На правах рукописи

Жуков Антон Владимирович

О СВОДИМОСТЯХ РАЗМЕЧЕННЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ И ЛЕСОВ

Специальность 01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Селиванов Виктор Львович.

Официальные оппоненты:
Одинцов Сергей Павлович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук», ведущий научный сотрудник.
Пинус Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Новосибирский государственный технический университет», профессор кафедры алгебры и математической логики.

Ведущая организация:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет».

Защита состоится «23» ноября 2018 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук» по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук» по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

Автореферат разослан «____» ________ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А. И. Стукачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Термин «частично упорядоченное множество» в тексте диссертации сокращается до «чум» и для удобства склоняется по падежам. Чумы являются широко распространенными математическими объектами и встречаются (часто в виде диаграмм Хассе) как в естественных, так и в гуманитарных науках. Мировоззренческое и дидактическое значение понятия частичного порядка вытекает из возможной несравнимости как естественного состояния различных сущностей, а также первичности операции сравнения по отношению к равенству [2].

Для произвольного натурального числа $k \geq 2$, k-размеченным чумом (или просто k-чумом) называется чум, в котором каждому элементу поставлена в соответствие число (метка) из множества $\{0, \ldots, k-1\}$. Размеченные чумы являются взвешенными ориентированными графами (без циклов, кроме петель), и в этом смысле тематика данной работы включается в теорию графов, однако методы данной работы относятся преимущественно к алгебре (теории порядков) и математической логике. Естественным образом определяются подклассы размеченных чумов: размеченные решетки, леса, деревья и цепи. В информатике размеченные чумы использовались как модели параллельных процессов [18], а деревья (размеченные или с размеченными листьями), как известно, представляют разнообразные структуры данных (списки, файловые системы и т.д.). Кроме конечных k-чумов [12], k-лесов и k-деревьев [3], представляют интерес так называемые счетные k-леса и k-деревья, все цепи которых конечны [19, 4]. В статье [15] рассматривались также счетные k-чумы (без ограничения на длину цепей).

В диссертации рассматриваются следующие три сводимости на k-чумах. Для $i \in \{0, 1, 2\}$ i-сводимость (i-предпорядок) $\leq_i$ означает существование монотонного отображения между k-чумами, называемого i-морфизмом, со следующими свойствами: 0-морфизм сохраняет метки элементов, 1-морфизм отображает элементы с неравными метками в элементы с неравными метками, а 2-морфизм отображает сравнимые элементы с неравными метками в элементы с неравными метками. Отношения $\leq_0$, $\leq_1$ и $\leq_2$ на размеченных деревьях были предложены П. Гертлингом [6, 7]. Эти отношения можно считать разновидностями графовых гомоморфизмов, а они составляют актуальное направление в теории графов и ее приложениях [5]. Сводимости $\leq_0$, $\leq_1$ и $\leq_2$ на k-лесах вычислимы за полиномиальное время [9], но сводимость $\leq_0$ на k-чумах является NP-полной [15], а NP-полнота сводимостей $\leq_1$ и $\leq_2$ на k-чумах следует из доказательства их универсальности в [35].

Для каждой i-сводимости, где $i \in \{0, 1, 2\}$, стандартным образом определяются i-эквивалентность $\equiv_i$ и факторструктуры с индуцированной i-сводимостью $\leq_i$ конечных k-чумов, конечных и счетных k-лесов, конечных и счетных k-деревьев – соответственно $\mathcal{P}_k^i$, $\mathcal{F}_k^i$, $\widetilde{\mathcal{F}}_k^i$, $\mathcal{T}_k^i$ и $\widetilde{\mathcal{T}}_k^i$. Диссертация посвящена в основном изучению алгебраических и логических свойств этих структур. Представление о сложности структур $\mathcal{F}_k^i$ при $k = 3$ дают рисунки 1 и 2.

Тематика диссертации непосредственно связана с несколькими актуальными направлениями исследований в математической логике, алгебре и теоретической информатике, которые кратко перечисляются далее. Первоначальная мотивация для изучения сводимостей на k-лесах происходит из вычислимого анализа и топологии. К. Вайраух [22, 23] ввел в рассмотрение 2-сводимость $\leq_2$ на функциях между канторовскими топологическими пространствами или между канторовским и дискретным пространством (над одним алфавитом). М. Д. Хирш [10] независимо предложил близкое по смыслу определение сводимости алгоритмических проблем (в смысле С. Смейла), при котором решения сводимых проблем являются 2-сводимыми функциями (на произвольных топологических пространствах). В контексте исследования степеней разрывности функций П. Гертлинг предложил еще две сводимости $\leq_0$ и $\leq_1$ функций на произвольных топологических пространствах [7]. Частным случаем сводимости $\leq_0$ (для функций с двухэлементной областью определения) по сути является сводимость Вэджа, один из основных объектов исследования современной дескриптивной теории множеств, поскольку сводимость множеств по Вэджу означает сводимость $\leq_0$ их характеристических функций.

Как известно, k-разбиением множества (или топологического пространства) X называется функция $f\colon X \to k$, которая отождествляется с кортежем $(A_0, \ldots, A_{k-1})$, где $A_i = f^{-1}(i)$. Отсюда определения сводимостей $\leq_0$, $\leq_1$ и $\leq_2$ функций естественным образом распространяются на разбиения топологических пространств. П. Гертлинг исследовал начальный сегмент структуры k-разбиений бэровского пространства $(B) = \omega^\omega$ относительно всех трех сводимостей [7]. Он установил для каждого $i \in \{0, 1, 2\}$, что структура $\leq_i$-степеней изучаемого начального сегмента изоморфна факторструктуре $(\mathcal{F}_k^i \setminus \{\emptyset\}, \leq_i)$ размеченных лесов относительно i-сводимости (без пустого леса). А именно, П. Гертлинг определил сюръективную функцию, которая любое k-разбиение f из данного начального сегмента отображает в конечный k-лес $B(f)$ так, что $f \leq_i g$ тогда и только тогда, когда $B(f) \leq_i B(g)$. В. Л. Селиванов распространил этот результат для 0-сводимости на более широкий

