На правах рукописи

Богданова Рада Александровна

Аналитические методы исследования некоторых феноменологически симметричных двумерных и трехмерных геометрий

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Горно-Алтайский государственный университет», на кафедре математики, физики и информатики.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Михайличенко Геннадий Григорьевич

Официальные оппоненты:
Шелехов Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский педагогический государственный университет» (МПГУ), Институт математики и информатики, профессор кафедры геометрии;

Оскорбин Дмитрий Николаевич, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Алтайский государственный университет», Факультет математики и информационных технологий, доцент кафедры математического анализа.

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», г. Казань.

Защита состоится «23» апреля 2020 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 003.015.03, созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, расположенного по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан « ____ » ______________ 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н. Егоров Александр Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена: разработке аналитического метода классификации феноменологически симметричных геометрий (геометрий максимальной подвижности) и его применению к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, которая ранее была построена Г.Г. Михайличенко групповым методом[1]; разработке аналитических методов решения функциональных уравнений для нахождения полных групп движений трех гельмгольцевых и симплициальной двумерных геометрий; определению всех невырожденных двухточечных инвариантов найденных групп движений этих двумерных геометрий; нахождению ранее неизвестных явных выражений групп движений симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой, гельмгольцевой и симплициальной III типа, симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий максимальной подвижности. Только для одной из четырех двумерных геометрий, а именно дуальногельмгольцевой плоскости, в диссертации Г.Г. Михайличенко[2] проведено доказательство теоремы о группе движений, в которое было введено сильное дополнительное условие. Это условие не позволяет утверждать, что найденная группа движений полна. Исследования двумерных гельмгольцевых геометрий проводились В.А. Кыровым. В работе[3] он без доказательства приводит группы их движений, которые использует для построения дифференциальной геометрии двумерных гельмгольцевых многообразий.

Групповой метод классификации феноменологически симметричных геометрий состоит в нахождении локальных групп Ли преобразований многообразия[4] и их невырожденных двухточечных инвариантов, которые рассматриваются как метрические функции. Однако с ростом размерности многообразия, числа компонент метрической функции и ранга феноменологической симметрии предварительное проведение классификации групп преобразований становится технически очень сложным.

[1]см. 1. Михайличенко, Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии. I.* / Г.Г. Михайличенко. // Сиб. матем. журнал. – 1998. – Т.39, № 2. – С. 377 -395; 2. Михайличенко, Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии. II.* /Г.Г. Михайличенко. // Наука, культура, образование. – 2001. – № 8/9. – С. 7-16.

[2]Михайличенко, Г.Г. *Групповые свойства физических структур*: диссертация на соиск. учен. степ. доктора физико-математических наук: 01.01.04 Геометрия и топология. – Новосибирск, 1990. - 251 с.

[3]Кыров, В.А. *Гельмгольцевы пространства размерности два*/ В.А. Кыров. // Сиб. матем. журн. – 2005. – Т 46. № 6. – С.1341-1359.

[4]см. 1. Михайличенко, Г.Г. *Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости* / Г.Г. Михайличенко. // Сибирский математический журнал. – 1982. – Т.23, № 5. – С. 132 -141.; 2. Михайличенко, Г.Г. *Некоторые замечания к классификации Ли групп преобразований* / Г.Г. Михайличенко. // Вестник МГУ сер. 1. Математика, механика. – 1986. – № 5. – С. 93.; 3. Михайличенко, Г.Г. *Трехмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства* / Г.Г. Михайличенко. // Известия вузов. Математика. – 1997. – №9(424). – С. 41-48.

Аналитический метод классификации феноменологически симметричных геометрий состоит в получении функционально-дифференциальных соотношений и систем дифференциальных уравнений из анализа строения и ранга соответствующей функциональной матрицы.

В настоящее время В.А. Кыровым разрабатывается новый метод классификации, опирающийся на представление о вложении[5], справедливость которого подтверждается, например, сопоставлением классификаций двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий (см. работы Г.Г. Михайличенко и В.Х. Лева)[6].

Необходимость применения разных методов классификации феноменологически симметричных геометрий является существенной, поскольку их применение позволяет судить о полноте и надежности полученных ранее результатов.

К настоящему времени построены полные классификации одномерных, двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий, а также двуметрических, триметрических и четыреметрических феноменологически симметричных геометрий (см. работы Г.Г. Михайличенко, В.Х. Лева, В.А. Кырова)[7]. Классификации других феноменологически симметричных геометрий еще не построены, так как не найдены более эффективные методы решения подобных задач.

Феноменологически симметричные геометрии представляют собой синтез двух классических подходов к построению геометрии: группового и метрического, которые на протяжении многих десятилетий (начиная с работ Г. Гельмгольца, Ф. Клейна, А. Пуанкаре, С. Ли, А. Кэли и др.) являются предметом исследования в теории функций, представлений групп Ли, римановой геометрии и других разделов математики. На *феноменологическую симметрию* особое внимание обратил Ю.И. Кулаков[8]. Сущность феномено-

[5]см. 1. Кыров, В.А. *Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии* / В.А. Кыров. // Сиб. журн. индустр. матем. – 2010. – Т 13. № 4. – С. 38-51.; 2. Кыров, В.А. *Функциональные уравнения в симплектической плоскости* / В.А. Кыров. // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16. № 2. – С. 149-153.

[6]см. 1. Михайличенко, Г.Г. *Двумерные геометрии* / Г.Г. Михайличенко. – Барнаул: БГПУ, 2004. – 132 с.; 2. Лев, В.Х. *Трехмерные геометрии в теории физических структур* / В.Х. Лев. // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. – 1988. – Вып. 125. – С. 90-103.

[7]см. 1. Михайличенко, Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии.* I. / Г.Г. Михайличенко. // Сибирский математический журнал. – 1998. – Т.39, № 2. – С. 377 -395.; 2. Михайличенко, Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии* / Г.Г. Михайличенко. // Докл. АН СССР. – 1996. – Т.348, № 1. – С. 22 -24.; 3. Михайличенко Г.Г. *Двумерные геометрии* // Докл. АН СССР. –1981. – Т.260, №4, С.803-805.; 4. Михайличенко, Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии.* II. /Г.Г. Михайличенко. // Наука, культура, образование. – 2001. – № 8/9. – С. 7-16.; 5. Лев, В.Х. *Трехмерные геометрии в теории физических структур* / В.Х. Лев. // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. – 1988. – Вып. 125. – С. 90-103.; 6. Кыров, В.А. *Классификация четырехмерных транзитивных локальных групп Ли преобразований пространства* R^4 *и их двухточечных инвариантов* / В.А. Кыров. // Изв. вузов. Математика. –Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2008. – № 6. – С.29-42.

