На правах рукописи

Сотникова Евгения Вадимовна

МИНИМАЛЬНЫЕ НОСИТЕЛИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН).

Научный руководитель:

д-р физ.-мат. наук **Кротов Денис Станиславович**.

Официальные оппоненты:

Пономаренко Илья Николаевич, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук,

Шалагинов Леонид Викторович, канд. физ.-мат. наук, доцент Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Челябинский государственный университет».

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”.

Защита состоится 16 октября 2019 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте http://www.math.nsc.ru/.

Автореферат разослан 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 003.015.01, д-р физ.-мат. наук

Шамардин
Юрий Владиславович

Общая характеристика работы

В диссертационной работе выполнено исследование собственных функций с минимальным по мощности носителем в некоторых дистанционно регулярных графах, а также рассматривается вопрос вложения произвольного q-значного кода, исправляющего одну ошибку, в совершенный код, исправляющий одну ошибку, большей длины над тем же полем.

Актуальность темы исследования. Комбинаторика изучает структуру объектов, упорядоченных в соответствии с некоторыми правилами. При исследовании комбинаторных объектов естественным образом возникают задачи существования, перечисления и классификации таких объектов, а также задачи построения новых объектов заданного класса с теми же или новыми параметрами. Одним из подходов к решению таких задач является изучение соответствующих трейдов. Неформально говоря, трейды представляют собой некоторое множество, на которое могут отличаться два комбинаторных объекта из одного и того же класса. Пусть C и C' — произвольные комбинаторные конфигурации, имеющие одинаковые параметры (например, латинские квадраты, системы Штейнера, совершенные коды и др.). Тогда $C \setminus C'$ и $C' \setminus C$ будут трейдами, а пара $(C \setminus C', C' \setminus C)$ — битрейдом. В литературе также встречается альтернативная терминология, когда саму пару называют трейдом. Любопытно, что трейды часто можно определить независимым образом. Причём в таком случае трейды вовсе не обязательно будут вкладываться в конфигурации рассматриваемого класса. Более того, они могут существовать даже при тех параметрах, при которых эти конфигурации невозможны. Например, двоичные совершенные коды в графах Хэмминга существуют только тогда, когда длина n представима в виде $n = 2^m - 1$ для некоторого натурального числа m, в то время как 1-совершенный трейд существует при любом нечётном n. Таким образом, трейды можно рассматривать как некоторое обобщающее понятие и изучать как самостоятельный комбинаторный объект. С помощью трейдов можно строить новые конфигурации с необходимыми параматрами. Данный подход основывается на идее свитчинга, то есть на замене подмножества исходной конфигурации на некоторое другое подмножество таким образом, чтобы не нарушались свойства исходного объекта. Пусть (T_0, T_1) — битрейд, а T_0 — подмножество конфигурации C, называемое свитчинговой компонентой. Тогда $T_1 \cup C \setminus T_0$ будет конфигурацией с теми же параметрами. Свитчинговый метод позволяет получать нижние оценки на число исследуемых объектов. Если в некоторой конфигурации существует N попарно непересекающихся трейдов, то применяя свитчинг к каждому из трейдов независимым образом, можно получить 2^N других конфигураций с теми же параметрами. Таким образом, задача поиска битрейдов минимальной мощности напрямую связана с вопросами оценки числа объектов.[1]

Свитчинговый метод оказался очень мощным инструментом для построения новых объектов и исследования их различных свойств. В качестве яркого примера можно привести теорию кодирования. Пожалуй, одними из наиболее известных объектов теории кодирования являются совершенные коды, изначально возникшие в работах Голея[2] и Хэмминга.[3] Класс совершенных кодов, исправляющих одну ошибку, оказался весьма богатым на различные интересные свойства и подструктуры, что в итоге привело к появлению целого ряда крупных задач и большого количества результатов. В 1962 году Васильевым[4] с помощью свитчинга так называемых i-компонент были построены первые нелинейные совершенные коды (в исходной работе использовалась терминология дизъюнктивных нормальных форм). i-Компонента определяется следующим образом. Пусть C — совершенный двоичный код, а M — некоторое его подмножество. Заменим во всех векторах из M элемент в i-ой позиции на противоположный. Обозначим полученное множество $M' = M + e_i$. Множество M называется i-компонентой совершенного кода C', если $C' = (C \setminus M) \cup M'$ является совершенным кодом. i-Компонента называется минимальной, если она не может быть разбита на меньшие i-компоненты. За работой Васильева последовала целая серия статей с конструкциями новых нелинейных совершенных кодов: конструкция Моллара[5] (обобщающая конструкцию Васильева), конструкция Зиновьева, конструкция Хедена[6], кон-

[1]Кротов, Д. С. Трейды в комбинаторных конфигурациях / Д. С. Кротов // Материалы XII международного семинара “Дискретная математика и её приложения”, Москва, 20–25 июня. – 2016. – С. 84–96.

[2]Golay, M. J. E. Notes on digital coding / M. J. E. Golay // Proceedings of the I.R.E. — 1949. — Vol. 37. — P. 657.