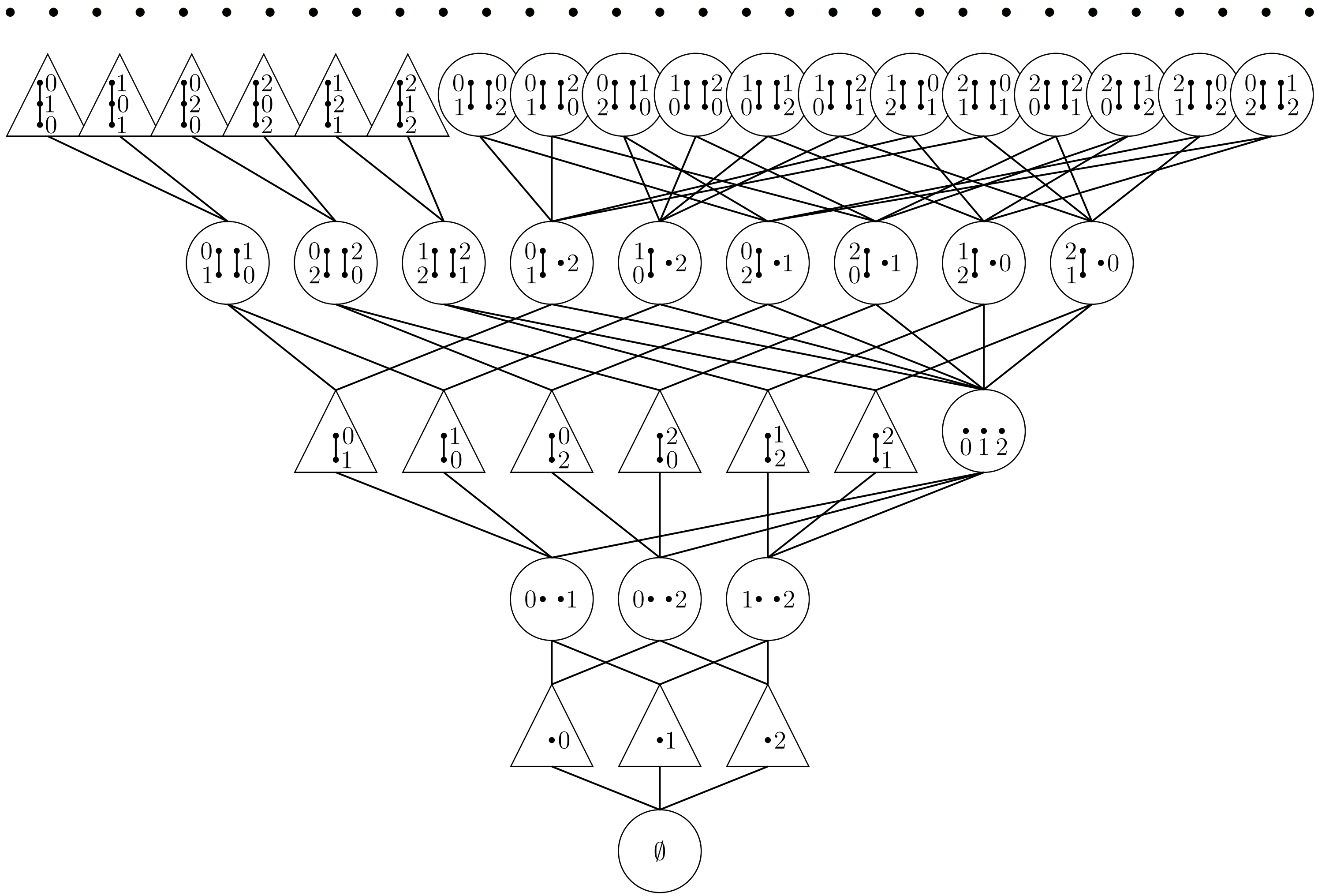

Рис. 1: Начальный сегмент структуры $\widetilde{\mathcal{F}}_3^0$. Треугольники изображают классы 0-эквивалентности 3-деревьев, а круги – классы эквивалентности *собственных* 3-лесов, не 0-эквивалентных никаким 3-деревьям

Рис. 2: Уровни структур $(\widetilde{\mathcal{F}}_3^1, \leq_1)$ и $(\widetilde{\mathcal{F}}_3^2, \leq_2)$ с 1-го по 8-й, вычисленные и нарисованные программно. Числа означают номера уровней. Цвета белый, серый и черный показывают метки 0, 1 и 2. Корни каждого собственного 3-леса соединены отрезками

начальный сегмент [20].

Другая область применения 0-сводимости размеченных чумов и лесов (а также других подклассов чумов) относится к булевой иерархии разбиений. Пусть M – множество, $P(M)$ – класс всех подмножеств множества M. Базой $\mathcal{L} \subseteq P(M)$ называется класс подмножеств, замкнутый относительно операций $\cup, \cap$ и содержащий множества $\emptyset$, M [3]. Булева иерархия (над $\mathcal{L}$) $BH(\mathcal{L})$ – известная классификация элементов булевой алгебры, порожденной классом $\mathcal{L}$ в классе $P(M)$. К. Вагнер и С. Косуб предложили естественное обобщение булевой иерархии для разбиений [11, 12]. По любому k-чуму (P, c) определяется некоторый класс $\mathcal{L}(P, c)$ k-разбиений множества M, далее иерархии разбиений над $\mathcal{L}$ определяются по классам чумов:

- по классу k-решеток – «обычная» булева иерархия k-разбиений $BH_k(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}(P, c) | (P, c) \in \mathcal{L}_k\}$;
- по классу k-чумов – так называемая расширенная булева иерархия k-разбиений $RBH_k(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}(P, c) | (P, c) \in \mathcal{P}_k\}$;
- по классу k-лесов – $FBH_k(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}(P, c) | (P, c) \in \mathcal{F}_k\}$;
- по классу k-деревьев – $TBH_k(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}(P, c) | (P, c) \in \mathcal{T}_k\}$.

Булевы иерархии разбиений обобщают классическую разностную иерархию Хаусдорфа и ее варианты в теории вычислений, включая иерархию Ершова. В. Л. Селивановым установлено, что в случае так называемых редуцируемых баз эти иерархии разбиений обладают некоторыми хорошими свойствами. Многие из известных множеств в теории вычислимости являются такими базами [3]. Вычислимые варианты сводимостей играют заметную роль в вычислимом анализе, где используются для классификации алгоритмических задач по степеням невычислимости (аналогично классической теории степеней неразрешимости).

Э. Летонен и Л. Квуида [15] построили изоморфное вложение структуры гомоморфизма ориентированных графов (без петель) в структуру 0-сводимости размеченных чумов (причем оказалось достаточно только чумов высоты 2, т.е. чумов с максимальными цепями длины 2). Этот результат также показывает тесную связь между тематикой диссертации и теорией графов. Известно, что структура ориентированных графов относительно гомоморфизма универсальна, то есть любой счетный частичный порядок изоморфно вкладывается в нее. Отсюда факторструктура размеченных чумов $\mathcal{P}_k^0$ также универсальна, то есть обладает «максимальной сложностью» среди всех счетных частичных порядков.