[8]Кулаков, Ю.И. *Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур* / Ю.И. Кулаков. // Докл. АН СССР. – 1970. –Т.193, № 5. – С.985-987.

логической симметрии состоит в том, что между всеми взаимными расстояниями для некоторого конечного числа точек пространства имеется функциональная связь[9].

Начиная с 60-ых годов XX века наряду с такими направлениями как геометрия расстояний (представленным в фундаментальных трудах H. Busemann, А.Д. Александрова, В.Н. Берестовского, L.M. Blumenthal, Ю.Г. Решетняка, Ю.Д. Бураго, B.B. Phadke, A. Papadopoulos, M. Bridson, A. Haeffiger и их учеников)[10], геометрия максимальной подвижности (представленным в работах Д.В. Алексеевского, Э.Б. Винберга, А.С. Солодовникова)[11], появилась феноменологически симметричная геометрия в рамках более общей концепции – теории физических структур[12], которая в настоящее время активно развивается Новосибирской (Ю.И. Кулаков, А.А. Симонов и др.), Горно-Алтайской (Г.Г. Михайличенко, В.А. Кыров и др.) и Московской (Ю.С. Владимиров, А.В. Карнаухов и др.) научными школами. Метрические (К. Менгер, L.M. Blumenthal)[13] и групповые (Г. Гельмгольц, Ф. Клейн, А. Пуанкаре)[14] задания геометрии оказались эквивалентными, что установлено Г.Г. Михайличенко и отмечено G.P. Wene в их работах[15]. Действительно, *феноменологически симметричные геометрии* являются *геометриями*

[9]см. 1. Берже, М. Геометрия: Пер. с франц. Т1. – М.: Мир, 1984. – 560 с.; 2. Blumenthal, L.M. Theory and Applications of Distance Geometry. Clarendon Press, Oxford, 1953.; 3. Кулаков, Ю.И. Теория физических структур / Ю.И. Кулаков. – М.: Доминико, 2004.

[10]см. 1. Busemann H. Recent Synthetic Differential Geometry / H. Busemann.– Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1970.; 2. Busemann, H., Phadke B.B. *Spaces with Distinguished Geodesics* / H. Busemann, B.B. Phadke. - New York - Basel - Marsel: Dekker Inc., 1987.; 3. Берестовский, В.Н. *Однородные пространства с внутренней метрикой: диссертация на соиск. учен. степ. доктора физико-математических наук: 01.01.04 Геометрия и топология.* — Новосибирск. — 1990. — 269 с.; 4. Александров, А.Д., Берестовский В.Н., Николаев И.Г. *Обобщенные римановы пространства* / А.Д. Александров, В.Н. Берестовский, И.Г. Николаев // Успехи математических наук. – 1986. – Т. 41, вып. 3. – С. 3-44.; 5. Blumenthal, L.M. Theory and Applications of Distance Geometry. Clarendon Press, Oxford, 1953.; 6. Решетняк, Ю.Г. *Двумерные многообразия ограниченной кривизны* / Ю. Г. Решетняк // Совр. пробл. матем. Фунд. напр. — Т. 70 [Геометрия - 4]. — 1989. — С. 5-189.; 7. Бураго, Ю.Д., Залгаллер, В.А. Введение в риманову геометрию / Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер. – СПб.: Наука, 1994. – 318 с.; 8. Papadopoulos A. Metric spaces, Convexity and Nonpositive curvature / A. Papadopoulos. - Zurich: European Math. Society, 2005.; 9. Bridson, M.R., Haeffiger, A. Metric spaces of non-positive curvature. Ser. A / M.R. Bridson, A. Haeffiger // Series of Comprehensive Stadies in Mathematics. - Berlin: Springer-Verlag. – 1999. – V. 319.

[11]Алексеевский, Д.В., Винберг, Э.Б, Солодовников, А.С. *Геометрия пространств постоянной кривизны.* / Д.В. Алексеевский, Э.Б. Винберг, А.С. Солодовников «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления Т. 29 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». – М.: 1988. – С. 5 — 146

[12]см. 1.Кулаков, Ю.И. *О теории физических структур* / Ю.И. Кулаков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – Л.: Наука, 1983. – Т.127. – С.103-151.; 2. Кулаков, Ю.И. *Элементы теории физических структур* /Ю.И. Кулаков. Новосибирск: НГУ, 1968.

[13]Blumenthal, L.M. Theory and Applications of Distance Geometry. Clarendon Press, Oxford, 1953.

[14]см. 1. Гельмгольц, Г. *О фактах, лежащих в основании геометрии* // Об основаниях геометрии. – М., 1956. – С.366-388.; 2.Клейн, Ф. *Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа")* / Ф. Клейн. // Об основаниях геометрии. – М., 1956. – С. 402-434.; 3. Пуанкаре, А. *Об основных гипотезах геометрии* / А. Пуанкаре. // Об основаниях геометрии. - М., 1956. – С. 388-398.

[15]см. 1. Михайличенко, Г.Г. *О групповой и феноменологической симметриях в геометрии* / Г.Г. Михайличенко. // Докл. АН СССР. – 1983. – Т.269, № 2. – С. 284 – 288.; 2. Wene, G.P. *Comments of the geometry of Lie algebras and Lie-homotopic algebras* // Hadronic J., 1985. – Vol.8, №2. – P.63-74.

максимальной подвижности, наделены групповой симметрией, лежащей в основе "Эрлангенской программы" Ф. Клейна[16].

Заметим, что в работах по геометрии расстояний (см., например, L.M. Blumenthal[17]) феноменологическая симметрия задавалась известными уравнениями связи в отличие от принципа феноменологической симметрии теории Ю.И. Кулакова[18], в котором предполагалось только их существование.

Феноменологически симметричные геометрии ранга $m = n + 2$ (см. монографию Михайличенко Г.Г.[19], §1) строятся на гладком sn-мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$. Точки этого многообразия удобно, в целях сокращения записи, обозначать строчными буквами латинского алфавита: i, j, k и т.д. Например, в частности, при $s = 1, n = 2$ текущая точка $i \in \mathfrak{M}_2$ задается локальными координатами x_i, y_i. В основе построения геометрии лежит отображение $f : \mathfrak{S}_f \to R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$, сопоставляющее паре точек s действительных чисел. Отображение f, как функция пары точек, называется *метрической функцией.* Эта функция, в отличие от обычной метрики, удовлетворяет только естественным математическим требованиям гладкости, невырожденности и определенности почти всюду в $\mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$. В частном случае, при $s = 2, n = 1$, эта функция двухкомпонентная — вектор-функция, а геометрия, задаваемая ею, называется *двуметрической.*

Одним из определяющих свойств *метрической функции* является ее инвариантность относительно некоторой группы Ли преобразований[20] исходного многообразия. Действительно, по этой функции, решая соответствующее *функциональное уравнение* в рамках аналитического подхода, можно найти локальную группу движений, относительно которой она является двухточечным инвариантом.