[3]Hamming, R. W. Error detecting and error correcting codes / R. W. Hamming // The Bell System Technical Journal. – 1950. – Vol. 29, no. 2. – P. 147–160.

[4]Васильев, Ю. Л. О негрупповых плотно упакованных кодах / Ю. Л. Васильев // Проблемы кибернетики. – 1962. – Т. 8. – С. 337–339.

[5]Mollard, M. A generalized parity function and its use in the construction of perfect codes / M. Mollard // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. – 1986. – Vol. 7, no. 1. – P. 113–115.

[6]Heden, O. A new construction of group and nongroup perfect codes / O. Heden // Information and Control. – 1977. – Vol. 34, no. 4. – P. 314–323.

струкция Соловьёвой[7] (независимо найдена[8], а затем обобщена[9] Фелпсом), конструкция Кротова[10], обобщающая конструкцию Фелпса. Хеденом[11] было показано, что любой совершенный код неполного ранга может быть получен конструкцией Кротова. Однако из указанного результата не следует классификация всех таких кодов, поскольку компоненты, используемые в конструкции, сами по себе не классифицированы. Стоит отметить, что несмотря на то, что вокруг совершенных кодов на текущий момент построена глубокая математическая теория, ряд проблем до сих пор остаётся открытым. Например, не решена задача полной классификации q-значных совершенных кодов для q, являющегося степенью простого числа (кроме случая двоичных совершенных кодов длины 15[12]). Свитчинговые методы позволили получить богатые классы новых конструкций совершенных кодов, тем самым улучшая нижнюю оценку на число различных неэквивалентных кодов.

Но вернёмся к трейдам в контексте других комбинаторных конфигураций и обсудим их связь с ещё одним интересным объектом, *собственными функциями*, изучению которых и посвящена большая часть данной диссертации. Пусть $\{\theta_0, \ldots, \theta_t\}$ — это множество различных собственных значений матрицы смежности некоторого графа $G = (V, E)$. Функция $f : V \to \mathbb{R}$, не являющаяся всюду нулевой и удовлетворяющая соотношению

$$\theta f(u) = \sum_{v \sim u} f(v) \quad \forall u \in V,$$

называется *собственной функцией* графа G, отвечающей собственному значению θ. Носитель $\mathrm{supp}(f)$ функции f определяется как множество вершин, на которых функция принимает ненулевые значения. Оказывается, многие комбинаторные конфигурации (например, латинские квадраты и гиперкубы,

[7]Соловьёва, Ф. И. О двоичных негрупповых кодах / Ф. И. Соловьёва // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов. – 1981. – Т. 37. – С. 65–76.

[8]Phelps, K. T. A combinatorial construction of perfect codes / K. T. Phelps // SIAM J. Algebraic and Discrete Methods. – 1983. – Vol. 4, no. 3. – P. 398–403.

[9]Phelps, K. T. A general product construction for error-correcting codes / K. T. Phelps // SIAM J. Algebraic and Discrete Methods. – 1984. – Vol. 5, no. 2. – P. 224–228.

[10]Кротов, Д. С. Комбинированная конструкция совершенных двоичных кодов / Д. С. Кротов // Проблемы передачи информации. – 2000. – Т. 36, № 4. – С. 74–79.

[11]Heden, O. On the classification of perfect binary 1-error correcting codes / O. Heden // TRITA-MAT-2002-01, preprint, KTH, Stockholm. – 2002.

[12]Östergård, P. R. J. The perfect binary one-error-correcting codes of length 15: part I - classification / P. R. J. Östergård, O. Pottonen // IEEE Transactions on Information Theory. – 2009. – Vol. 55, no. 10. – P. 4657–4660.

комбинаторные дизайны и подпространственные дизайны, совершенные коды) могут быть выражены в терминах собственных функций некоторых графов, отвечающих одному из его собственных значений. Таким образом, симметрическую разность двух различных конфигураций можно также представить в виде собственной функции. Отсюда следует, что задача нахождения минимального по мощности битрейда напрямую связана с задачей поиска собственных функций графов с минимальным числом ненулевых значений. В качестве примера рассмотрим связь собственных функций с совершенными раскрасками (также известными как equitable partitions). Совершенной k-раскраской графа называется такая раскраска его вершин в k цветов, что количество вершин каждого цвета в окрестности любой из вершин зависит только от цвета исходной вершины. Рассмотрим произвольную совершенную раскраску в два цвета, черный и белый. Пусть любая чёрная (белая) вершина смежна с a (d) вершинами своего цвета и смежна с b (c) вершинами противоположного цвета. Тогда матрица параметров S совершенной раскраски записывается следующим образом: $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, а её собственными числами являются $\theta_0 = a + b = c + d$ и $\theta_1 = a - c$. Отметим, что понятие совершенной раскраски обобщает понятие совершенного кода, исправляющего одну ошибку, поскольку, например, двоичный совершенный код длины n можно представить в виде совершенной раскраски графа Хэмминга с параметрами $S = \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$, где чёрным вершинам соответствуют кодовые вершины. Пусть C — множество вершин чёрного цвета, определим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{c}{b+c} & x \in C; \\ -\frac{c}{b+c} & x \notin C. \end{cases}$$

Функция f является собственной функцией графа Хэмминга для собственного числа θ_1, принимающей разные значения только в точках разного цвета.

