «Groups and their Actions» (Бедлево, Польша 2015), Международная конференция «Groups and Graphs, Algorithms and Automata» (Екатеринбург 2015), Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, Беларусь 2015), Международный научный форум молодых ученых «Наука будущего – наука молодых» (Севастополь, 2015), семинарах «Теория групп» и «Алгебра и логика» в Новосибирске. Результаты диссертации нашли своё отражение в обзоре [23]. Естественным продолжением исследований диссертации является работа [9].

Общая структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, пять глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 61 страницах. Библиография содержит 59 наименований.

Содержание диссертации

Введение содержит историю изучаемых вопросов, основные опрделения и обзор основных результатов.

Глава 1. Предварительные сведения и результаты Данная глава носит предварительный характер. Она содержит список основных обозначений и предварительные результаты.

Глава 2. Пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах Основным результатом главы является следующее утверждение.

2.1.1. Теорема *В любой почти простой группе холловы подгруппы пронормальны.*

Оно обобщает основной результат работы [6].

Результаты главы получены автором лично и опубликованы в [37].

Глава 3. О сильной пронормальности и пронормальности в нормальном замыкании для холловых подгрупп Прежде всего в данной главе рассматривается уже упоминавшаяся

Проблема 1. [28, 18.32], [5, Гипотеза 11] *Всегда ли холлова подгруппа конечной группы пронормальна в своём нормальном замыкании?*

Заметим, что нормальное замыкание любой $\{2,3\}$-холловой подгруппы U из упомянутого выше примера непронормальной холловой подгруппы совпадает с базой B сплетения $\mathrm{GL}_3(2) \wr \mathbb{Z}_5$, и подгруппа U пронормальна в B. В работе [6] была доказана пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах. Поскольку нормальное замыкание любой нетривиальной подгруппы конечной простой группы совпадает со всей группой, положительное решение проблемы 1 можно было бы рассматривать как обобщение результата, полученного в [6].

Однако в общем случае проблема 1 имеет отрицательное решение, которое даёт

3.1.1. Теорема *Пусть множество простых чисел π таково, что*

(1) *существует конечная простая группа X, содержащая более одного класса сопряжённых π-холловых подгрупп;*

(2) *существует конечная простая группа Y, содержащая π-холлову подгруппу, отличную от своего нормализатора в Y.*

Тогда в регулярном сплетении $G = X \wr Y$ существует непронормальная π-холлова подгруппа, нормальное замыкание которой совпадает с G.

Условиям теоремы удовлетворяет, например, множество $\{2,3\}$. Действительно, группа

$$X = \mathrm{GL}_3(2) \simeq \mathrm{PSL}_3(2)$$

содержит два класса сопряжённых $\{2,3\}$-холловых подгрупп. Далее, $\{2,3\}$-холлова подгруппа H группы T верхне-треугольных матриц группы

$$Y = \mathrm{SL}_2(16) \simeq \mathrm{PSL}_2(16)$$

отлична от $T = N_T(H)$ (поскольку порядок группы T делится на 5), а значит и от нормализатора подгруппы H в Y. Кроме того, H является $\{2,3\}$-холловой подгруппой в Y. Значит, по теореме 3.1.1 регулярное сплетение

$$G = \mathrm{SL}_3(2) \wr \mathrm{SL}_2(16)$$

обладает непронормальной $\{2,3\}$-холловой подгруппой, у которой нормальное замыкание совпадает с G.

Из теоремы 3.1.1 для конечных множеств π вытекает [4]

3.1.2. Следствие *Пусть множество простых чисел π конечно. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны в своём нормальном замыкании;*

(2) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны;*

(3) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы сопряжены.*

Как было сказано, подгруппу H группы G называют *сильно пронормальной*, если для любой подгруппы $K \leq H$ и любого элемента $g \in G$ подгруппа K^g сопряжена с некоторой подгруппой из H (но необязательно с K) с помощью элемента из $\langle H, K^g \rangle$. Ясно, что сильно пронормальная подгруппа пронормальна. В это же время [4] построены примеры пронормальных, но не сильно пронормальных подгрупп. В [31] показано, что если (при фиксированном π) для π-подгрупп группы G выполняется полный аналог теоремы Силова, то π-холловы подгруппы в G сильно пронормальны.