В числе важнейших понятий теории отметим *ранг феноменологической симметрии*: это то конечное число точек пространства, для которых все взаимные "расстояния" связаны некоторым уравнением.

В работе "О фактах, лежащих в основании геометрии"[21] Г. Гельмгольц предположил, что двухточечная (метрическая) функция двумерной геометрии не может быть произвольной, если твердое тело в своем движении имеет три степени свободы. Но в таком случае между шестью взаимными расстояниями для четырех точек i, j, k, l должна существовать функциональная

---

[16]Клейн, Ф. *Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа")* / Ф. Клейн. // Об основаниях геометрии. – М., 1956. – С. 402-434.

[17]Blumenthal, L.M. Theory and Applications of Distance Geometry. Clarendon Press, Oxford, 1953.

[18]Кулаков, Ю.И. Теория физических структур / Ю.И. Кулаков. – М.: Доминико, 2004.

[19]Михайличенко, Г.Г. *Математические основы и результаты Теории физических структур: монография* / Г.Г. Михайличенко. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2016. – 297 с.

[20]Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. –М.: Наука, 1978.

[21]Гельмгольц, Г. *О фактах, лежащих в основании геометрии* // Об основаниях геометрии. – М., 1956. – С.366-388.

связь. Поэтому естественно было предположить, что и феноменологическая симметрия двумерной геометрии невозможна при произвольной метрической функции. Этот факт был установлен Г.Г. Михайличенко[22]. Заметим еще, что задачу определения всех двумерных геометрий, в которых положение фигуры задается тремя условиями, впервые четко сформулировал А. Пуанкаре в работе "Об основных гипотезах геометрии"[23].

В качестве примера приведем плоскость Евклида. Известно, что в ПДСК (x, y) квадрат расстояния $\rho(i, j)$ между двумя ее точками $i = (x_i, y_i)$ и $j = (x_j, y_j)$ задается метрической функцией

$$f(i,j) = \rho^2(i,j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2.$$

Возьмем четыре точки i, j, k, l и запишем шесть значений метрической функции: $f(i,j), f(i,k), f(i,l), f(j,k), f(j,l), f(k,l)$. Хорошо известно[24], что они функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(i,j) & f(i,k) & f(i,l) \\ 1 & f(i,j) & 0 & f(j,k) & f(j,l) \\ 1 & f(i,k) & f(j,k) & 0 & f(k,l) \\ 1 & f(i,l) & f(j,l) & f(k,l) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Геометрический смысл этой связи состоит в том, что трехмерный объем тетраэдра с вершинами, лежащими на двумерной плоскости, равен нулю. По терминологии Ю.И. Кулакова[25] она выражает феноменологическую симметрию ранга 4 плоскости Евклида.

Цель работы состоит в исследовании аналитическими методами проблем классификации, решения функциональных уравнений для нахождения полных групп движений и всех их невырожденных двухточечных инвариантов некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий, а также определения явных выражений групп движений некоторых феноменологически симметричных трехмерных геометрий.

Основные результаты диссертации:

1. Разработаны аналитические методы решения функциональных уравнений на множество всех движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмголь-

[22]см. 1. Михайличенко Г.Г. *Двумерные геометрии* // Докл. АН СССР. –1981. – Т.260, №4, С.803-805.; 2. Mikhaylitchenko, G.G. *Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques* // Comptes Rendus de L'Academie des Sciences. Paris, 16 novembre 1981. – T.293. Serie 1. – P.529- 531.

[23]Пуанкаре, А. *Об основных гипотезах геометрии* / А. Пуанкаре. // Об основаниях геометрии. - М., 1956. – С. 388-398.

[24]Берже, М. Геометрия: Пер. с франц. Т1. – М.: Мир, 1984. – 560 с.

[25]Кулаков, Ю.И. *Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур* / Ю.И. Кулаков. // Докл. АН СССР. – 1970. –Т.193, № 5. – С.985-987.

цевой, дуальногельмгольцевой и симплициальной плоскостей, устанавливающие полноту групп движений этих геометрий без дополнительного условия о совпадении функций, задающих движение в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j.

2. Установлена связь метрической функции и системы всех невырожденных двухточечных инвариантов групп движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и симплициальной плоскостей.

3. Найдены явные выражения групп движений симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой, гельмгольцевой и симплициальной III типа, симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий.

4. Разработан аналитический метод классификации, примененный к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, существенно использующий исследование строения и ранга соответствующей функциональной матрицы, а также возникающих из нее систем функционально-дифференциальных соотношений и дифференциальных уравнений.

Методы исследований. Результаты диссертации получены применением методов теории функциональных и дифференциальных уравнений, теории групп Ли преобразований, математического анализа.

Научная новизна. Результаты, полученные в главах 2–4 диссертации являются новыми и снабжены строгими доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Результаты диссертационного исследования носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами в области геометрии, теории функций и отображений, теории конечномерных непрерывных групп преобразований. Большая часть результатов связана с новой проблематикой и может служить основой для дальнейших исследований вопросов классификации других феноменологически симметричных геометрий (например, трехмерных триметрических ранга 3, трехмерных ранга 5, четырехмерных ранга 6 и т.д.), при определении полных групп движений и всех их невырожденных двухточечных инвариантов. Материалы диссертации могут быть использованы при организации спецкурсов по дополнительным вопросам математического анализа, дифференциальной геометрии, предназначенных для магистров и аспирантов высших учебных заведений.

Достоверность полученных в диссертации результатов обеспечивается использованием общепринятых в математике методов исследования, а также согласованностью с научными данными, представленными в работах других авторов этого направления.

Личный вклад автора. Основные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично под руководством д.ф.-м.н., профессора Г.Г. Михайличенко.