В контексте поиска собственных функций с минимальным носителем, пожалуй, одним из интереснейших классов графов для изучения является семейство дистанционно регулярных графов. В силу своей природы эти графы позволяют применять к ним целый ряд мощных методов из различных областей математики. Более того, для любого дистанционно регулярного графа из его набора параметров в явном виде можно получить нижнюю оценку на мощность носителя собственной функции. Эта оценка называется *границей весового распределения*, в некоторых случаях она достигается, а в некоторых нет. Оба варианта представляют интерес. Среди дистанционно регулярных графов особое место занимают семейства графов с растущим диаметром. Одним из таких семейств являются *графы билинейных форм*. Граф билинейных форм $\mathrm{Bil}_q(n,m)$— это дистанционно регулярный граф, множество вершин которого состоит из всех матриц порядка $n \times m$ с элементами из конечного поля $\mathbb{F}_q$. Две вершины считаются смежными, если ранг разности соответствующих матриц равен единице. Кроме того, с этими графами связаны так называемые ранговые коды, в которых вместо метрики Хэмминга используется ранговая метрика. В последнее время среди исследователей наблюдается повышенный интерес к ранговым кодам.[13,14,15] Это связано не только с их теоретической значимостью. Ранговые коды нашли своё применения в таких областях, как криптография, пространственно-временное кодирование, случайное сетевое кодирование. Вопрос нахождения новых конструкций ранговых кодов остаётся открытым, поэтому изучение различных подструктур в графах билинейных форм представляется весьма актуальным и интересным.

Степень разработанности темы исследования. Задача описания собственных функций с минимальным по мощности носителем рассматривалась разными авторами для многих семейств графов. Целый ряд работ посвящён изучению собственных функций *графов Хэмминга* $H(n,q)$. В работе Кротова[1] отмечается, что при $q = 2$ размер минимального носителя найти не сложно, но публикаций этого факта не известно, поэтому приводится ход доказательства и пример собственной функции с таким носителем. Из работы Потапова[16] следует нижняя оценка на носитель собственной функции в случае произвольного q, которая затем была улучшена Воробьёвым и Кротовым[17] с помощью полиномов Кравчука. В той же работе была пред-

[13]Augot, D. Rank metric and Gabidulin codes in characteristic zero / D. Augot, P. Loidreu, G. Robert // Proceedings ISIT. – 2013. – P. 509–513.

[14]de la Cruz, J. Algebraic structure of MRD codes / J. de la Cruz, M. Kiermaier, A. Wasserman, W. Willems // Advances in Mathematics of Communications. – 2016. – Vol. 10. – P. 499–510.

[15]Ravagnani, A. Rank-metric code and their duality theory / A. Ravagnani // Designs, Codes and Cryptography. – 2016. – Vol. 80. – P. 197–216.

[16]Potapov, V. N. On perfect 2-colorings of the q-ary n-cube / V. N. Potapov // Discrete Mathematics. – 2012. – Vol. 312, no. 6. – P. 1269–1272.

[17]Воробьёв, К. В. Оценки мощности минимального 1-совершенного битрейда в графе Хэмминга / К. В. Воробьёв, Д. С. Кротов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2014. – Т. 21, № 6. – С. 3–10.

ложена явная конструкция 1-совершенного трейда, имеющего на тот момент минимальную мощность. Позже Валюженичем[18] были характеризованы все собственные функции с минимальным носителем, отвечающие второму по максимальности собственному числу графа Хэмминга. В статье Валюженича и Воробьёва[19] рассматривалась уже более общая задача, состоящая в нахождении минимального носителя функции, принадлежащей прямой сумме собственных пространств, отвечающих последовательным собственным числам. Для большей части параметров авторами была найдена минимальная возможная мощность носителя таких функций, а также получена полная характеризация функций с минимальным носителем.

Задача о минимальных носителях собственных функций *графов Джонсона* рассматривалась Воробьёвым и соавторами[20]. В упомянутой работе получена асимптотическая нижняя оценка на мощность носителя произвольной собственной функции, а также приведена характеризация функций, достигающих этой границы. Горяиновым и соавторами[21] на основе найденного ими семейства новых максимальных клик в *графах Пэли* квадратичного порядка q^2, где q — степень нечётного простого числа, были построены собственные функции с носителем на границе весового распределения. Для *графов Дуба* Беспаловым[22] была получена характеризация всех собственных функций с минимальным носителем, соответствующих второму по максимальности собственному значению, а также для случая минимального собственного числа.

Интересен тот факт, что аналогичная задача для *графов Грассмана* была решена в более ранних работах, будучи сформулированной в другом контексте и терминологии. Вершинами графа Грассмана $J_q(N, m)$ являются все m-мерные подпространства векторного пространства $\mathbb{F}_q^N$. Две вершины U и V смежны, если размерность пересечения соответствующих подпространств

---

[18]Valyuzhenich, A. A. Minimum supports of eigenfunctions of Hamming graphs/ A. A. Valyuzhenich // Discrete Mathematics. – 2017. – Vol. 340, no. 5. – P. 1064–1068.