Следующую связь 0-сводимости с алгеброй клонов заметил Э. Летонен в статье [17]. Рассмотрим клон $M_\leq$ всех монотонных функций произвольной местности на фиксированном чуме $(A, \leq)$ и сводимость $\preceq_{M_\leq}$ функций на A: $f \preceq_{M_\leq} g$, если и только если $f = g(h_1, \ldots, h_m)$ для некоторых $h_1, \ldots, h_m \in M_\leq$. Тогда структура функций на A относительно $\preceq_{M_\leq}$ вкладывается в структуру A-размеченных чумов относительно 0-сводимости посредством отображения $f \mapsto P(A, f) = P((A^n, \leq'), f)$, где n – местность функции f, а частичный порядок $\leq'$ на декартовой степени A^n определяется из $\leq$ покомпонентно. Иными словами, $f \preceq_{M_\leq} g$ тогда и только тогда, когда $P(A, f) \leq_0 P(A, g)$.

Таким образом, изучаемые в диссертации объекты представляют интерес для ряда разделов математической логики, алгебры и теоретической информатики, и активно изучаются специалистами.

Степень разработанности темы

Тематика диссертации является относительно новым направлением на стыке математической логики, алгебры и теоретической информатики. Первые работы по данной тематике были опубликованы в 90-х годах прошлого века. Три сводимости на размеченных деревьях и лесах были введены П. Гертлингом [6, 7], а 2-сводимость в топологическом контексте была впервые рассмотрена К. Вайраухом [22, 23] и независимо М. Д. Хиршем [10]. Среди данных трех сводимостей наиболее известна 0-сводимость (в литературе называемая также гомоморфным или h-предпорядком). В различных контекстах она изучалась рядом специалистов в России и зарубежом: П. Гертлингом, К. Вагнером, С. Косубом, В. Л. Селивановым, О. В. Кудиновым, Э. Летоненом и Л. Квуидой.

Цели и задачи исследования

Цель исследования: установить новые свойства структур 0-, 1- и 2-сводимости размеченных частично упорядоченных множеств, лесов и их подклассов, а также выявить сходства и различия между данными структурами.

Задачи исследования:

- Построить функцию, вычисляющую предшественников неразложимых элементов в структурах 0-сводимости размеченных счетных лесов.

- Исследовать определимость элементов и операций замыкания (добавления корня) в структурах 0-сводимости размеченных счетных лесов.

- Исследовать вопросы разрешимости элементарных теорий изучаемых структур.
- Проверить универсальность (вложимость любого счетного частичного порядка) для структур 1- и 2-сводимости размеченных частично упорядоченных множеств.
- Исследовать структурные свойства и взаимосвязи 0-, 1- и 2-сводимости на размеченных частично упорядоченных множествах и лесах, по возможности распространить результаты, полученные для размеченных лесов, на размеченные деревья и деревья с фиксированной корневой меткой.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми. В процессе работы автором предложены также некоторые новые обозначения, определения и технические термины.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях по тематике диссертации и в приложениях данной тематики. Материал диссертации также может быть использован при проведении спецкурсов для студентов и аспирантов.

Методология и методы исследования

В работе применяются как алгебраические и комбинаторные, так и логические методы. Широкое применение для построения алгебраических объектов, операций и логических формул нашли различные виды индукции.

В первой главе ключевую роль в определениях изучаемых объектов играет введение алгебраических структур на классах эквивалентности (операции факторизации и индуцирования). Материал второй главы изложен преимущественно в алгебраическом и теоретико-графовом контексте. В третьей главе широко применяются методы математической логики. Структуры k-лесов и k-деревьев относительно 1- и 2-сводимости описаны на основе понятия хорошего предпорядка (wqo) и теоремы Крускала [4]. В доказательстве наследственной неразрешимости в структурах лесов и деревьев относительно 1- и 2-сводимости ключевую роль играет известный результат Ю. Л. Ершова, И. А. Лаврова, А. Д. Тайманова и М. А. Тайцлина [1], метод применения которого к структурам

0-сводимости разработан В. Л. Селивановым и О. В. Кудиновым [14]. В четвертой главе к размеченным чумам применяются некоторые алгебраические и топологические методы. Для иллюстративных целей и для проверки некоторых фактов разработан программный код, который для 0-сводимости обсуждается в приложении.

Положения, выносимые на защиту

1. Построена функция, вычисляющая предшественников неразложимых элементов в структурах 0-сводимости размеченных счетных лесов и деревьев с фиксированной корневой меткой [28, 30, 25].

2. Посредством этой функции доказана определимость в языке $L_{\omega_1\omega}$ каждого элемента факторструктур 0-сводимости размеченных счетных лесов, деревьев и деревьев с фиксированной корневой меткой, во всех трех случаях с минимальными ненаименьшими элементами в качестве параметров; как следствие, описаны группы автоморфизмов этих факторструктур [30, 25].

3. Доказана определимость в языке первого порядка операций замыкания (добавления корня) в факторструктурах 0-сводимости размеченных счетных и конечных лесов [27].

4. Доказана наследственная неразрешимость факторструктур 1- и 2-сводимости размеченных счетных лесов [31, 32, 26].

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты работы докладывались на нескольких российских и иностранных конференциях:

- Международная научная студенческая конференция, Новосибирск, Россия, 2008 г.;

- Topological and Game-Theoretic Aspects of Infinite Computations, Дагштуль, Германия, 2008 г.;

- Мальцевские чтения, Новосибирск, Россия, 2009 г.;

- Workshop on Logical Approaches to Barriers in Computing and Complexity, Грайфсвальд, Германия, 2010 г.;

- Computability in Europe 2010: Programs, Proofs, Processes, Понта Делгада, Португалия, 2010 г.;

- Всероссийская научная школа-конференция с международным участием «Информатика и информационные технологии в образовании: теория, приложения, дидактика», Новосибирск, 2012 г.

Кроме того, по результатам работы автором были сделаны доклады на семинарах «Автоматы и сложность вычислений» (Институт систем информатики СО РАН) и «Конструктивные модели» (Институт математики СО РАН) в Новосибирске.

Публикации автора

В диссертацию вошли результаты 11 публикаций [25]–[35], из них 3 публикации в изданиях, относящихся к перечню ВАК, и 5 совместных публикаций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, приложения, списка литературы, списка обозначений, предметного указателя и списка иллюстраций. Объем диссертации составляет 138 страниц. Диссертация содержит 19 иллюстраций. Список литературы включает 59 наименований.

Основное содержание работы

В диссертации используется сквозная нумерация всех утверждений и определений в пределах каждой главы, первая цифра означает номер главы. В автореферате приводятся номера соответствующих утверждений в диссертации.

Во **введении** обсуждаются актуальность и степень разработанности темы, цели и задачи, методология исследования, приводятся положения, выносимые на защиту.