Апробация работы. Все результаты работы обсуждались на семинарах: по теории физических структур в Горно-Алтайском государственном университете (руководитель: д.ф.-м.н., профессор Г.Г. Михайличенко); кафедры математики, физики и информатики Горно-Алтайского государственного университета (руководитель: д.ф.-м.н., доцент А.В. Тетенов); кафедры теории функций Томского государственного университета (руководитель: д.ф.-м.н., профессор С.П. Гулько); кафедры геометрии Томского государственного университета (руководитель: д.ф.-м.н., доцент Н.Р. Щербаков); кафедры математического анализа Алтайского государственного университета (руководитель: д.ф.-м.н., профессор Е.Д. Родионов); лаборатории обратных задач математической физики Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (руководитель: д.ф.-м.н. Ю.Е. Аниконов); отдела анализа и геометрии Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (руководитель: академик РАН Ю.Г. Решетняк); отдела по геометрии, топологии и их приложениям Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (руководитель: академик РАН И.А. Тайманов).

Результаты диссертации были представлены на Международной конференции "Студент и научно-технический прогресс" (Математика. Новосибирск, 27 – 30 апреля 2008); Всероссийской научно-практической конференции "Математическое образование в регионах России" (Барнаул, 21 ноября 2008); Международной молодежной конференции "Современные методы в механике: Математика и ее применение в задачах механики"(Томск, 19 – 20 сентября 2012); Международной школе-семинаре "Ломоносовские чтения на Алтае": Анализ, геометрия и топология (Барнаул, 20 –23 ноября 2012 г); Международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования"(Барнаул, 11-14 ноября 2014, 20-24 октября 2015, 14-17 ноября 2017, 13-16 ноября 2018); Международной конференции "Дни геометрии в Новосибирске"(Новосибирск, 21-24 сентября 2016, 20-23 сентября 2017, 19-22 сентября 2018).

Методы решения функциональных уравнений, разработанные автором и представленные в диссертационном исследовании, использовались при выполнении работ по гранту РФФИ № 12-01-90806 – мол_рф_нр "Исследование построения классификации двуметрических двумерных геометрий" (01.07.2012 – 29.12.2012).

Публикации. По теме диссертации подготовлено и опубликовано 16 печатных и электронных изданий [1*] — [16*], из которых 7 статей — в научных журналах и изданиях, включенных в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций [1*] — [7*], из них 3 статьи представлены в изданиях, входящих в международные реферативные базы (Web of Science, SCOPUS) [4*] — [6*], 9 работ — в тезисах докладов и в материалах международных конференций [8*]—[16*]. Использованные в диссертации результаты, опубликованные с Г.Г. Михайличенко в совместных изданиях [5*], [12*]—[14*], с В.А. Кыровым в совместных изданиях [6*], [7*], [12*], [14*] — [16*], с Р.М. Мурадовым в совместном издании [12*] получены автором единолично.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из списка обозначений, Введения, четырех глав, Заключения и списка литературы. Диссертация разбита на главы, которые, в свою очередь, подразделяются на параграфы. Все теоремы имеют тройную нумерацию: первое число – номер главы, второе – номер параграфа, третье – номер утверждения в текущем параграфе. Список литературы содержит 76 наименований. Общий объем диссертации составляет 157 страниц.

Перейдем к краткому изложению содержания работы. Будем использовать номера аксиом, определений, формул, задач и теорем, введенные в основном тексте диссертационной работы.

Содержание диссертации.

Во Введении обосновывается актуальность темы исследования; изложены основные результаты диссертации; отражены данные об апробации. Также приведены сведения о публикации результатов диссертации.

Первая глава носит подготовительный характер и необходима для общего знакомства с феноменологической и групповой симметриями в геометрии. В ней по работам Г.Г. Михайличенко[26] даются точные формулировки исходных аксиом и определений, а также теорем о феноменологической и групповой симметриях в геометрии.

Во второй главе диссертации излагается суть аналитического метода решения функциональных уравнений для нахождения полных групп движений трех гельмгольцевых (плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей) и симплициальной двумерных геометрий, а также всех их невырожденных двухточечных инвариантов.

§§2.1, 2.2 являются вводными для §§ 2.3–2.5 второй главы. В классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий, построенной Г.Г. Михайличенко присутствуют три гельмгольцевые и симплициальная дву-

[26]см. 1. Михайличенко, Г.Г. *О групповой и феноменологической симметриях в геометрии* / Г.Г. Михайличенко. // Докл. АН СССР. – 1983. – Т.269, № 2. – С. 284 – 288.; 2. Михайличенко, Г.Г. *О групповой и феноменологической симметриях в геометрии* / Г.Г. Михайличенко. // Сиб. матем. журнал. – 1984. – XXV, № 5. – С. 99 – 113.; 3. Michailichenko, G.G. *On group and phenomenological simmetries in geometry* / G.G. Michailichenko // Soviet Math. Dokl. – 1983. – V.27, № 2. – P. 325-326.

мерные геометрии, задаваемые метрическими (двухточечными) функциями

$$f(i,j) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp\left(2\gamma \mathrm{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{2.14}$$

$$f(i,j) = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp\left(2\beta \mathrm{Ar(c)th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{2.12}$$

$$f(i,j) = (x_i - x_j)^2 \exp\left(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{2.13}$$

$$f(i,j) = (x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n, \tag{2.60}$$

где $\gamma > 0$; $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$ – параметры семейства; $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq n$. Двумерная геометрия с метрической функцией (2.14) была названа плоскостью Гельмгольца, так как окружностью в ней является логарифмическая спираль, о чем кратко упоминает Гельмгольц в своей работе[27]. Метрические функции (2.12) и (2.13) задают псевдогельмгольцеву и дуально-гельмгольцеву плоскости, а метрическая функция (2.60) – симплициальную плоскость, причем условием $m \neq n$ исключается плоскость Минковского.

Основной результат второй главы представлен в §§ 2.3 –2.6.

В §§ 2.3 –2.5 представлены разработанные автором аналитические методы решения соответствующих функциональных уравнений на множество всех движений

$$x' = \lambda(x,y), \quad y' = \sigma(x,y) \tag{2.18}$$

для плоскости Гельмгольца [1*]:

$$((\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2) \exp\left(2\gamma \,\mathrm{arctg}\, \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)}\right) =$$

$$= ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp\left(2\gamma \,\mathrm{arctg}\, \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{2.20}$$

где $\gamma > 0$ и, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$;
для псевдогельмгольцевой плоскости [1*]:

$$((\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2) \exp\left(2\beta Ar(c)th \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)}\right) =$$

$$= ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp\left(2\beta Ar(c)th \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \tag{2.37}$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$;

[27]Гельмгольц, Г. *О фактах, лежащих в основании геометрии* // Об основаниях геометрии. – М., 1956. – С.366-388.