В третьей главе изучаются также упомянутая выше проблема 7 о сильной пронормальности холловых подгрупп в конечных простых группах и следующий вопрос.

Проблема 4. [5, Гипотеза 9] *Всегда ли пронормальная холлова подгруппа конечной группы сильно пронормальна?*

Отрицательное решение проблемы 4 может быть получено из следующей теоремы.

3.1.3. Теорема *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Допустим, что выполняются условия:*

(1) *некоторая конечная группа X содержит более одного класса сопряжённых пронормальных π-холловых подгрупп;*

(2) *некоторая конечная группа Y содержит собственную пронормальную π-холлову подгруппу M и $M = N_Y(M)$.*

[4]Естественно считать, что несуществование π-холловых подгрупп влечёт их сопряжённость.

Рассмотрим произвольное транзитивное подстановочное действие

$$\rho : Y \to Sym(\Omega)$$

группы Y на некотором множестве Ω, при котором подгруппа M действует нетранзитивно. [5] *Тогда соответствующее подстановочное сплетение $G = X \wr_\rho Y$ обладает π-холловой подгруппой U такой, что*

(a) *U пронормальна G;*

(b) *$(U \cap A)^A \neq (U \cap A)^G$, где A — база сплетения $X \wr_\rho Y$;*

(c) *U не сильно пронормальна в G.*

Условиям теоремы удовлетворяет, например, множество $\{2,3\}$: группа

$$X = \mathrm{PSL}_2(7) \simeq \mathrm{GL}_3(2)$$

содержит два класса сопряжённых $\{2,3\}$-холловых подгрупп, и группа $Y = S_5$ содержит собственную пронормальную $\{2,3\}$-холлову подгруппу

$$M = N_Y(M) = S_4,$$

причём подгруппа S_4 группы S_5 нетранзитивна. Значит, по теореме 3.1.3 естественное подстановочное сплетение

$$P = \mathrm{PSL}_2(7) \wr S_5$$

обладает пронормальной, но не сильно прономальной π-холловой подгруппой.

Заметим, что группа $\mathrm{SL}_2(7)$ также содержит два класса сопряжённых $\{2,3\}$-холловых подгрупп, а значит подстановочное сплетение $\mathrm{SL}_2(7) \wr S_5$ обладает пронормальной, но не сильно пронормальной $\{2,3\}$-холловой подгруппой. Данное замечание позволяет также получить следующее утверждение, дающее отрицательное решение проблемы 3.

3.1.4. Следствие *В простой симплектической группе* $\mathrm{PSp}_{10}(7)$ *содержится не сильно пронормальная $\{2,3\}$-холлова подгруппа.*

В действительности, из теоремы 3.1.3 вытекает существование пронормальных, но не сильно пронормальных π-холловых подгрупп в подходящих конечных группах для многих множеств π, как показывает

3.1.5. Следствие *Пусть множество π простых чисел таково, что существует конечная группа, содержащая более одного класса сопряжённых π-холловых подгрупп. Тогда существует группа, обладающая пронормальной, но не сильно пронормальной π-холловой подгруппой.*

Легко видеть, что со следствиями 3.1.2 и 3.1.5 тесно связана проблема [7, Проблема 7.20]: для каких множеств π существуют группы, содержащие более одного

[5] Такое действие, очевидно, существует: можно рассмотреть действие группы Y правыми сдвигами на множестве правых смежных классов под подгруппе M.

класса сопряженных π-холловых подгрупп? Этот вопрос рассматривается в главе 5 для специального случая $\pi = p'$.

Важную роль в изучении пронормальности для холловых подгрупп (в том числе и в данной работе) играет следующее утверждение, дающее признак пронормальности

1.3.1 [8, лемма 16]**. Лемма** *Пусть H — холлова подгруппа некоторой конечной группы G. Предположим, что для некоторой нормальной подгруппы A группы G справедливы следующие утверждения:*

(1) $(H \cap A)$ *пронормальна в A;*

(2) (HA/A) *пронормальна в G/A;*

(3) $(H \cap A)^A = (H \cap A)^G$.

Тогда H пронормальна в G.