[19]Valyuzhenich, A. Minimum supports of functions on the Hamming graphs with spectral constraints / A. Valyuzhenich, K. Vorob'ev // Discrete Mathematics. – 2019. – Vol. 342, no. 5. – P. 1351–1360.

[20]Vorob'ev, K. Minimum supports of eigenfunctions of Johnson graphs / K. Vorob'ev, I. Mogilnykh, A. Valyuzhenich // Discrete Mathematics. – 2018. – Vol. 341, no. 8. – P. 2151–2158.

[21]Goryainov, S. On eigenfunctions and maximal cliques of Paley graphs of square order / S. Goryainov, V. V. Kabanov, L. Shalaginov, A. Valyuzhenich // Finite Fields and Their Applications. – 2018. – Vol. 52. – P. 361–369.

[22]Bespalov, E. A. On the minumum supports of some eigenfunctions in the Doob graphs / E. A. Bespalov // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2018. – Vol. 15. – P. 258–266.

равна $m-1$, иными словами $U \sim V \iff \dim(U \cap V) = m-1$. James,[23] рассматривая задачу о размере носителя некоторых представлений общей линейной группы над $\mathbb{F}_q$, приводит пример нуль-дизайна из $N_q(t,t+1,n)$ с носителем мощности $2(1+q)(1+q^2)\dots(1+q^t)$, а также выдвигает гипотезу, что это будут минимальные носители таких нуль-дизайнов. Cho подтверждает эту гипотезу,[24] а также приводит характеризацию[25] нуль-дизайнов с минимальным носителем в терминах максимальных изотропных пространств некоторой билинейной формы. В контексте терминологии собственных функций аналогичный результат приводится в работе Кротова и соавторов.[26]

Перейдём к вопросу вложения 1-кода в некоторый 1-совершенный код. Августиновичем и Кротовым[27] с помощью метода одновременного свитчинга непересекающихся i-компонент было показано, что любой двоичный код C длины m, содержащий нулевую вершину и исправляющий одну ошибку, вкладывается в некоторый совершенный код $P(C)$, исправляющий одну ошибку и имеющий длину $n = 2^m - 1$. Под вложением подразумевается, что зафиксировав последние $n-m$ координат в коде $P(C)$ нулевыми значениями, в первых m координатах мы получим в точности векторы кода C. Авторами также был сформулирован следующий вопрос: какое минимальное значение может принимать $n(m)$, чтобы любой 1-код длины m вкладывался в 1-совершенный код длины $n(m)$? Романов[28] показал, что q-значный код длины m с расстоянием 5 (при $q=3$ с расстоянием 3) может быть вложен в некоторый q-значный 1-совершенный код длины $n = \frac{q^m-1}{q-1}$. Кроме того, каждый двоичный код длины $m+k$ с расстоянием $3k+3$ может быть вложен в некоторый двоичный 1-совершенный код длины $n = 2^m - 1$. Тем же автором[29] было доказано, что

[23] James, G. D. Representations of general linear groups / G. D. James. – LMS Lecture Note Series 94, Cambridge University Press, 1984. – 147 p.

[24] Cho, S. On the support size of null designs of finite ranked posets / S. Cho // Combinatorica. – 1999. – Vol. 19, no. 4. – P. 589–595.

[25] Cho, S. Minimal null designs and a density theorem of posets / S. Cho // European Journal of Combinatorics. – 1998. – Vol. 19, no. 4. – P. 433–440.

[26] Krotov, D. S. To the theory of q-ary Steiner and other-type trades / D. S. Krotov, I. Yu. Mogilnykh, V. N. Potapov // Discrete Mathematics. – 2016. – Vol. 339, no. 3. – P. 1150–1157.

[27] Avgustinovich, S. V. Embedding in a perfect code / S. V. Avgustinovich, D. S. Krotov // Journal of Combinatorial Designs. – 2009. – Vol. 17, no. 5. – P. 419–423.

[28] Романов, А. М. О допустимых семействах компонент кода Хэмминга / А. М. Романов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 84–91.

[29] Романов, А. М. О вложении равновесных кодов в совершенные коды / А. М. Романов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2016. – Т. 23, № 4. – С. 26–34.

q-значный равновесный код веса 3 с минимальным расстоянием 4 и длины m вкладывается в некоторый q-значный 1-совершенный код длины $n = \frac{q^m-1}{q-1}$.

Цели и задачи исследования. Основной целью данного исследования является описание собственных функций с минимальным по мощности носителем для кубических дистанционно регулярных графов и семейства графов билинейных форм. При этом можно выделить следующие задачи:

– нахождение собственных функций, носитель которых реализует нижнюю оценку весового распределения;
– характеризация таких собственных функций;
– доказательство несуществования собственных функций, достигающих нижней оценки границы весового распределения
– в случае несуществования собственных функций, реализующих нижнюю границу весового распределения, нахождение улучшенных нижних оценок;

Ещё одной целью представленной работы является изучение вопроса вложения произвольного исправляющего одну ошибку кода над конечным полем в некоторый исправляющий одну ошибку совершенный код большей длины над тем же полем.