для дуальногельмгольцевой плоскости [1*]:

$$(\lambda(i)-\lambda(j))^2\exp\left(2\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{\lambda(i)-\lambda(j)}\right)=(x_i-x_j)^2\exp\left(2\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}\right); \qquad (2.49)$$

для симплициальной плоскости[3*]:

$$(\lambda(i)-\lambda(j))^m(\sigma(i)-\sigma(j))^n=(x_i-x_j)^m(y_i-y_j)^n, \qquad (2.61)$$

где $m,n\in\mathbb{Z}, m\neq 0, n\neq 0, m\neq n$.

Суть аналитических методов решения подобного вида функциональных уравнений состоит в их последовательном дифференцировании по координатам входящих точек и получении систем алгебраических уравнений относительно некоторых выражений, а также в установлении связей между параметрами группы. Установлено, что функции λ, σ, описывающие множество движений, для каждой из двумерных геометрий (плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и симплициальной плоскостей) в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j имеют один и тот же вид. Проведенные доказательства, в которых отсутствуют всякие дополнительные условия, позволяют утверждать, что найденные группы движений полны.

Основные результаты **§ 2.6** состоят в установлении полноты множества двухточечных инвариантов групп движений для трех гельмгольцевых и симплициальной двумерных геометрий, представленные в следующих теоремах:

Теорема 2.6.1. ([4*]). *Каждый невырожденный двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметричекой группы преобразований многообразия* $\mathfrak{M}_2\subset R^2$

$$x'=ax-by+c,\quad y'=bx+ay+d, \qquad (2.73)$$

где $(a^2+b^2)\exp\left(2\gamma\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}\right)=1$, γ *– положительная константа (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования* $\psi(f)\to f$ *с метрической функцией* (2.14) *плоскости Гельмгольца, задающей на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга* 4.

Теорема 2.6.2. ([4*]). *Каждый невырожденный двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований многообразия* $\mathfrak{M}_2\subset R^2$

$$x'=ax+by+c,\quad y'=bx+ay+d, \qquad (2.80)$$

где $(a^2-b^2)\exp\left(2\beta Ar(c)th\dfrac{b}{a}\right)=1$, β *– положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого* *преобразования $\psi(f) \to f$ с метрической функцией (2.12) псевдогельмгольцевой плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.*

Теорема 2.6.3. ([4*]). *Каждый невырожденный двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$*

$$x' = ax + c, \quad y' = bx + ay + d, \tag{2.86}$$

где $a^2 \exp(2b/a) = 1$, совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \to f$ с метрической функцией (2.13) дуальногельмгольцевой плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

Теорема 2.6.4. ([4*]). *Каждый невырожденный двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$*

$$x' = ax + c, \quad y' = by + d, \tag{2.92}$$

где $a^m b^n = 1$ ($m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq n$), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \to f$ с метрической функцией (2.60) симплициальной плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

Третья глава диссертации посвящена нахождению явных выражений локальных групп движений для симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой, гельмгольцевой и симплициальной III типа, симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой геометрий, являющихся геометриями локальной максимальной подвижности, задаваемыми на многообразии $\mathfrak{M}_3$ соответственно следующими метрическими (двухточечными) функциями:

$$f(i,j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \exp(w_i + w_j); \tag{3.13}$$

$$f(i,j) = \frac{(y_i - y_j)^\beta}{x_i - x_j} \exp(w_i + w_j), \tag{3.21}$$

где $\beta = (\delta - 1)/(\delta + 1)$, причем $-1 < \beta < 1$ и $\beta \neq 0$;

$$\tilde{f}(i,j) = \frac{(\overline{z_i} - \overline{z_j})^\alpha}{(z_i - z_j)} \exp(u_i + u_j), \tag{3.22}$$

где $\tilde{f} = f^{\frac{1}{i\gamma - 1}}, \ w = u(i\gamma - 1), \ \alpha = \dfrac{\gamma - i}{\gamma + i}, \ z = x + iy, \ i^2 = -1;$

$$\tilde{f}(i,j) = \frac{\overline{z_i} - \overline{z_j}}{z_i - z_j} \exp(u_i + u_j), \tag{3.23}$$

где $\tilde{f} = e^{-2if},\ -2iw = u,\ z = x + iy,\ i^2 = -1;$

$$\tilde{f}(i,j) = \frac{\overline{z_i} - \overline{z_j}}{z_i - z_j} + v_i + v_j, \tag{3.24}$$

где $\tilde{f} = 1 - 2\varepsilon f,\ -2\varepsilon w = v,\ z = x + \varepsilon y,\ \varepsilon^2 = 0;$

$$\tilde{f}(i,j) = \frac{\overline{z_i} - \overline{z_j}}{z_i - z_j} - 2\varepsilon \ln\left[\overline{(z_i - z_j)}(z_i - z_j)\right] + v_i + v_j, \tag{3.25}$$

где $\tilde{f} = 1 - 2\varepsilon \ln f,\ -2\varepsilon w = v,\ z = x + \varepsilon y,\ \varepsilon^2 = 0.$

Явный вид шести базисных операторов алгебр Ли групп движений соответственно имеет следующий вид:

для симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой геометрий:

$$\partial_x,\ \partial_y,\ 2x\partial_x + \partial_w,\ -2y\partial_y + \partial_w, x^2\partial_x + x\partial_w,\ -y^2\partial_y + y\partial_w, \tag{3.31}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ 2x\partial_x + \partial_w,\ -2y\partial_y + \beta\partial_w,\ x^2\partial_x + x\partial_w,\ -y^2\partial_y + \beta y\partial_w, \tag{3.35}$$

где $-1 < \beta < 1$ и $\beta \neq 0$;

для гельмгольцевой и симплициальной III типа геометрий:

$$\partial_z,\ \partial_{\overline{z}},\ 2z\partial_z + \partial_u,\ -2\overline{z}\partial_{\overline{z}} + \alpha\partial_u,\ z^2\partial_z + z\partial_u,\ -\overline{z}^2\partial_{\overline{z}} + \alpha\overline{z}\partial_u, \tag{3.36}$$

где $\gamma > 0, -iw = u(\gamma + i), \alpha = (\gamma - i)/(\gamma + i),$

$$\partial_z,\ \partial_{\overline{z}},\ 2z\partial_z + \partial_u,\ -2\overline{z}\partial_{\overline{z}} + \partial_u,\ z^2\partial_z + z\partial_u,\ -\overline{z}^2\partial_{\overline{z}} + \overline{z}\partial_u, \tag{3.37}$$

где $iw = 2u$;

для симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой геометрий:

$$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x + y\partial_y,\ -2x\partial_y + \partial_w, -x^2\partial_y + x\partial_w,\ -x^2\partial_x - 2xy\partial_y + y\partial_w, \tag{3.30}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x + y\partial_y - \partial_w,\ -2x\partial_y + \partial_w,\ -x^2\partial_y + x\partial_w,\ -x^2\partial_x - 2xy\partial_y + (y + 2x)\partial_w. \tag{3.32}$$

Основные результаты этой главы представлены в §§3.3—3.5 (теоремы 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1), опубликованные автором в работах [6*], [7*], [12*]—[16*].