Утверждение (2), очевидно, является также необходимым условием для пронормальности H. В [8, замечание 3] сформулирован вопрос: являются ли условия (1) и (3) также необходимыми? Из утверждений (a) и (b) теоремы 3.1.3 вытекает, что условие (3) леммы 1.3.1 не является необходимым. Теорема 3.1.3 показывает, что условие (1) леммы 1.3.1 также не является необходимым для пронормальности холловой подгруппы, поскольку из теоремы 3.1.3 вытекает

3.1.6. Следствие *Пусть для некоторого множества π простых чисел конечная группа X содержит более одного класса сопряжённах π-холловых подгрупп. Пусть также Y — диэдральная группа порядка $2p$, где $p \in \pi'$. Пусть $G = X \wr_\rho Y$ — подстановочное сплетение соответствующее естественному транзитивному действию ρ группы Y на множестве из p элементов. Обозначим через A полный прообраз в G (нормальной) силовской p-подгруппы группы Y. Тогда G обладает пронормальной π-холловой подгруппой U такой, что $U \cap A$ не пронормальна в A.*

Результаты главы получены автором лично и опубликованы в [38].

Глава 4. Зависимость пронормальности π-холловых подгрупп в своём нормальном замыкании от множества π Цель четвёртой главы — отказаться от требования конечности множества π в следствии 3.1.2. Основным результатом четвёртой главы является следующая

4.1.1. Теорема *Для множества π простых чисел следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны в своём нормальном замыкании;*

(2) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы пронормальны;*

(3) *в любой конечной группе π-холловы подгруппы сопряжены.*

Достаточно установить импликацию (1) $\Rightarrow$ (3): утверждения (2) и (3), как видно из следствия 3.1.2, эквивалентны, а импликация (2) $\Rightarrow$ (1) тривиальна. Если утвержение (3) неверно, то, как хорошо известно, существует простая неабелева группа X, содержащая несопряженные π-холловы подгруппы. Это накладывает существенные ограничения на множество π, в частности из [22, теорема A] следует, что $2 \in \pi$.

Для построения π-холловой подгруппы, непронормальной в своем нормальном замыкании, в 3.1.1 требуется существование *простой* неабелевой группы Y, содержащей *несамонормализуемую* (т. е. отличную от своего нормализатора) π-холлову подгруппу. Такую группу Y удается построить для любого *конечного* множества π, содержащего 2. Тем самым регулярное сплетение $G = X \wr Y$ содержит непронормальную π-холлову подгруппу, нормальное замыкание которой — вся группа G.

Однако без каких-либо существенных модификаций в доказательстве теоремы 3.1.1 требование *простоты* группы Y, обладающей несамонормализуемой π-холловой подгруппой H, можно ослабить, потребовав лишь совпадения Y с нормальным замыканием $\langle H^Y \rangle$ подгруппы H в Y, т. е. потребовав существования в Y *контранормальной* несамонормализуемой π-холловой подгруппы. Таким образом, справедливо

4.1.2. Предложение *Пусть множество простых чисел π таково, что*

(1) *существует конечная простая группа X, содержащая более одного класса сопряжённых π-холловых подгрупп;*

(2) *существует конечная группа Y, содержащая пронормальную π-холлову подгруппу, отличную от своего нормализатора в Y и нормальное замыкание которой совпадает с Y.*

Тогда в регулярном сплетении $G = X \wr Y$ существует непронормальная π-холлова подгруппа, нормальное замыкание которой совпадает с G.

Группу Y, удовлетворяющую условию (2) предложения 4.1.2, удается построить во всех необходимых случаях, поскольку справедливо

4.1.3. Предложение *Пусть множество простых чисел π непусто и отлично от множества всех простых чисел. Тогда существует разрешимая группа Y, обладающая π-холловой подгруппой H такой, что $Y = \langle H^Y \rangle$ и $H < N_Y(H)$.*

Построение группы Y в предложении 4.1.3 распадается на два принципиально разных случая: когда множество π' содержит по крайней мере два простых числа и когда $\pi' = \{p\}$ для некоторого простого числа p. В первом случае используется утверждение.