Научная новизна. Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми и снабжены подробными доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. В первой главе поиск минимального носителя происходит через составление запретов на подструктуры и проверку допустимых подструктур. Несмотря на то, что в первой главе рассматриваются спорадические графы, а не бесконечные семейства, задача нахождения минимальных носителей остаётся интересной, поскольку в случае каждого графа метод опирается на конкретные особенности рассматриваемого графа, что, возможно, позволит дальше обобщить некоторые из подходов на другие, более богатые, семейства графов.

Во второй главе при изучении собственных функций графов билинейных форм существенную роль играет тот факт, что данный граф является графом дельсартовых клик. Из ранее известных результатов следует, что в этом случае для минимального собственного числа ненулевые значения собственной функции, чей носитель достигает границы весового распределения, будут индуцировать некоторый двудольный граф. Следовательно, задача характеризации таких собственных функций сводится к задаче характеризации вложений некоторого двудольного графа в граф билинейных форм. В случае диаметра 2 такое вложение существует. В случае графов билинейных форм большего диаметра такого вложения нет. Доказательство этого утверждения опирается на тот факт, что граф билинейных форм вкладывается в граф Грассмана с некоторыми параметрами. При таком вложении дельсартовы клики первого графа вкладываются в дельсартовы клики второго графа, следовательно, собственные функции графа билинейных форм будут собственными функциями графа Грассмана.

Задача о вложении произвольного 1-кода над конечным полем $\mathbb{F}_q$ в 1-совершенный код большей длины, рассматриваемая в третьей главе, является обобщением задачи о вложении двоичного 1-кода в двоичный 1-совершенный код. Показывается, что прямое обобщение свитчингового метода, предложенного в исходной статье, не работает, поскольку свитчинговые компоненты при $q > 3$ уже могут пересекаться, поэтому накладывается дополнительное условие.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач в работе использовались методы алгебраической теории графов (в частности спектральной теории графов), комбинаторные методы, элементы теории конечных полей, методы линейной алгебры, элементы теории квадратичных форм, элементы теории конечных геометрий, свитчинговые методы теории кодирования. Для компьютерных вычислений использовалась среда разработки Matlab.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационной работы:

В главе 1 для 10 кубических дистанционно регулярных графов для каждого из собственных значений найдены мощности минимальных носителей собственных функций, а также приведена характеризация собственных функций, реализующих минимальный носитель.

В главе 2 для минимального собственного значения θ_D графов билинейных форм $\mathrm{Bil}_q(n,m)$:

- Для графов диаметра $D = 2$ над простым конечным полем доказано, что существуют собственные функции с носителем, достигающим границы весового распределения. Кроме того, в явном виде приведена конструкция семейства собственных функций с минимальным носителем.

- Для графов билинейных форм диаметра не менее 3 над произвольным конечным полем доказано несуществование собственных функций, носитель которых достигал бы границы весового распределения.

В главе 3 доказано, что произвольный исправляющий одну ошибку код над конечным полем вкладывается в некоторый исправляющий одну ошибку совершенный код большей длины.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертационной работы прошли процедуру рецензирования и опубликованы в международных и российских журналах [1–3], а также были представлены на научных конференциях и научных школах: SP Coding and Information School, São Paulo, Brazil, 19–30 января, 2015; International Conference and PhD Summer School "Groups and Graphs, Algorithms and Automata", Екатеринбург, 9–15 августа, 2015; Десятая молодежная научная школа по дискретной математике и ее приложениям, Москва, 6–8 октября, 2015; First Russian-Japanese Workshop on Algebraic Combinatorics, Новосибирск, 29–30 августа, 2016 (в рамках International Conference and PhD Summer School "Graphs and Groups, Spectra and Symmetries"); Школа-конференция "Современные проблемы математики и её приложений СоПроМат-2017", Екатеринбург, 5–11 февраля, 2017; International Conference and PhD Summer School "Groups and Graphs, Representations and Relations", Новосибирск, 6–19 августа, 2018.

Результаты, представленные в диссертационной работе, неоднократно докладывались на семинарах "Теория кодирования", "Квазигруппы и смежные вопросы", "Дискретный анализ" Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Личный вклад. По теме диссертации автором опубликовано 6 работ, в том числе 3 статьи в журналах из списка ВАК [1–3] и 3 работы в трудах конференций [4–6]. Работа [1] написана в неразделимом соавторстве с научным руководителем соискателя, Д. С. Кротовым.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из 91 страницы, в которые входят введение, три главы, заключение и список литературы. В работе 25 рисунков, а список литературы содержит 116 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, проводится анализ степени разработанности данной области науки и обзор научной литературы. Формулируются цели и задачи работы, описывается ее научная новизна и теоретическая значимость. Приводятся методы исследования и основные положения, выносимые на защиту. Обосновывается достоверность результатов и описывается личный вклад автора. В конце кратко излагается содержание диссертационной работы.