Основное содержание главы 1

Первая глава содержит определения и предварительные сведения, необходимые для изучения тематики диссертации. Натуральное число $k \geq 2$ отождествляется с *множеством меток* $\{0, \ldots, k-1\}$ (случай $k = 1$ тривиален). *Размеченный k-чум* (или просто *k-чум*) – это упорядоченная тройка $(P; \leq_P, c_P)$, состоящая из чума $(P; \leq_P)$ и отображения $c_P \colon P \to k$, которое называется *функцией разметки* (или просто *разметкой*). Обозначение $(P; \leq_P, c_P)$ в тексте диссертации часто сокращается до (P, c_P) или просто P. Классификация чумов естественным образом распространяется на k-чумы: если в k-чуме $(P; \leq_P, c_P)$ чум $(P; \leq_P)$ является решеткой (лесом, деревом, цепью), то $(P; \leq_P, c_P)$ называется k-решеткой (соответственно, k-лесом, k-деревом, k-цепью). Размеченный k-лес (k-дерево) не более чем счетной мощности называется *счетным*, если в нем нет бесконечных цепей [19, 4].

Для любого $r < k$ и произвольного k-чума P, пусть *замыкание* $p_r(P)$ – k-чум, полученный из P добавлением наибольшего элемента с меткой r [3, 4]. Если F – конечный (счетный) k-лес, то $p_r(F)$ – конечное (соответственно, счетное) k-дерево с корнем, помеченным меткой r. В частности, $p_r(\emptyset)$ представляет собой k-дерево из одного элемента с меткой r (синглетон r).

Через $\mathcal{P}_k$, $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{F}_k$, $\widetilde{\mathcal{F}}_k$, $\mathcal{T}_k$ и $\widetilde{\mathcal{T}}_k$ обозначаются классы всех конечных k-чумов, конечных k-решеток, конечных k-лесов, счетных k-лесов, конечных k-деревьев и счетных k-деревьев, соответственно. Для любого $r < k$, пусть $\mathcal{T}_{k,r}$ (соответственно, $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,r}$) обозначает класс всех конечных (соответственно счетных) k-деревьев с фиксированной меткой r на корне.

Определение 1.4. *Пусть $(P; \leq_P, c_P)$, $(Q; \leq_Q, c_Q)$ – произвольные k-чумы и $f\colon (P; \leq_P) \to (Q; \leq_Q)$ – монотонное отображение, т.е.*

$$\forall x, y \in P(x \leq_P y \to f(x) \leq_Q f(y)).$$

Тогда f называется

- 0-морфизмом *или просто* морфизмом *(из P в Q), если f сохраняет разметку, т.е. $c_P = c_Q \circ f$;*
- 1-морфизмом *(из P в Q), если существует отображение $g\colon k \to k$ такое, что $c_P = g \circ c_Q \circ f$, т.е. если любые два элемента P с неравными метками переводятся отображением f в элементы Q с неравными метками;*
- 2-морфизмом *(из P в Q), если оно переводит сравнимые элементы с неравными метками в элементы с неравными метками, т.е.*

$$\forall x, y \in P((x \leq_P y \wedge c_P(x) \neq c_P(y)) \to c_Q(f(x)) \neq c_Q(f(y))).$$

Определение 1.6. *Для $i \in \{0, 1, 2\}$, k-чум P i-сводится к k-чуму Q, обозначение $P \leq_i Q$, если существует i-морфизм $f\colon P \to Q$.*

Так как любой 0-морфизм является 1-морфизмом, а любой 1-морфизм является 2-морфизмом, то из $\leq_0$ следует $\leq_1$, а из $\leq_1$ следует $\leq_2$. Отношение $\leq_i$ рефлексивно и транзитивно, то есть является предпорядком (квазипорядком). Два k-чума P и Q называются *i-эквивалентными*, обозначение $P \equiv_i Q$, если $P \leq_i Q$ и $P \leq_i Q$. Отношение $\equiv_i$ является отношением эквивалентности и называется *i-эквивалентностью.* Очевидно, что из $\equiv_0$ следует $\equiv_1$, а из $\equiv_1$ следует $\equiv_2$. Классы i-эквивалентности k-чумов можно естественно называть *i-обобщенными* k-чумами или даже просто k-чумами, если это не ведет к двусмысленности. Особенность тематики диссертации в том, что результаты строго формулируются в основном для обобщенных k-чумов, а рассуждения в доказательствах проводятся для конкретных k-чумов (представителей соответствующих классов эквивалентности).

Обозначим через $\mathcal{P}_k^i$, $\mathcal{L}_k^i$, $\mathcal{F}_k^i$, $\widetilde{\mathcal{F}}_k^i$, $\mathcal{T}_k^i$, $\widetilde{\mathcal{T}}_k^i$ соответственно фактормножества $\mathcal{P}_k/{\equiv_i}$, $\mathcal{L}_k/{\equiv_i}$, $\mathcal{F}_k/{\equiv_i}$, $\widetilde{\mathcal{F}}_k/{\equiv_i}$, $\mathcal{T}_k/{\equiv_i}$, $\widetilde{\mathcal{T}}_k/{\equiv_i}$. На этих фактормножествах стандартным образом определяется индуцированное отношение частичного порядка, которое также обозначается через $\leq_i$: для произвольных классов i-эквивалентности $[A]_i$ и $[B]_i$ с представителями A и B полагается $[A]_i \leq_i [B]_i$, если $A \leq_i B$. Соответствующие факторструктуры (факторчумы) сокращенно обозначаются как фактормножества: например, $(\mathcal{P}_k^i, \leq_i)$ сокращается до $\mathcal{P}_k^i$. Для 0-сводимости определяются также факторструктуры $\mathcal{T}_{k,r}^0 = (\mathcal{T}_{k,r}/{\equiv_0}, \leq_0)$ и $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,r}^0 = (\widetilde{\mathcal{T}}_{k,r}/{\equiv_0}, \leq_0)$.

Основное содержание главы 2

Во второй главе изучаются некоторые алгебраические свойства конечных k-чумов относительно трех сводимостей $\leq_0$, $\leq_1$ и $\leq_2$: универсальность относительно $\leq_1$ и $\leq_2$, связь между $\leq_0$ и $\leq_2$, свойства минимальных верхних границ относительно $\leq_1$. Для некоторых свойств конечных k-чумов приводятся аналогичные формулировки и доказательства для k-лесов.