4.1.4. Предложение [4, лемма 9] *Пусть G — конечная группа и $H \leq G$. Допустим, что подгруппа H не нормальна в G. Тогда для любого простого числа p, не делящего $|G|$, существует неприводимый FG-модуль $\mathbf{V}$ над некоторым конечным полем F характеристики p такой, что $0 < C_{\mathbf{V}}(H) < \mathbf{V}$.*

Предложение 4.1.4 используется в ситуации, когда H — π-холлова подгруппа в G и в естественном полупрямом произведении VG. Для использования предложения 4.1.4 важно, чтобы множество π' содержало по крайней мере два различных простых числа: p и какой-либо простой делитель индекса $|G : H|$. Хотя группу Y в предложении 4.1.3 несложно построить и в ситуации, когда $\pi' = \{p\}$ (эквивалентно, $\pi = p'$), аналог предложения 4.1.4 неверен в случае, когда p делит порядок группы G. Более того, в случае, когда H — p'-холлова подгруппа в G (а именно в этой ситуации, когда H — π-холлова подгруппа в G, предложение 4.1.3 и используется), справедливо в определенном смысле противоположное утверждение:

4.1.5. Предложение [2, лемма 2], [27, теорема E(a)] *Пусть G — конечная группа, содержащая p'-холлову подгруппу H для некоторого простого числа p. Пусть $\mathbf{V}$ — неприводимый FG-модуль над некоторым полем F характеристики p. Тогда если $C_{\mathbf{V}}(H) > 0$, то $C_{\mathbf{V}}(G) = \mathbf{V}$ (т.е. $\mathbf{V}$ — главный FG-модуль).*

Результаты главы получены в неразделимом соавторстве с Е.П. Вдовиным и Д.О. Ревиным и опубликованы в [39].

Глава 5. Арифметика сопряжённости для p-дополнений Напомним, что p-дополнением в группе G называется её p'-холлова подгруппа. В пятой главе детально изучается зависимость от данного p ответов на следующие вопросы.

(а) Верно ли, что в любой конечной группе любые два p-дополнения сопряжены?

(б) Верно ли, что в любой конечной группе G любые два p-дополнения сопряжены в $\mathrm{Aut}(G)$?

(в) Верно ли, что в любой конечной группе любые два p-дополнения изоморфны?

Для того, чтобы сформулировать результаты главы, определим для данного простого числа p следующие классы конечных групп.

$\mathfrak{C}(p)$ — класс всех конечных групп, в которых все p-дополнения сопряжены.

$\mathfrak{A}(p)$ — класс всех конечных групп G таких, что любые два p-дополнения в G сопряжены элементом из $\mathrm{Aut}(G)$.

$\mathfrak{I}(p)$ — класс всех конечных групп, в которых все p-дополнения изоморфны.

Отметим, что если конечная группа не содержит p-дополнений, то она принадлежит каждому из классов $\mathfrak{C}(p)$, $\mathfrak{A}(p)$ и $\mathfrak{I}(p)$. Очевидно также, что имеет место следующая цепочка включений

$$\mathfrak{C}(p) \subseteq \mathfrak{A}(p) \subseteq \mathfrak{I}(p) \subseteq \mathfrak{G}, \qquad (1)$$

где $\mathfrak{G}$ — класс всех конечных групп.

Обозначим также через $\mathcal{NC}$ множество всех простых чисел p, некоторая натуральная степень которых представляется в виде

$$\frac{q^l - 1}{q - 1} \qquad (2)$$

где q — степень простого числа, l — простое нечётное число.

Основным результатом главы является следующая

5.1.1. Теорема *Пусть p — некоторое простое число, тогда имеет место одно из следующих утверждений.*

(а) *Все включения в цепочке* (1) *строгие и* $p \in \mathcal{NC}$.

(б) *Все включения в цепочке* (1) *являются равенствами и* $p \notin \mathcal{NC}$.

5.1.2. Следствие *Пусть* p *— некоторое простое число, тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(а) *В любой конечной группе любые два* p*-дополнения сопряжены.*

(б) *В любой конечной группе* G *любые два* p*-дополнения сопряжены в* $\mathrm{Aut}(G)$.

(в) *В любой конечной группе любые два* p*-дополнения изоморфны.*

(г) $p \notin \mathcal{NC}$.

Ответ на сформулированный выше вопрос о совпадении классов $\mathcal{E}_\pi$ и $\mathcal{C}_\pi$ при $\pi = p'$ в какой-то мере даёт следующее утверждение.

5.1.3. Следствие *Пусть* p *— некоторое простое число, тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(а) $\mathcal{E}_{p'} = \mathcal{C}_{p'}$

(б) $p \notin \mathcal{NC}$.