В **первой главе** диссертационной работы рассматриваются кубические дистанционно регулярные графы. Известно, что таких графов всего 13. Для 10 из них задача нахождения минимальной мощности носителя собственной функции и характеризации всех таких функций полностью решена. В параграфе 1.1 вводятся основные определения, а также ставится задача исследования. Параграф 1.2 содержит несколько простых, но полезных в дальнейшем лемм и утверждений. В параграфе 1.3 рассматриваются двудольные графы. Параграф 1.4 посвящён конструкции двойного двудольного покрытия $\mathrm{BDC}(G)$ и связи между собственными функциями исходного графа G и собственными функциями графа $\mathrm{BDC}(G)$. В параграфе 1.5 приводятся необходимые сведения о границе весового распределения.

Основной метод, используемый в первой главе, излагается в параграфе 1.6 и состоит в следующем. Пусть зафиксированы граф G и его некоторое собственное число θ. Рассматривается подграф H исходного графа, индуцированный на вершинах носителя собственной функции f^θ, соответствующей θ. Тогда в спектре H есть число θ, а f^θ является его собственной функцией с максимальным носителем, состоящим из всех вершин. Пусть минимальный носитель имеет мощность k и состоит из t компонент связности, каждая из которых имеет мощность k_t. Тогда θ будет собственным значением и для каждой из компонент связности. Отсюда вытекает необходимое условие, на основе которого строится комбинаторный алгоритм поиска минимального носителя. Поскольку у кубических графов степень всего 3, данный метод применяется к ним напрямую. Однако с ростом числа вершин перебор всех вариантов вручную становится слишком трудоёмким, поэтому в рамках вычислительной среды MatLab был реализован алгоритм нахождения минимального носителя, соответствующего некоторой собственной функции (детали алгоритма изложены в параграфе 1.9). В параграфе 1.7 приводится список связных подграфов малого порядка, которые могут быть индуцированными подграфами в кубических дистанционно регулярных графах.

Параграф 1.8 посвящён изложению основных результатов главы. Рассматриваются 10 кубических дистанционно регулярных графов: полный граф K_4, полный двудольный граф $K_{3,3}$, граф куба, граф Петерсена, граф Хивуда, граф Паппа, граф додекаэдра, граф Дезарга, граф Коксетера, граф Тутте-Коксетера. Для указанных графов найдены и характеризованы собственные функции с минимальным носителем для всех собственных значений. Отметим, что различные свойства рассматриваемых графов (обхват, двудольность, значения параметров массива пересечений и др.) накладывают дополнительные ограничения, которые существенно сокращают комбинаторный перебор.

В заключительном параграфе 1.10 сформулированы основные результаты первой главы, приводится итоговая таблица с полученными результатами, а также обсуждаются открытые вопросы. В итоговой таблице ниже для всех собственных значений рассмотренных графов приведены мощности минимальных носителей. Жирным шрифтом выделены носители, на которых достигается граница весового распределения.

Граф	**Собственные числа**	**Миним. носитель**
K_4	$\{-1^{(3)},3^{(1)}\}$	$\{\mathbf{2},\mathbf{4}\}$
$K_{3,3}$	$\{0^{(4)},\pm 3^{(1)}\}$	$\{\mathbf{2},\mathbf{6}\}$
граф куба	$\{\pm 1^{(3)},\pm 3^{(1)}\}$	$\{\mathbf{4},\mathbf{8}\}$
граф Петерсена	$\{-2^{(4)},1^{(5)},3^{(1)}\}$	$\{6,\mathbf{4},\mathbf{10}\}$
граф Хивуда	$\{\pm\sqrt{2}^{(6)},\pm 3^{(1)}\}$	$\{\mathbf{6},\mathbf{14}\}$
граф Паппа	$\{0^{(4)},\pm\sqrt{3}^{(6)},\pm 3^{(1)}\}$	$\{\mathbf{6},8,\mathbf{18}\}$
граф додекаэдра	$\{-2^{(4)},0^{(4)},1^{(5)},\pm\sqrt{5}^{(3)},3^{(1)}\}$	$\{12,\mathbf{8},\mathbf{8},16,\mathbf{20}\}$
граф Дезарга	$\{\pm 1^{(5)},\pm 2^{(4)},\pm 3^{(1)}\}$	$\{\mathbf{8},12,\mathbf{20}\}$
граф Коксетера	$\{(-1\pm\sqrt{2})^{(6)},-1^{(7)},2^{(8)},3^{(1)}\}$	$\{16,12,14,\mathbf{28}\}$
граф Тутте-Коксетера	$\{0^{(10)},\pm 2^{(9)},\pm 3^{(1)}\}$	$\{\mathbf{6},14,\mathbf{30}\}$

На Рисунках 1,2 приведены примеры собственных функций с минимальным носителем, отвечающих собственному значению $\theta = -2$ графа Петерсена.