Как доказано Э. Летоненом в [17], структура $\mathcal{P}_k^0$ является универсальным чумом, то есть в нее изоморфно вкладывается любой счетный чум. Это утверждение также следует из построения изоморфного вложения в $\mathcal{P}_k^0$ структуры $\mathcal{G}^h$ ориентированных графов без петель относительно гомоморфизма, которая, как известно, универсальна (см. [15] и ссылки там же). В доказательстве следующей теоремы строятся подобные изоморфные вложения $\mathcal{G}^h$ в $\mathcal{P}_k^1$ и $\mathcal{P}_k^2$:

Предложение 2.6. *Для любого $k \geq 2$ структуры $\mathcal{P}_k^1$ и $\mathcal{P}_k^2$ универсальны.*

Определение 2.10. *Назовем k-чум P главным, если из $X \leq_2 P$ следует $X \leq_0 P$ для любого k-чума X. Соответственно, k-лес F главный, если из $X \leq_2 F$ следует $X \leq_0 F$ для любого k-леса X.*

Доказывается, что никакой нетривиальный (то есть включающий сравнимые элементы с разными метками) главный k-чум не является k-лесом (и не 0-эквивалентен никакому k-лесу).

Теорема 2.11. *(i) Для любого конечного k-чума существует 2-эквивалентный ему конечный главный k-чум.*

(ii) Для любого конечного k-леса существует 2-эквивалентный ему конечный главный k-лес.

Доказательство теоремы 2.11. конструктивно – оно содержит комбинаторное построение искомого главного k-чума $\mathrm{pp}_k(A)$ (k-леса $\mathrm{pf}_k(A)$) по данному k-чуму (k-лесу) A. Отметим, что для пункта (ii) есть также неконструктивное доказательство в главе 3.

Следствие 2.13.

(i) Структура (чум) $\mathcal{P}_k^2$ изоморфно вкладывается в структуры $\mathcal{P}_k^0$ и $\mathcal{P}_k^1$.

(ii) Структура (чум) $\mathcal{F}_k^2$ изоморфно вкладывается в структуры $\mathcal{F}_k^0$ и $\mathcal{F}_k^1$.

С помощью операций pp_k и pf_k определяются точные нижние грани в структурах (чумах) $\mathcal{P}_k^2$ и $\mathcal{F}_k^2$.

Теорема 2.17. *Структуры $\mathcal{P}_k^2$ и $\mathcal{F}_k^2$ являются дистрибутивными решетками.*

Структуры $\mathcal{P}_k^2$ и $\mathcal{F}_k^2$ не являются ни верхними, ни нижними полурешетками. В диссертации изучаются некоторые свойства минимальных верхних и максимальных нижних границ в этих структурах. В частности, дано описание минимальных верхних границ естественно заданных пар k-чумов или k-лесов, причем для таких пар количество минимальных верхних границ равно $k!$.

Основное содержание главы 3

В главе 3 изучаются свойства сводимостей, специфичные именно для k-лесов и k-деревьев. В следующей теореме формулируются общие свойства 1- и 2-сводимости, подобные свойствам, установленным в [4].

Теорема 3.3. *Пункты (i)–(v) справедливы для $i \in \{1, 2\}$.*

(i) i-сводимость $\leq_i$ является хорошим квазипорядком на классе $\widetilde{\mathcal{F}}_k$ и его подклассах – $\mathcal{F}_k$, $\widetilde{\mathcal{T}}_k$, $\mathcal{T}_k$.

(ii) Любой нижний конус в структурах $\mathcal{F}_k^i$ и $\mathcal{T}_k^i$ конечен, а в структурах $\widetilde{\mathcal{F}}_k^i$ и $\widetilde{\mathcal{T}}_k^i$ – (не более чем) счетен.

(iii) Для любого $k \geq 2$, структуры $\mathcal{F}_k^i$ и $\mathcal{T}_k^i$ являются начальными сегментами структур $\widetilde{\mathcal{F}}_k^i$ и $\widetilde{\mathcal{T}}_k^i$, соответственно.

(iv) $rk(\widetilde{\mathcal{F}}_k^i) = rk(\widetilde{\mathcal{T}}_k^i) = \omega_1$, $rk(\mathcal{F}_k^i) = rk(\mathcal{T}_k^i) = \omega$.

(v) Структуры $\mathcal{F}_2^1 = \mathcal{T}_2^1 = \mathcal{F}_{2,2} = \mathcal{T}_{2,2}$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_{2,1} = \widetilde{\mathcal{T}}_{2,1} = \widetilde{\mathcal{F}}_{2,2} = \widetilde{\mathcal{T}}_{2,2}$ линейно упорядочены (в частности, их ширина равна 1); при $k > 2$ $w(\widetilde{\mathcal{F}}_k^i) = w(\mathcal{F}_k^i) = w(\widetilde{\mathcal{T}}_k^i) = w(\mathcal{T}_k^i) = \omega$.

(vi) Структуры $\widetilde{\mathcal{F}}_k^2$ и $\mathcal{F}_k^2$ являются дистрибутивными решетками (супремумом в них является джойн $\bigsqcup$).

При изучении структур 0-сводимости k-лесов и k-деревьев как самостоятельный, так и прикладной интерес (для доказательства определимости) представляет функция $'$ (штрих), значение которой t' (с точностью до 0-эквивалентности) для данного k-дерева t является 0-наибольшим k-лесом, 0-меньшим t. Для конечных k-деревьев функция $'$ была определена и построена О. В. Кудиновым и В. Л. Селивановым [13].

Определение (Функция $'$: $\widetilde{\mathcal{T}}_k^0 \to \widetilde{\mathcal{F}}_k^0$**)** [25]

$t' = \bigsqcup\{s \in \widetilde{\mathcal{T}}_k^0 \mid s < t\}$ *для любого* $t \in \widetilde{\mathcal{T}}_k^0$.

Корректность определения функции $'$ следует из счетности нижних конусов в структуре $\widetilde{\mathcal{T}}_k^0$ [4].

Для произвольного семейства $\mathcal{U} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}_k$, $max(\mathcal{U})$ обозначает множество максимальных элементов семейства $\mathcal{U}$ относительно $\leq_0$, а $nm(\mathcal{U})$ – множество элементов, над которыми нет максимальных, т.е.

$$nm(\mathcal{U}) = \{t \in \mathcal{U} \mid \neg\exists s \in max(\mathcal{U})(t \leq_0 s)\}.$$

Пусть также $jmax(\mathcal{U}) = \bigsqcup max(\mathcal{U})$, $jnm(\mathcal{U}) = \bigsqcup nm(\mathcal{U})$ и $nm(\mathcal{U})_a = nm(\mathcal{U}) \setminus \check{a}$ для любого $a \in nm(\mathcal{U})$. В статье [25] доказано следующее индуктивное построение функции $'$ для счетных k-деревьев, которое отличается от построения для конечных k-деревьев из [13] добавлением наиболее трудоемкого пункта (iv), изображенного на рис. 3.

Предложение 3.12. *Пусть $t \in \widetilde{\mathcal{T}}_k^0$, $t = p_i(\bigsqcup\mathcal{U})$ для некоторого $\mathcal{U} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}_k^0 \setminus \widetilde{\mathcal{T}}_{k,i}^0$ (т.е. $\mathcal{U}$ – семейство счетных обобщенных k-деревьев с корневыми метками, отличными от i).*

(i) Если $\mathcal{U} = \emptyset$, т.е. $t = p_i([\emptyset]_0)$, то $t' = [\emptyset]_0$.