В свете теоремы 5.1.1, естественный предоставляется следующий вопрос:

Проблема 9. Для данного простого числа p выяснить, верно ли, что $p \in \mathcal{NC}$.

В теории чисел известна

Гипотеза Нагеля–Люнггрена. *Уравнение Нагеля–Люнггрена*

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^m$$

для натуральных чисел x, y, n *и* m*, бóльших единицы, имеет ровно три решения:*

$$\frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 11^2, \ \frac{7^4 - 1}{7 - 1} = 20^2, \ \frac{18^3 - 1}{18 - 1} = 7^3.$$

В случае справедливости данной гипотезы вопрос о принадлежности данного простого числа $p \neq 11$ множеству $\mathcal{NC}$ свелся бы к простому перебору различных пар соответствующих q и l, для которых возможно равенство

$$p = \frac{q^l - 1}{q - 1}.$$

Число таких пар конечно. Более того, справедливы соотношения $q^{l-1} < p < q^l$ и l делит $p - 1$.

Гипотеза Нагеля–Люнггрена исследовалась в работах [15–18, 21, 29, 30, 32]. В частности, в статье [18] доказано следующее утверждение.

5.1.4. Предложение [18, теорема 1] *Пусть числа x, y, n и m, бóльшие единицы, удовлетворяют уравнению Нагеля-Люнггрена и четвёрка* (x, y, n, m) *отлична от* $(3, 11, 5, 2)$, $(7, 20, 4, 2)$ *и* $(18, 7, 3, 3)$. *Тогда наименьший простой делитель числа n больше либо равен* 29 *и количество простых делителей числа n не превосходит* 4.

С использованием данного утверждения доказано

5.5.2. Предложение *Пусть p — простое число. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $p > 3$ — простое число Мерсенна, то $p \in \mathcal{NC}$.*

(2) *Если p — простое число Ферма, то $p \notin \mathcal{NC}$.*

(3) $11, 13, 73, 307 \in \mathcal{NC}$.

(4) *Если все простые делители числа $p - 1$ не превосходят* 23 *и* $p \neq 11$, *то $p \in \mathcal{NC}$ тогда и только тогда, когда само p представляется в виде* (2).

С учётом предложения 5.5.2, наименьшим простым числом, для которого проблема 9 в настоящее время остается открытой, является число 59.

В следующей таблице приведена информация о состоянии на текущий момент проблемы 9 для простых чисел, не превосходящих 500.

Принадлежат $\mathcal{NC}$	Не принадлежат $\mathcal{NC}$	Не принадлежат $\mathcal{NC}$ по модулю гипотезы Нагеля–Люнггрена
	$2, 3, 5,$	
$7, 11, 13,$	$17, 19, 23,$ 29,	
31,	37, 41, 43, 47, 53,	59
	61, 67, 71,	
73,	79,	83,
	89, 97, 101, 103,	107,
	109, 113,	
127,	131, 137, 139,	149,
	151, 157, 163,	167, 173, 179,
	181, 191, 193, 197, 199, 211,	223, 227,
	229,	233, 239,
	241, 251, 257,	263, 269,
	271, 277, 281,	283, 293,
307,		311,
	313,	317,
	331, 337,	347, 349,
	353,	359, 367, 373,
	379,	383, 389,
	397, 401, 409, 419, 421,	431
	433,	439,
	443, 449, 457, 461, 463,	467, 479,
	487, 491,	499

Результаты главы получены автором лично и опубликованы в [36].

Литература

[1] *Вдовин, Е.П.* Картеровы подгруппы в конечных почти простых группах // Алгебра и логика — 2007. — Т. 46, 2. — С. 157–216.

[2] *Вдовин, Е.П.* Критерии абнормальности для p-дополнений / Ревин Д.О., Вдовин Е. П. // Алгебра и логика — 2016. — Т. 55 — 5. — С. 531–539.

[3] *Вдовин, Е.П.* Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечных группах / Д.О. Ревин, Е.П. Вдовин // Сиб. матем. журн. — 2010. — Т. 51, 3. — С. 506–513.

[4] *Вдовин, Е.П.* О пронормальности и сильной пронормальности подгрупп / Д.О. Ревин, Е.П. Вдовин // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52, 1. — С. 22–33.

[5] *Вдовин, Е.П.* О пронормальности холловых подгрупп / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т.54, 1. — С. 35–43.