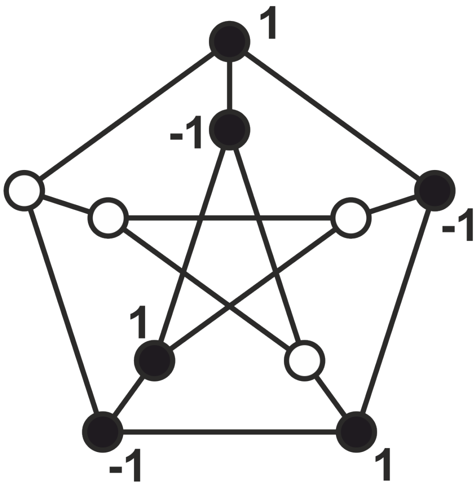

Рис. 1 — граф Петерсена,
$\theta = -2$, цикл C_6

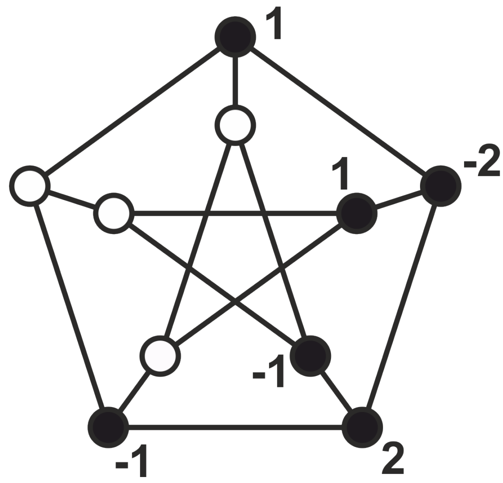

Рис. 2 — граф Петерсена,
$\theta = -2$, Н-граф

Во **второй главе** исследуется семейство графов билинейных форм и решается задача нахождения минимального носителя собственных функций для минимального собственного значения.

В параграфе 2.1 даны необходимые определения, вводятся понятия дельсартовых клик и графов дельсартовых клик, а также приведены известные результаты, с помощью которых в дальнейшем исследуются собственные функции графов билинейных форм. Кроме того, в параграфе вычисляется граница весового распределения для графа билинейных форм, соответствующая минимальному собственному значению, а также описывается локальная структура графа.

Параграф 2.2 посвящён собственным функциям с минимальным носителем в графах билинейных форм диаметра $D = 2$. Описываются дельсартовы клики графа билинейных форм, строится система уравнений над конечным полем, все решения которой дают характеризацию собственных функций с минимальным носителем. Далее приводится в явном виде конструкция, дающая семейство решений указанной системы уравнений, таким образом, доказывается существование функций с минимальным носителем, достигающим границы весового распределения. Как уже было отмечено, в случае $D = 2$ и минимального собственного значения θ_D рассматриваемая задача сводится к задаче вложения полного двудольного графа $K_{q+1,q+1}$ в граф билинейных форм. Одним из основных результатов второй главы является построение такого вложения в явном виде. Первый основной результат второй главы сформулирован в следующей теореме:

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{Bil}_p(2,2)$ *— граф билинейных форм над простым полем* $\mathbb{F}_p$ *и* a_1 *— порождающий элемент мультипликативной группы* $\mathbb{F}_p^*$. *Обозначим* $a_0 = 0$; $a_2 = a_1^2$; $\ldots$; $a_{p-2} = a_1^{p-2}$; $a_{p-1} = a_1^{p-1} = 1$ *и* $e_* = [0,1]$; $e_0 = [1,0]$; $\ldots$, $e_{p-1} = [1, a_{p-1}]$. *Для любого фиксированного* $\nu \in F_p$, *такого что* $\nu \neq -\xi^2$ *имеет место для всех* $\xi \in F_p$, *независимое множество*

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_*, \, b_0 \begin{bmatrix} 1 \\ a_0\nu \end{bmatrix} e_0, \, \ldots, \, b_{p-1} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{p-1}\nu \end{bmatrix} e_{p-1} \right\},$$

где $b_i = \frac{1}{a_i^2\nu+1}$, *совместно с множеством*

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_*; \; b_0 \begin{bmatrix} 1 \\ a_0\nu \end{bmatrix} e_0 + b_0 \begin{bmatrix} -a_0 \\ 1 \end{bmatrix} e_*; \; \ldots; \; b_{p-1} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{p-1}\nu \end{bmatrix} e_0 + b_{p-1} \begin{bmatrix} -a_{p-1} \\ 1 \end{bmatrix} e_* \right\}$$

образуют минимальный носитель собственной функции для θ_D *как две части полного двудольного подграфа* $K_{p+1,p+1}$.

За счёт сдвига и умножения на константу функций из Теоремы 1 можно построить новые собственные функции с минимальным носителем, однако, вопрос о полной их характеризации пока остаётся открытым.