Теорема 3.3.1. ([6*]). *Группы движений симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой трехмерных геометрий с функциями* (3.13) *и* (3.21) *являются результатом действий группы* $SL_2(R) \otimes SL_2(R)$ *в пространстве* R^3, *имея соответственно следующий вид:*

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}, \quad y' = \frac{a_2 y + b_2}{c_2 y + d_2}, \quad w' = w + \ln\frac{c_2 y + d_2}{c_1 x + d_1}, \tag{3.40}$$

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}, \quad y' = \frac{a_2 y + b_2}{c_2 y + d_2}, \quad w' = w + \beta\ln(c_2 y + d_2) - \ln(c_1 x + d_1), \tag{3.41}$$

где $a_1d_1 - b_1c_1 = a_2d_2 - b_2c_2 = 1$, $a_1, d_1, b_1, c_1, a_2, d_2, b_2, c_2 - const \in R$, $-1 < \beta < 1$ *и* $\beta \neq 0$.

Теорема 3.4.1. ([6*, 7*]). *Группы движений гельмгольцевой и симплициальной III типа трехмерных геометрий с функциями* (3.22) *и* (3.23) *являются результатом действия группы Ли* $SL_2(C)$ *в пространстве* R^3, *имея соответственно следующий вид:*
для гельмгольцевой трехмерной геометрии

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},\ u' = u + \alpha \ln \overline{(cz+d)} - \ln(cz+d), \tag{3.53}$$

где $u = w/(i\gamma - 1)$, $\alpha = \dfrac{\gamma - i}{\gamma + i}$,
для симплициальной трехмерной геометрии III типа

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},\ u' = u + \ln \frac{\overline{cz+d}}{cz+d}, \tag{3.54}$$

где $u = -2iw$, *причем* $ad - bc = 1$, $a, b, c, d = const \in C$, $z = x + iy \in C$, $i^2 = -1$.

Теорема 3.5.1. ([6*]). *Группы движений симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий с функциями* (3.24) *и* (3.25) *являются результатом действия группы Ли* $SL_2(D)$ *в пространстве* R^3, *имея соответственно следующий вид:*
для симплициальной трехмерной геометрии I типа

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},\ v' = v - 1 + \frac{\overline{(cz+d)}}{(cz+d)}, \tag{3.63}$$

для дуальногельмгольцевой трехмерной геометрии

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},\ v' = v - 1 + \frac{\overline{(cz+d)}}{(cz+d)} - 2\varepsilon \ln \overline{(cz+d)}(cz+d), \tag{3.64}$$

где $ad - bc = 1$, $a, b, c, d = const \in D$, $z = x + \varepsilon y$, $v = -2\varepsilon w$, $\varepsilon^2 = 0$.

В доказательствах теорем 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1 с помощью экспоненциального отображения сначала были найдены однопараметрические подгруппы, соответствующие шести базисным операторам алгебр Ли групп движений (3.31) и (3.35), (3.36) и (3.37), (3.30) и (3.32) для симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой, гельмгольцевой и симплициальной III типа, симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий, а затем их композицией были найдены явные выражения групп движений (3.40) и (3.41), (3.53) и (3.54), (3.63) и (3.64).

Четвертая глава диссертации посвящена разработке аналитического метода классификации феноменологически симметричных геометрий (существенно использующего исследование строения и ранга соответствующей функциональной матрицы, а также следующих из неё систем функционально-дифференциальных соотношений и дифференциальных уравнений) и его применению к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий. Для каждой из них найдены группы движений решением соответствующих систем функциональных уравнений на множество движений, и все невырожденные двухточечные инварианты этих групп.

Краткое изложение содержания §§ 4.1–4.5.

§ 4.1. Пусть имеется гладкое двумерное многообразие $\mathfrak{M}_2$, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \to R^2$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i, j\rangle \in \mathfrak{S}_f$ два вещественных числа $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j)) \in R^2$. Двухкомпонентную двухточечную функцию f будем называть *метрической вектор-функцией*, не требуя, однако, от ее компонет выполнения аксиом обычной (см., например, Колмогорова А.Н.[28]) метрики, а геометрию, задаваемую ею на многообразии $\mathfrak{M}_2$, — *двуметрической двумерной геометрией*. Окрестность точки $i \in \mathfrak{M}_2$ будем обозначать через $U(i)$, окрестность пары $\langle i, j\rangle \in \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ через $U(\langle i, j\rangle)$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множества $\mathfrak{M}_2$ на себя.

Если x, y –локальные координаты гладкого двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, то для вектор-функции $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$ можно записать ее локальное координатное представление:

$$f(i,j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j) = (f^1(x_i, y_i, x_j, y_j), f^2(x_i, y_i, x_j, y_j)), \qquad (4.1)$$

где x_i, y_i и x_j, y_j – локальные координаты точек i и j пары $\langle i, j\rangle \in \mathfrak{S}_f$.

В отношении вектор-функции f будем предполагать выполнение следующих аксиом:

Аксиома 4.1.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ вектор-функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ множество.

Аксиома 4.1.2. Вектор-функция f в области своего определения имеет класс гладкости не менее второго.

Аксиома 4.1.3. Для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ множества пар $\langle i, j\rangle$ локальное координатное представление (4.1) вектор-функции $f(i,j)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\frac{\partial(f^1(i,j), f^2(i,j))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(i,j), f^2(i,j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0. \qquad (4.2)$$

[28]А.Н. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функциональный анализ / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1968.

На основе метрической функции f строится отображение F, сопоставляющее тройке $\langle i,j,k\rangle$ из $\mathfrak{M}_2^3$ точку $z=(f^1(i,j),f^2(i,j),f^1(i,k),f^2(i,k),f^1(j,k),$ $f^2(j,k))$, принадлежащую некоторому открытому подмножеству $E\subset\ R^6$, если пары $\langle i,j\rangle,\langle i,k\rangle,\langle j,k\rangle\in\mathfrak{S}_f$. То есть

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_2^3\supseteq\mathfrak{S}_F\ni\langle i,j,k\rangle\stackrel{F}{\longmapsto}(&f^1(i,j),f^2(i,j),f^1(i,k),\\&f^2(i,k),f^1(j,k),f^2(j,k))\in E\subset R^6,\end{aligned}\tag{4.3}$$

где $\mathfrak{S}_F$ – есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2^3$ множество, являющееся областью определения построенного отображения F.