[6] *Вдовин, Е.П.* Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // Сиб. матем. журн. — 2012. — Т. 53, 3. — С. 527–542.

[7] *Вдовин, Е.П.* Теоремы силовского типа / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // Успехи математических наук. — 2011. — Т. 66, вып. 5. — С. 3–46.

[8] *Вдовин, Е.П.* Существование пронормальных π–холловых подгрупп в $\mathcal{E}_\pi$-группах / Д.О. Ревин, Е.П. Вдовин // Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, 3. — С. 481–486.

[9] *Го, В.* Эквивалентность существования несопряженных и неизоморфных холловых π-подгрупп / В. Го, А.А. Бутурлакин, Д.О.Ревин // Труды ИММ УрО РАН — 2018. — Т.24, 3. — С. 43–50.

[10] *Ревин, Д.О.* Вокруг гипотезы Ф.Холла // Сибирские электронные математические известия. — 2009. — Т. 6. — С. 366–380.

[11] *Чунихин, С.А.* О разрешимых группах // Изв. НИИММ Том. унив. — 1938. — Т. 2. — С. 220–223.

[12] *Чунихин, С.А.* О силовски-правильных группах // ДАН СССР —1947. — Т. 60. — 5. — С. 773–774.

[13] *Чунихин, С.А.* О существовании и сопряженности подгрупп у конечной группы // Матем. сб. — 1953. — Т. 33, 1. — С. 111–132.

[14] *Чунихин, С.А.* О π-свойствах конечных групп // Матем. сб. — 1949 — Т. 25. — 3. — С. 321–346.

[15] *Bennett, M.* The Nagell-Ljunggren equation via Runge's method / M. A. Bennett, A. Levin arXiv preprint arXiv:1312.4037 (2013)

[16] *Bugeaud, Y.* L'equation de Nagell-Ljunggren $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$ / Y. Bugeaud, M. Mignotte, Enseign. Math., 48:1/2 (2002), 147–168

[17] *Bugeaud, Y.* Y. Bugeaud, M. Mignotte, Y. Roy, On the Diophantine Equation $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Pacific journal of mathematics, 193:2 (2000), 257–267

[18] *Bugeaud, Y.* Y. Bugeaud, P. Mihailescu, On the Nagell-Ljunggren Equation $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Math. Scand, 101:2 (2007), 177–183.

[19] *Buturlakin A.A.* On p-complements of finite groups / A.A.Buturlakin, D.O.Revin //, Siberian Electronic Mathematical Reports, 10 (2013), 414–417.

[20] *Carter R. W.* Simple groups of Lie type, John Wiley & Sons, 1989.

[21] *D. Estes* D. Estes, R. Guralnick, M. Schacher and E. Strau, Equations in prime powers, Pacific journal of mathematics, 118:2 (1985), 359–367

[22] *Gross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups //Bulletin of the London Mathematical Society. — 1987. — Т. 19. — . 4. — С. 311-319.

[23] *Guo, W.* Pronormality and submaximal $\mathfrak{X}$-subgroups in finite groups / W. Guo, D. O. Revin // Communications in Mathematics and Statistics — 2018. — T.6, 3. — P. 289–317.

[24] *Hall, P.* A characteristic property of soluble groups // J. London Math. Soc. — 1937. — V. 12. — P. 198–200.

[25] *Hall, P.* A note on soluble groups // J. London Math. Soc. — 1928. — V. s1-3, iss. 2. — P. 98–105.

[26] *Hall, P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. — 1956. — V. s3-6, iss. 2. — P. 286–304.

[27] Isaacs I.M., Irreducible products of characters // J. Algebra. — 2000. — Т. 223. — С. 630–646.

[28] The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory / editors: V.D. Mazurov and E.I. Khukhro. — 17th. ed. — Novosibirsk: Russian Academy of Sciences Siberian Division, Sobolev Institute of Mathematics, 2010.

[29] *Khosravi A.* A. Khosravi, B. Khosravi, On the Diophantine Equation $\frac{q^n-1}{q-1} = y$, Comment.Math.Univ.Carolin, 44:1 (2003), 1–7.

[30] *Ljunggren W.* W. Ljunggren, Some theorem on indeterminate equations of the form $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Norsk Mat. Tidsskr., 25 (1943), 17–20.