В параграфе 2.3 рассматриваются графы билинейных форм диаметра $D \geq 3$. Основным результатом параграфа является доказательство несуществования собственных функций графов билинейных форм диаметра $D \geq 3$, носитель которых достигал бы границы весового распределения. Данный результат опирается на важную связь между графами билинейных форм и графами Грассмана. Ключевыми для доказательства является известная характеризация собственных функций с минимальным носителем в графах Грассмана, а также лемма о вложении дельсартовых клик, из которой следует, что собственные функции графа билинейных форм являются собственными функциями графа Грассмана:

Лемма 1. *Дельсартовы клики графа билинейных форм* $\mathrm{Bil}_q(n,m)$ *вкладываются в дельсартовы клики графа Грассмана* $J_q(n+m,m)$ *в том смысле, что для любых дельсартовых клик* C *и* $\widehat{C}$ *графа билинейных форм и графа Грассмана, соответственно, либо* $C \subset \widehat{C}$, *либо* $C \cap \widehat{C} = \emptyset$.

Вторым основным результатом рассматриваемой главы является:

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{Bil}_q(n,m)$ *— это граф билинейных форм диаметра* $D \geq 3$ *над произвольным конечным полем* $\mathbb{F}_q$*. Тогда минимальный носитель собственной функции, отвечающей минимальному собственному значению, не достигает границы весового распределения.*

Представляется интересным получить точную нижнюю оценку на мощность носителя в случае $D \geq 3$, а также исследовать собственные функции, соответствующие остальным собственным значениям.

Третья глава посвящена вопросу вложимости произвольного (в общем случае, нелинейного) q-значного 1-кода в некоторый 1-совершенный код большей длины. Под вложением в данном случае подразумевается вхождение в качестве подкода. Свитчинговый метод, предложенный для двоичных кодов, не обобщается на случай произвольного q, поскольку компоненты 1-совершенного кода, свитчингом которых получался требуемый подкод, могут пересекаться при $q > 3$. В третьей главе представлена модификация исходного метода, позволяющая избежать указанной проблемы.

В параграфе 3.1 вводятся необходимые определения и обозначения. Произвольное непустое подмножество $C \subset \mathbb{F}_q^m$ мы будем называть q-значным кодом длины m. Код $C \subset \mathbb{F}_q^m$ называется вложимым в код $P \subset \mathbb{F}_q^n$, если C может быть получен из P некоторой перестановкой координат и последовательным укорочением. Окрестностью $\Omega(M)$ множества $M \subseteq \mathbb{F}_q^n$ называется множество векторов, находящихся от M на расстоянии Хэмминга, не превосходящим 1. Код $C \subset \mathbb{F}_q^m$ называется 1-*кодом*, если окрестности кодовых слов не пересекаются. Если для некоторого 1-кода P выполняется $\Omega(P) = \mathbb{F}_q^n$, такой код называется 1-*совершенным*.

Параграф 3.2 содержит основные результаты третьей главы, включая технические леммы, необходимые для доказательства основного утверждения, и иллюстрирующий пример. Кроме того, в параграфе обсуждается, почему прямое обобщение метода для двоичных кодов не работает в случае q-значных кодов. Основным результатом третьей главы является следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть* $C \subset \mathbb{F}_q^{m-1}$ *является 1-кодом. Тогда существует* 1-*совершенный код* $P(C) \subset \mathbb{F}_q^n$*, построенный из кода Хэмминга с помощью свитчингового метода, такой что* $C = \{x \in \mathbb{F}_q^{m-1} \mid (1, x, 0^{n-m}) \in P(C)\}$.

Вопрос о минимальной длине объемлющего совершенного кода остаётся открытым.

В **заключении** диссертации приводятся итоги исследования, также формулируются основные результаты в соответствии с главами диссертационной работы.

Благодарности. Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю Кротову Денису Станиславовичу за постановку интересных задач и постоянную поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Krotov, D. S.* Embedding in q-ary 1-perfect codes and partitions / D. S. Krotov, E. V. Sotnikova // *Discrete Mathematics.* — 2015. — Vol. 338, no. 11. — P. 1856–1859.

2. *Sotnikova, E. V.* Eigenfunctions supports of minimum cardinality in cubical distance-regular graphs / E. V. Sotnikova // *Siberian Electronic Mathematical Reports.* — 2018. — Vol. 15. — P. 223–245.

3. *Sotnikova, E. V.* Minimum supports of eigenfunctions in bilinear forms graphs / E. V. Sotnikova // *Siberian Electronic Mathematical Reports.* — 2019. — Vol. 16. — P. 501–515.

4. *Сотникова, Е. В.* Собственные функции с минимальным носителем дистанционно регулярных графов степени $k = 3$ / Е. В. Сотникова // *Материалы X молодежной школы по дискретной математике и ее приложениям, Москва, 6–8 октября.* — 2015. — С. 65–68.

5. *Sotnikova, E. V.* The eigenfunctions with the minimum support of the cubic distance-regular graphs / E. V. Sotnikova // *Abstracts of the International Conference and PhD Summer School Groups and Graphs, Algorithms and Automata, Yekaterinburg, Russia, August, 9–15.* — 2015. — P. 89–89.

6. *Sotnikova, E. V.* Minimum supports of eigenfunctions in bilinear forms graphs / E. V. Sotnikova // *Abstracts of the International Conference and PhD Summer School Graphs and Groups, Representations and Relations, Novosibirsk, Russia, August, 6–19.* — 2018. — P. 81–81.