Пусть, далее, имеется гладкая функция $\Phi:E\to\ R^2$, где $E\subset R^6$, которая сопоставляет точке $z\in E\subseteq R^6$ пару чисел $(\Phi_1(z),\Phi_2(z))\in\ R^2$.

Аксиома 4.1.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждой тройки $\langle i,j,k\rangle$ которого и некоторой ее окрестности $U(\langle i,j,k\rangle)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi:E\to R^2$, определенная в некоторой области $E\subset R^6$, содержащей точку $z=F(\langle i,j,k\rangle)$, что в ней ранг отображения Φ равен 2 и множество $F(U(\langle i,j,k\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f^1(i,j),f^2(i,j),f^1(i,k),f^2(i,k),f^1(j,k),f^2(j,k))=0,\tag{4.4}$$

где $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)$, для всех троек из $U(\langle i,j,k\rangle)$.

Функциональная матрица построенного выше отображения F (4.3) имеет вид

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial x_i} & 0 & 0\\
\frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial y_i} & 0 & 0\\
\frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial x_j}\\
\frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_j} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial y_j} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial y_j}\\
0 & 0 & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial x_k}\\
0 & 0 & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial y_k}
\end{pmatrix}\tag{4.6}$$

Основным результатом §4.1 являются лемма и теорема о ранге отображения F:

Лемма 4.1.1. ([2*]). *Если вектор-функция $f(i,j)=(f^1(i,j),f^2(i,j))$ удовлетворяет аксиомам* 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, *то ранг матрицы* (4.6) *не менее* 4.

Теорема 4.1.1. ([2*]). **1.** *Если ранг отображения F равен 4 на открытом и плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве, то метрическая вектор-функция $f(i,j)=(f^1(i,j),f^2(i,j))$, удовлетворяющая аксиомам* 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, *задает на гладком многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически* *симметричную двумерную геометрию ранга* 3 (*то есть удовлетворяет аксиоме* 4.1.4). **2.** *Система аксиом* 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 *и* 4.1.4 *совместна, то есть, возможно, существует модель соответствующей аксиоматической теории — набор вектор-функций* $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$, *для которых выполнены все четыре аксиомы.*

§ 4.2 посвящен исследованию строения и ранга функциональной матрицы отображения F, а также ранга следующих из нее систем функционально-дифференциальных соотношений вида

$$\left.\begin{aligned}
&A_2^1(i,k)A_0(j,k)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_i} - A_2^2(i,k)A_0(j,k)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_i}+\\
&+A_2^1(j,k)A_0(i,k)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_j} - A_2^2(j,k)A_0(i,k)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_j} = 0,\\
&A_1^1(i,k)A_0(j,k)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_i} - A_1^2(i,k)A_0(j,k)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_i}+\\
&+A_1^1(j,k)A_0(i,k)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_j} - A_1^2(j,k)A_0(i,k)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_j} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

где $\alpha = 1, 2$, и систем дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{gathered}
\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_j} = 0,\\
\lambda(i)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_i} + \sigma(i)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_i} + \lambda(j)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_j} + \sigma(j)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_j} = 0,\\
\lambda_x(i)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_i} + \sigma_x(i)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_i} + \lambda_x(j)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_j} + \sigma_x(j)\frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_j} = 0.
\end{gathered}\right\} \tag{4.20}$$

В частности, доказаны:

Лемма 4.2.1. ([2*]). *Ранг системы функционально-дифференциальных соотношений* (4.10) *равен* 2.

Лемма 4.2.2. ([2*]). *Ранг касательного отображения для отображения* (4.1) *остается максимальным* (*то есть равным* 2) *только тогда, когда ранг матрицы системы уравнений* (4.20) *не более двух.*

Применение аналитического метода классификации к двуметрическим феноменологически симметричным двумерным геометриям привело к трем решениям:

$$\textbf{1.}\ \ f^1(i,j) = x_i - x_j,\ \ f^2(i,j) = y_i - y_j, \tag{4.31}$$

$$\textbf{2.}\ \ f^1(i,j) = (x_i - x_j)y_i,\ \ f^2(i,j) = (x_i - x_j)y_j, \tag{4.32}$$

$$\textbf{3.}\ \ f^1(i,j) = x_i - x_j,\ \ f^2(i,j) = y_i\exp(-(x_i - x_j)) - y_j. \tag{4.33}$$

В § 4.3 при сопоставлении с классификацией двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, построенной

Г.Г. Михайличенко групповым методом, отличным от аналитического, установлена эквивалентность или неэквивалентность выражений (4.31), (4.32), (4.33) решением трех систем функциональных уравнений

$$\left.\begin{aligned}(\varphi(i)-\varphi(j))\tau(i)=\psi^1(x_i-x_j,y_i-y_j),\\(\varphi(i)-\varphi(j))\tau(j)=\psi^2(x_i-x_j,y_i-y_j),\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(\varphi(i)-\varphi(j))\tau(i)=\psi^1(\mathrm{x}_i{-}\mathrm{x}_j,\ y_ie^{-(x_i-x_j)}-y_j),\\(\varphi(i)-\varphi(j))\tau(j)=\psi^2(\mathrm{x}_i{-}\mathrm{x}_j,\ y_ie^{-(x_i-x_j)}-y_j),\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(i)-\varphi(j)=\psi^1(x_i-x_j,y_i-y_j),\\&\tau(i)e^{-(\varphi(i)-\varphi(j))}-\tau(j)=\psi^2(x_i-x_j,y_i-y_j)\end{aligned}\right\}$$

относительно функций φ,τ и ψ для трех возможных пар соответственно: 1) **1** и **2**, 2) **2** и **3**, 3) **1** и **3**. Функции (4.31) и (4.32) не эквивалентны, а функции (4.32) и (4.33) эквивалентны с точностью до обратимых замены координат $(\varphi(x,y),\ \ \tau(x,y)) = (ye^{-x},e^x) \to (x,y)$ и масштабного преобразования $(\psi^1(f^1,f^2),\psi^2(f^1,f^2)) = (f^2\exp f^1,f^2) \to (f^1,f^2)$, в которых $f^1 = \mathrm{x}_i{-}\mathrm{x}_j$, $f^2 = y_ie^{-(x_i-x_j)}-y_j$. Из этих двух результатов естественно следует третий, что метрические функции (4.31) и (4.33) не эквивалентны.