[31] *Manzaeva, N.C.* On the heritability of the Hall property $\mathcal{D}_\pi$ by overgroups of π-Hall subgroups / N.C. Manzaeva //arXiv preprint arXiv:1504.03137. — 2015.

[32] *Polický Z.* Diophantine Equation $\frac{q^n-1}{q-1} = y$ for four prime divisors of $y-1$// Comment. Math. Univ. Carolin, — 2005. — 46:3, —P. 577–588.

[33] *Revin, D.O.* Frattini argument for Hall subgroups / D.O. Revin, E.P. Vdovin // Journal of Algebra. — 2014. — V. 414. — P. 95–114.

[34] *Revin, D.O.* Hall subgroups of finite groups / D.O. Revin, E.P. Vdovin // Contemporary Mathematics. — 2006. — V. 402. — P. 229–265.

[35] *Sylow, M.L.* Théorèmes sur les groupes de substitutions // Math. Ann. — 1872. — V. 5, iss. 4. — P. 584–594.

Работы автора по теме диссертации[6]

[36]* *Нестеров, М.Н.* Арифметика сопряжённости p-дополнений // Алгебра и логика. — 2015. — Т. 54, N1. — С. 53–69.

[37]* *Нестеров, М.Н.* Пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах // Сибирские электронные математические известия. — 2015. — Т. 12, N1. — С. 1032–1038.

[38]* *Нестеров, М.Н.* Нестеров М. Н. О пронормальности и сильной пронормальности холловых подгрупп // Сибирский математический журнал. — 2017. — Т. 58, N1. — С. 156–173.

[39]* *Вдовин, Е.П.* О пронормальности холловых подгрупп в своём нормальном замыкании / Е.П. Вдовин, М.Н. Нестеров, Д.О. Ревин // Алгебра и логика. — 2017. — Т.56, N6. — С. 682–690.

[40] *Нестеров, М.Н.* О p-дополнениях в конечных группах // Труды 45-й Международной молодёжной школы-конференции «Современные проблемы математики и их приложений» ,посвящённой 75-летию В.И. Бердышева, Екатеринбург 2-8 февраля 2014 г. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, УрФУ, 2014. — С. 41.

[41] *Нестеров, М.Н.* О p-дополнениях в конечных группах // Материалы 52-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск, 11-18 апреля 2014 г. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2014. — С. 18.

[6] Публикации в изданиях, входящих на момент выхода в перечень ВАК для основных результатов докторских диссертаций, помечены звездочкой *.

[42] *Нестеров, М.Н.* Пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах // Международная конференция «Мальцевские чтения», тезисы докладов. Новосибирск, 10-13 ноября 2014 г. — С. 76.

[43] *Нестеров, М.Н.* Пронормальность холловых подгрупп в почти простых группах // Труды 46-й Международной молодёжной школы-конференции «Современные проблемы математики и их приложений» , Екатеринбург 25-31 января 2015 г. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. — С. 18.

[44] *Нестеров, М.Н.* Контрпримеры к некоторым гипотезам о пронормальностихолловых подгрупп // Международная конференция «Мальцевские чтения» посвященная 75-летию Ю.Л.Ершова, тезисы докладов. Новосибирск, 3-7 мая 2015 г. — С. 114.

[45] *Нестеров, М.Н.* Вопросы пронормальности для холловых подгрупп // Материалы 53-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. Новосибирск, 11-17 апреля 2015 г. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2015. — С. 14.

[46] *Nesterov, M.* On the pronormality and strong pronormality of Hall subgroups // Международная конференция Groups and their actions», 22-26 июня 2015 г. — Бедлево, Польша

[47] *Nesterov, M.* On the pronormality and strong pronormality of Hall subgroups // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School in honor of the 80th Birthday of Professor Vyacheslav A.Belonogov and of the 70th Birthday of Professor Vitaly A. Baransky, 9-15 августа 2015 г. — Екатеринбург — С. 79.

[48] *Нестеров, М.Н.* О пронормальности и сильной пронормальности холловых подгрупп // Международная научная конференция Дискретная математика,алгебра иих приложения, 14-18 сентября 2015 г. — Минск, Беларусь — С. 40-41.

[49] *Нестеров, М.Н.* О пронормальности и сильной пронормальности холловых подгрупп // Международный научный форум молодых ученых «Наука будущего – наука молодых», 29 сентября - 2 октября 2015 г. — Севастополь