(ii) Если $\mathcal{U} = \{x_0, \dots, x_n\}$, где $n > 0$ и $x_0, \dots, x_n$ попарно несравнимые элементы в $\widetilde{\mathcal{T}}_k^0 \setminus \widetilde{\mathcal{T}}_{k,i}^0$, то $t' = (p_i(x_0 \sqcup \dots \sqcup x_n))' = p_i(y_0) \sqcup \dots \sqcup p_i(y_n)$, где $y_j = x_j' \sqcup (\bigsqcup_{l \neq j} x_l)$, причем элементы $p_i(y_0), \dots, p_i(y_n)$ попарно несравнимы.

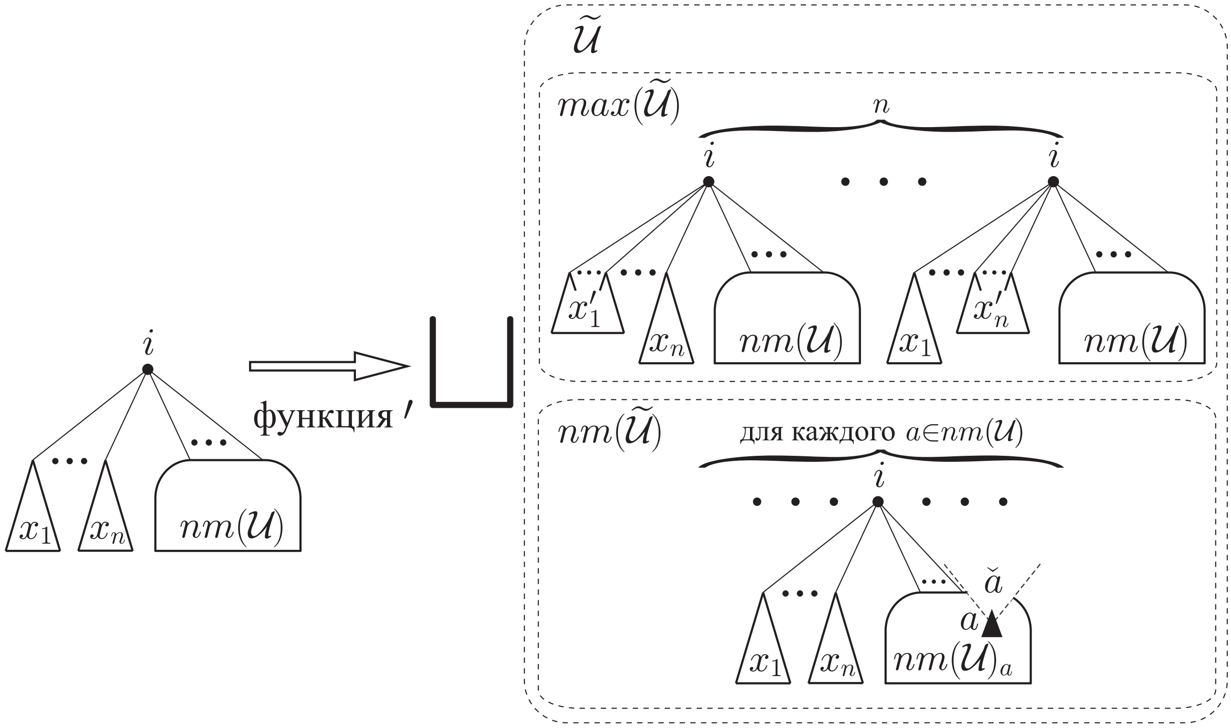

Рис. 3: $t' = (p_i(\bigsqcup \mathcal{U}))'$ в случае $nm(\mathcal{U}) \neq \emptyset$

(iii) Если $\mathcal{U} = \{p_j(x)\}$ *для* $j \neq i$ *и* $x \in \widetilde{\mathcal{F}}_k^0$, *то* $t' = (p_i p_j(x))' = p_j(x) \sqcup p_i((p_j(x))')$ *и элементы* $p_j(x)$, $p_i((p_j(x))')$ *несравнимы.*

(iv) Если $nm(\mathcal{U}) \neq \emptyset$ *и* $max(\mathcal{U}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, *где* $x_1, \ldots, x_n$ *попарно несравнимы (случай* $n = 0$ *означает, что* $max(\mathcal{U}) = \emptyset$*), то* $t' = \bigsqcup \widetilde{\mathcal{U}}$, *где*

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \{p_i(y_1), \ldots, p_i(y_n)\} \cup \{p_i(\bigsqcup nm(\mathcal{U})_a \sqcup jmax(\mathcal{U})) \mid a \in nm(\mathcal{U})\}$$

для $y_j = x_j' \sqcup (\bigsqcup_{l \neq j} x_l) \sqcup jnm(\mathcal{U})$, $j \in \{1, \ldots, n\}$*; кроме того, элементы* $p_i(y_1), \ldots, p_i(y_n)$ *попарно несравнимы,* $max(\widetilde{\mathcal{U}}) = \{p_i(y_1), \ldots, p_i(y_n)\}$ *и* $nm(\widetilde{\mathcal{U}}) = \{p_i(\bigsqcup nm(\mathcal{U})_a \sqcup jmax(\mathcal{U})) \mid a \in nm(\mathcal{U})\}$ (см. рис. 3).

Теорема 3.20. [30, 25] *Любой элемент определим в следующих структурах, причем для конечных* k*-лесов и* k*-деревьев в языке логики первого порядка, а для счетных* k*-лесов и* k*-деревьев – в языке* $L_{\omega_1\omega}$*):*

(i) $(\mathcal{F}_k^0; \leq_0, [0], \ldots, [k-1])$ *и* $(\widetilde{\mathcal{F}}_k^0; \leq_0, [0], \ldots, [k-1])$ *при* $k \geq 3$*;*

(ii) $(\mathcal{T}_k^0; \leq_0, [0], \ldots, [k-1])$ *и* $(\widetilde{\mathcal{T}}_k^0; \leq_0, [0], \ldots, [k-1])$ *при* $k \geq 3$*;*

(iii) $(\mathcal{T}_{k,0}^0; \leq_0, [01], \ldots, [0(k-1)])$ *и* $(\widetilde{\mathcal{T}}_{k,0}^0; \leq_0, [01], \ldots, [0(k-1)])$ *при* $k \geq 2$.

Теорема 3.20. позволяет получить полное описание групп автоморфизмов соответствующих структур 0-сводимости без констант.

Теорема 3.27.