Таким образом, решение задачи об эквивалентности или неэквивалентности выражений (4.31), (4.32), (4.33) подтверждает полноту классификационной теоремы Г.Г. Михайличенко для двуметрических феноменологически симметричных геометрий.

В § 4.4 для найденных в § 4.2 метрических функций решаются задачи определения полных групп движений и всех их невырожденных двухточечных инвариантов. Установлено, что группы движений геометрий, задаваемых эквивалентными метрическими функциями (4.32) и (4.33), подобны.

В Заключении кратко перечислены основные результаты настоящей работы и указаны перспективы будущих исследований в данном направлении.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Г.Г. Михайличенко за постановку задач, научное руководство и помощь в работе; искренне благодарит д.ф.-м.н., член-корреспондента РАН А.И. Панина за постановку задачи, связанной с исследованием строения групп движений третьей главы; выражает глубокую признательность д.ф.-м.н., зав. кафедрой теории функции ТГУ, профессору С.П. Гулько и всем участникам научного семинара кафедры за активное обсуждение результатов настоящей работы; глубоко и искренне признателен к.ф.-м.н., доценту М.С. Бухтяку за внимание и полезные обсуждения результатов исследования; искренне благодарит к.ф.-м.н., доцента В.А. Кырова за ценные замечания и постоянную поддержку.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1*] Богданова, Р.А. *Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения* / Р.А. Богданова. // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2009. — Т.12, № 4. — С. 12 – 22.

[2*] Богданова, Р.А. *Классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга* 3 / Р.А. Богданова. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2014. — № 1(27). — С. 11 – 24.

[3*] Богданова, Р.А. *Группа движений симплициальной плоскости как решение функционального уравнения* / Р.А. Богданова. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2014. — № 4(30). — С. 5 – 13.

[4*] Богданова, Р.А. *Двухточечные инварианты групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий* / Р.А. Богданова. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2016. — № 1(39). — С. 5 – 12. DOI: https://doi.org/10.17223/19988621/39/1.

[5*] Богданова, Р.А., Михайличенко, Г.Г. *Вывод уравнения феноменологической симметрии для некоторых трехмерных геометрий* / Р.А. Богданова, Г.Г. Михайличенко // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2018. — № 9. — С. 11 – 20.

[6*] Кыров, В.А, Богданова, Р.А. *Группы движений некоторых трехмерных геометрий максимальной подвижности* / В.А. Кыров, Р.А. Богданова // Сибирский математический журнал. — 2018. — Т.59, № 2 (348). — С. 412—421. DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.215

[7*] Богданова, Р.А., Кыров, В.А. *Группы движений собственно гельмгольцевой трехмерной геометрии и симплициальной трехмерной геометри III типа* / Р.А. Богданова, В.А. Кыров // Известия Алтайского государственного университета. — 2019. – № 4(108). – С. 72—75. DOI: https://doi.org/10.14258/izvasu(2019)4-10

[8*] Богданова, Р.А. *Группа движений плоскости Гельмгольца* / Р.А. Богданова. // Вестник Барнаульского государственного педагогического университета. — 2008. — № 8 – 3. — С. 10.

[9*] Богданова, Р.А. *Группы движений симплициальной плоскости как решение функционального уравнения* / Р.А. Богданова. // Материалы XLVI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. — 2008. — С. 31 – 32.

[10*] Богданова, Р.А. *Двуметрические феноменологически симметричные двумерные геометрии ранга* 3 / Р.А. Богданова. // Современные методы механики: материалы Международной конференции (Томск, 19 – 20 сентября 2012). – Томск: Изд-во Том. ун-та. — 2012. — С. 5 – 6.

[11*] Богданова, Р.А. *Исследование ранга отображения двухкомпонентной метрической функции* / Р.А. Богданова. // Сборник научных статей международной школы-семинара: "Ломоносовские чтения на Алтае". Барнаул, 20 – 23 ноября, 2012: в 4 частях. — Барнаул: АлтГПА. — 2012. —Ч.I. — С. 260 – 264.

[12*] Богданова, Р.А., Кыров, В.А., Михайличенко, Г.Г., Мурадов, Р.М., *Феноменологическая и групповая симметрии некоторых трехмерных геометрий* / Р.А. Богданова, В.А. Кыров, Г.Г. Михайличенко, Р.М. Мурадов // Сборник научных статей международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования". Барнаул, 20 – 24 октября, 2015. — Барнаул: Изд-во Алт. ун-та. — 2015. — С. 466 – 470.

[13*] Богданова, Р.А., Михайличенко, Г.Г., *Вывод уравнения феноменологической симметрии для некоторых трехмерных геометрий* / Р.А. Богданова, Г.Г. Михайличенко // Дни геометрии в Новосибирске — 2016: Тезисы Международной конференции. — Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН. — 2016. — С. 37–38.

[14*] Богданова, Р.А., Кыров, В.А., Михайличенко, Г.Г., *Группы движений некоторых феноменологически симметричных трехмерных геометрий* / Р.А. Богданова, В.А. Кыров, Г.Г. Михайличенко, // Дни геометрии в Новосибирске — 2017: Тезисы Международной конференции. — Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН. — 2017. — С. 28 – 29.

[15*] Богданова, Р.А., Кыров, В.А., *Группы движений гельмгольцевых трехмерных геометрий* / Р.А. Богданова, В.А. Кыров // Сборник научных статей международной конференции: "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования". Ответственный редактор Е.Д. Родионов. — Барнаул: Алт. гос. ун-т. — 2017. — С. 230 – 233.

[16*] Богданова, Р.А., Кыров, В.А., *Группы движений симплициальных трехмерных геометрий максимальной подвижности* / Р.А. Богданова, В.А. Кыров // Сборник научных статей международной конференции: "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования". Ответственный редактор Е.Д. Родионов. — Барнаул: Алт. гос. ун-т. — 2018. — С. 268 – 272.

БОГДАНОВА РАДА АЛЕКСАНДРОВНА

Аналитические методы исследования некоторых
феноменологически симметричных двумерных и трехмерных геометрий

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 27.12.2019 г. Формат 60*84 1/16.
Бумага для множительных аппаратов. Печать ризо.
Усл. печ. 1,0 л. Тираж 100 экз.
Заказ №

Отпечатано полиграфическим отделом
Горно-Алтайского госуниверситета.
649000 Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1.