(i) Для любого $k \geq 2$ $\mathrm{Aut}(\widetilde{\mathcal{F}}_k^0) \simeq \mathrm{Aut}(\widetilde{\mathcal{T}}_k^0)$ *и* $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_k^0) \simeq \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_k^0)$.

(ii) $\mathrm{Aut}(\widetilde{\mathcal{T}}_2^0) \simeq S_2^{\omega_1}$ *и* $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_2^0) \simeq S_2^{\omega}$.

(iii) Для любого $k \geq 3$ $\mathrm{Aut}(\widetilde{\mathcal{F}}_k^0) \simeq \mathrm{Aut}(\mathcal{F}_k^0) \simeq S_k$.

(iv) Для всех $k \geq 2$ *и* $r \in k$ $\mathrm{Aut}(\widetilde{\mathcal{T}}_{k,r}^0) \simeq \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_{k,r}^0) \simeq S_{k-1}$.

Теорема 3.34. [27] *Для любых* $k \geq 3$ *и* $i < k$, *операция* p_i *определима (в языке первого порядка) в структурах* $(\mathcal{F}_k^0; \leq_0, [0], \ldots, [k-1])$ *и* $(\widetilde{\mathcal{F}}_k^0; \leq_0, [0], \ldots, [k-1])$.

Теорема 3.35. [26] *Для любого* $k \geq 3$ *теории первого порядка структур* $(\mathcal{F}_k^1; \leq_1)$, $(\mathcal{T}_k^1; \leq_1)$, $(\mathcal{F}_k^2; \leq_2)$, *и* $(\mathcal{T}_k^2; \leq_2)$ *наследственно неразрешимы.*

Четвертая глава носит вспомогательный характер, в ней рассматриваются некоторые дополнительные вопросы: расщепление произвольных k-чумов, топологическая интерпретация сводимостей на k-чумах, ретракты и минимальные k-чумы, спектр k-цепей.

Приложение содержит программный код с некоторыми пояснениями для различных расчетов 0-сводимости на k-лесах, в том числе для расчета уровней и спектра k-лесов.

Заключение

В диссертации изучались три сводимости (0-, 1- и 2-сводимость) на нескольких классах размеченных частично упорядоченных множеств (чумов): на счетных и конечных лесах и деревьях, на конечных чумах без ограничений, на конечных решетках и цепях. **Основные результаты** диссертации состоят в следующем:

1. Построена функция, вычисляющая предшественников неразложимых элементов в структурах 0-сводимости размеченных счетных лесов и деревьев с фиксированной корневой меткой [28, 30, 25].

2. Посредством этой функции доказана определимость в языке $L_{\omega_1\omega}$ каждого элемента факторструктур 0-сводимости размеченных счетных лесов, деревьев и деревьев с фиксированной корневой меткой, во всех трех случаях с минимальными ненаименьшими элементами в качестве параметров; как следствие, описаны группы автоморфизмов этих факторструктур [30, 25].

3. Доказана определимость в языке первого порядка операций замыкания (добавления корня) в факторструктурах 0-сводимости размеченных счетных и конечных лесов [27].

4. Доказана наследственная неразрешимость факторструктур 1- и 2-сводимости размеченных счетных лесов [31, 32, 26].

Основные результаты сформулированы в предложении 3.12 и теоремах 3.20, 3.27, 3.34 и 3.35.

В ходе работы над диссертацией получен ряд других интересных свойств изучаемых структур. В частности, доказана универсальность факторструктур 1- и 2-сводимости конечных k-чумов (в том смысле, что каждый счетный частичный порядок вкладывается в эти структуры) [34, 35], построены наглядные контрпримеры к свойству wqo [29] (пример бесконечной антицепи нашел применение в [21]), построено естественное вложение факторструктур 2-сводимости конечных k-чумов и k-лесов в соответствующие факторструктуры 0- и 1-сводимости. С использованием этого вложения показано, что факторструктуры 2-сводимости конечных k-чумов и k-лесов, в отличие от соответствующих факторструктур 1-сводимости, являются дистрибутивными решетками [33, 35]. В целом, изучаемые сводимости оказались сложными в алгебраическом и логическом смысле (в силу универсальности и неразрешимости).

Следующие проблемы актуальны для дальнейших исследований:

- Проблема спектра факторструктур размеченных лесов и деревьев для каждой из трех сводимостей, т.е. вычисление мощности каждого уровня (множества элементов фиксированной высоты). В диссертации рассмотрен только простейший случай размеченных цепей.

- Оценка сложности операций на изучаемых структурах (например, спектра), а также теорий структур 1- и 2-сводимости (теории структуры 0-сводимости размеченных лесов и деревьев рекурсивно изоморфны арифметике [14]).

- Описание группы автоморфизмов для структур 0-, 1- и 2-сводимости размеченных чумов, а также для структур 1- и 2-сводимостей размеченных (счетных) лесов.

- Описание нерешеточности структуры 1-сводимости размеченных лесов (в диссертации предложено только частичное описание минимальных верхних границ).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. В. Л. Селиванову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] Ершов, Ю. Л. Элементарные теории / Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров, А. Д. Тайманов, М. А. Тайцлин // Успехи мат. наук. – 1965. – т. 20, № 4. – С. 37–108.

[2] Мальцев, А. А. Общее математическое образование: традиции и современность [Текст] / А. А. Мальцев. - Новосибирск : Изд-во НИИ МИОО НГУ, 1997. – 251 с.

[3] Селиванов, В. Л. Булевы иерархии разбиений над редуцируемой базой / В. Л. Селиванов // Алгебра и логика. – 2004. – т. 43, № 1. – С. 77–109.

[4] Селиванов, В. Л. Фактор-алгебра размеченных лесов по отношению h-эквивалентности / В. Л. Селиванов // Алгебра и логика. – 2007. – т. 46, № 2. – С. 217–243.

[5] Hell, P. Graphs and Homomorphisms / P. Hell, J. Nešetřil. – Oxford University Press, 2004. – 256 p.

[6] Hertling, P. Topologische Komplexitätsgrade von Funktionen mit endlichem Bild / P. Hertling // Informatikberichte. – Hagen : Fernuniversität Hagen, 1993. – Bericht Nr. 152. – 34 S.

[7] Hertling, P. Unstetigkeitsgrade von Funktionen in der effektiven Analysis : PhD thesis. / P. Hertling // Informatikberichte. – Hagen : Fernuniversität Hagen, 1996. – Bericht Nr. 208. – 157 S.

[8] Hertling, P. Levels of degeneracy and exact lower complexity bounds for geometric algorithms / P. Hertling, K. Weihrauch // Proceedings of the 6th Canadian Conference on Computational Geometry. – Saskatoon : University of Saskatchewan, 1994. – P. 237-242.

[9] Hertling, P. Complexity issues for preorders on finite labeled forests / P. Hertling, V. L. Selivanov // Logic, Computation, Hierarchies (Eds. V. Brattka, H. Diener, D. Spreen). – Boston/Berlin : Walter de Gruyter Inc./Ontos, 2014. – Vol. 4. – P. 165-189.

[10] Hirsch, M. D. Applications of topology to lower bound estimates in computer science / M. D. Hirsch // From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest. – New York : Springer, 1993. – P. 395–418.

[11] Kosub, S. Complexity and partitions : PhD thesis / S. Kosub. – Würzburg, 2000. –

[12] Kosub, S. The boolean hierarchy of NP-partitions / S. Kosub, K. Wagner // Lecture Notes of Computer Science : Proceedings of 17th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. – Berlin : Springer, 2000. – Vol. 1770. – P. 157–168.

[13] Kudinov, O. V. Definability in the homomorphic quasiorder of finite labeled forests / O. V. Kudinov, V. L. Selivanov // Lecture Notes in Computer Science : Computability in Europe-2007 (Eds. S. B. Cooper, B. Löwe and A. Sorbi). – Berlin : Springer, 2007. – Vol. 4497. – P. 436–445.

[14] Kudinov, O. V. Undecidability in the homomorphic quasiorder of finite labeled forests / O. V. Kudinov, V. L. Selivanov // Journal of Logic and Computation. – 2007. – Vol. 17. – P. 1135–1151.

[15] Kwuida, L. On the homomorphism order of labeled posets / L. Kwuida, E. Lehtonen // Order. – 2011. – Vol. 28, Issue 2. – P. 251–265.

[16] Lehtonen, E. Descending chains and antichains of the unary, linear, and monotone subfunction relations / E. Lehtonen // Order. – 2006. – Vol. 23. – P. 129—142.

[17] Lehtonen, E. Labeled posets are universal / E. Lehtonen // European Journal of Combinatorics. – 2008. – Vol. 29. – P. 493–506.

[18] Pratt, V. R. Modelling concurrency with partial orders / V. R. Pratt // Internatinal Journal of Parallel Programming. – 1987. – Vol. 15. – P. 33–71. 15 (1987) 33–71.

[19] Selivanov, V. L. The algebra of labeled forests modulo homomorphic equivalence / V. L. Selivanov // Schriften zur Theoretischen Informatik. – Siegen : Universität Siegen, 2006. – Technical Report 06-01. – 18 p.

[20] Selivanov, V. L. Hierarchies of Δ^0_2-measurable k-partitions / V. L. Selivanov // Mathematical Logic Quarterly. – 2007. – Vol. 53, Issue 4-5. – P. 446–461.

[21] Selivanov, V. L. Undecidability in some structures related to computation theory / V. L. Selivanov // Journal of Logic and Computation. – 2009. – Vol. 19, Issue 1. – P. 177–197.

[22] Weihrauch, K. The degrees of discontinuity of some translators between representations of the real numbers / K. Weihrauch // Informatikberichte. – Hagen : Fernuniversität Hagen, 1992. – Bericht Nr. 129. – 32 S.

[23] Weihrauch, K. The TTE-interpretation of three hierarchies of omniscience principles / K. Weihrauch // Informatikberichte. – Hagen : Fernuniversität Hagen, 1992. – Bericht Nr. 130. – 27 S.

[24] Weihrauch, K. Computable Analysis / K. Weihrauch. – Berlin : Springer Verlag, 2000. – 285 p.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в журналах из перечня ВАК

[25] Zhukov, A. V. Definability in the h-quasiorder of labeled forests / O. V. Kudinov, V. L. Selivanov, A. V. Zhukov // Annals of Pure and Applied Logic. – 2009. – Vol. 159, Issue 3. – P. 318–332.

[26] Zhukov, A. V. Undecidability in Weihrauch degrees / O. V. Kudinov, V. L. Selivanov, A. V. Zhukov // Lecture Notes in Computer Science (Proceedings of CiE-2010). – 2010. – Vol. 6158. – P. 256—265.

[27] Жуков, А. В. Определимость операций замыкания в h-предпорядке размеченных лесов / А. В. Жуков, О. В. Кудинов, В. Л. Селиванов // Алгебра и логика. – 2010. – т. 49, № 2. – С. 181–194.

В англоязычной версии:

Zhukov, A. V. Definability of closure operations in the h-quasiorder of labeled forests / A. V. Zhukov, O. V. Kudinov, V. L. Selivanov// Algebra and Logic. – 2010. – Vol. 49, Issue 2. – P. 120–129.

Другие публикации

[28] Жуков, А. В. Предшественники деревьев в решетке счетных размеченных лесов / А. В. Жуков // XLVI Международная научная студенческая конференция, тезисы докладов. — Новосибирск : Изд-во НГУ, 2008.

[29] Жуков, А. В. Пример бесконечной антицепи в структуре 2-размеченных частично-упорядоченных множеств / А. В. Жуков // XLVI Международная научная студенческая конференция, тезисы докладов. — Новосибирск : Изд-во НГУ, 2008.

[30] Zhukov, A. V. Definability in the h-quasiorder of labeled forests / O. V. Kudinov, V. L. Selivanov, A. V. Zhukov // Schriften zur Theoretischen Informatik. – Siegen : Universität Siegen, 2008. – Bericht Nr. 08-02. – 22 S.

[31] Zhukov, A. V. Undecidability in the 2-quasiorder of labeled forests / A. V. Zhukov // Мальцевские чтения 2009: тезисы докладов. – Новосибирск, 2009. – P. 217.

[32] Zhukov, A. V. Undecidability in Weihrauch degrees / O. V. Kudinov, V. L. Selivanov, A. V. Zhukov // Workshop on Logical Approaches to Barriers in Computing and Complexity: Proceedings. – Greifswald, 2010. – P. 124–127.

[33] Zhukov, A. V. An Algorithm for Embedding 2-Order into 0-Order of Finite Labeled Posets and Forests / A. V. Zhukov // Материалы Всероссийской научной школы-конференции с международным участием «Информатика и информационные технологии в образовании: теория, приложения, дидактика». – Новосибирск : Изд-во НГПУ, 2012. – Том 1. – С. 149–155.

[34] Zhukov, A. V. A Note on Universality of 1- and 2-Orders of Finite Labeled Posets / A. V. Zhukov // Материалы Всероссийской научной школы-конференции с международным участием «Информатика и информационные технологии в образовании: теория, приложения, дидактика». – Новосибирск : Изд-во НГПУ, 2012. – Том 1. – С. 156–158.

[35] Zhukov, A. V. Some Notes on the Universality of Three Orders on Finite Labeled Posets / A. V. Zhukov // Logic, Computation, Hierarchies (Eds. V. Brattka, H. Diener, D. Spreen). – Boston/Berlin : Walter de Gruyter Inc./Ontos, 2014. – Vol. 4. – P. 393-409.