На правах рукописи

ЖЕЧЕВ Василий Александрович

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КАНОНИЧЕСКИХ U- и V- СТАТИСТИК ОТ ЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Специальность 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск 2018

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики механико-математического факультета федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Научный руководитель:
Борисов Игорь Семенович, доктор физико–математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:
Тихомиров Александр Николаевич, доктор физико–математических наук, профессор, главный научный сотрудник, федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Коми научный центр Уральского отделения Российской академии наук», физико–математический институт;

Хрущев Сергей Евгеньевич, кандидат физико–математических наук, доцент кафедры статистики, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный университет экономики и управления».

Ведущая организация: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», факультет вычислительной математики и кибернетики.

Защита состоится 19 сентября 2018 года в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, проспект академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте math.nsc.ru.

Автореферат разослан « ____ » ______________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико–математических наук Ю. В. Шамардин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В начале 50-х годов прошлого столетия была доказана функциональная предельная теорема – так называемый *принцип инвариантности* – для процессов частичных сумм независимых или слабо зависимых случайных величин. В 1980-е годы окончательно сформировалась предельная теория, в частности, включающая соответствующий принцип инвариантности, для более общих объектов – так называемых U-статистик и статистик Мизеса (V-статистик) произвольного порядка как с каноническими, так и неканоническими (которые чаще называются невырожденными) ядрами и независимыми наблюдениями. Если изучение предельного поведения невырожденных U- и V-статистик по существу сводится к асимптотическому анализу сумм случайных величин, то в случае упомянутых канонических статистик ситуация кардинально меняется. Для независимых наблюдений предельное распределение указанных статистик может быть представлено в виде бесконечной полиномиальной формы от независимых гауссовских величин или в виде кратных стохастических интегралов с интегрирующей стохастической винеровской продакт-мерой. Соответственно слабые пределы в функциональной предельной теореме представляют собой либо аналогичные полиномиальные формы от независимых винеровских процессов или однопараметрические семейства кратных стохастических интегралов с интегрирующей стохастической продакт-мерой, порожденной так называемым двупараметрическим процессом Кифера.

Для слабо зависимых наблюдений изучение предельного поведения канонических U- и V-статистик существенно усложняется по сравнению со случаем обычных сумм. Прежде всего, это относится к описанию предельного распределения в виде кратных стохастических интегралов. В рассмотренных в диссертации случаях наиболее продуктивным оказался подход, связанный с использованием аппарата ортогональных рядов, который впервые был использован в случае независимых наблюдений и канонических статистик второго порядка еще в 1947 году в классической работе Р. Мизеса [14], а позже был распространен и на канонические статистики произвольного порядка усилиями Х. Рубина и Р. Витале [13].

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — стационарная последовательность случайных величин со значениями в произвольном полном сепарабельном метрическом пространстве $\mathbb{X}$. Обозначим через F распределение X_1, а через $L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$ – сепарабельное гильбертово пространство вещественнозначных функций m переменных, интегрируемых в квадрате относительно продакт-меры F^m с маргинальными распределениями F. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{X}$ является носителем распределения F, т.е. $\mathbb{X}$ (или $\mathbb{X}^m$) – минимальное замкнутое множество полной F-меры (соответственно полной F^m-меры).

Определение 1. Функция $f(z_1, ..., z_m) \in L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$ называется *канонической* (или *вырожденной*), если

$$\mathbf{E}f(z_1, ..., z_{i-1}, X_1, z_{i+1}, ..., z_m) = 0$$

для всех $z_j \in \mathbb{X}$ и $i \in \{1...m\}$, где два случая $i = 1$ и $i = m$ соответствуют крайним положениям координаты X_1 векторного аргумента функции f.

Определим U- и V-*статистики* от выборки $X_1, \ldots, X_n$ объема n стационарно связанных (возможно, независимых) наблюдений следующими соотношениями:

$$U_n := B_n^{-1} \sum_{1 \le i_1 \ne} \cdots \sum_{\ne i_m \le n} f(X_{i_1}, ..., X_{i_m}),$$
$$V_n := \tilde{B}_n^{-1} \sum_{i_1 \le n} \cdots \sum_{i_m \le n} f(X_{i_1}, ..., X_{i_m}),$$

где f – так называемое ядро соответствующей статистики, $\{B_n\}$ и $\{\tilde{B}_n\}$ – нормирующие последовательности. Впервые U-статистики были введены в 1948 году в работе В. Хёфдинга [10], а V-статистики — в 1947 году в статье Р. Мизеса [14].

Отличие U- от V-статистик состоит в том, что в области суммирования кратных сумм в определении U-статистик отсутствуют кратные индексы. Если ядро f каноническое, то и соответствующая U- или V-статистика называется *канонической* (или *вырожденной*). В противном случае указанные статистики называются *невырожденными*. Для невырожденных U-статистик в качестве нормировки обычно используют величину $A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1)$, т.е. число размещений из n элементов по m, эквивалентное нормировке n^m, используемой в этом случае в качестве $\tilde{B}_n$ у V-статистик, которое в точности равно числу слагаемых в соответствующей кратной сумме. В этом случае U-статистика будет несмещенной сильно состоятельной оценкой для смешанного момента $\mathbf{E}f(X_1, \ldots, X_m)$. Заметим, что для канонического ядра f и независимых наблюдений $\{X_i\}$ этот момент равен нулю. Если же дополнительно предполагать симметричность ядра f, т.е. инвариантность функции $f(z_1, \cdots, z_m)$ относительно всех перестановок аргументов z_j, то естественно рассматривать статистики вида

$$\tilde{U}_n := (C_n^m)^{-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots} \cdots \sum_{\ldots < i_m \le n} f(X_{i_1}, ..., X_{i_m}),$$

где биномиальный коэффициент $C_n^m = A_n^m / m!$ опять же равен числу слагаемых в вышеприведенной кратной сумме.

Для канонических ядер нормировка будет выглядеть существенно иной: соответственно $\sqrt{B_n}$ и $\sqrt{\tilde{B}_n}$, где B_n и $\tilde{B}_n$ вышеприведенные нормировки в случае невырожденных ядер.

В диссертации изучается предельное поведение всего конечного набора канонических U- и V-статистик при объемах наблюдения от 1 до n. Для этого мы введем в рассмотрение следующие U- и V-*процессы* на $[0,1]$:

$$U_n(t) := n^{-m/2} \sum_{1\le i_1 \ne} \dots \sum_{\ne i_m \le [nt]} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}), \quad t \in [0,1],$$

$$V_n(t) := n^{-m/2} \sum_{i_1 \le [nt]} \dots \sum_{i_m \le [nt]} f(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}), \quad t \in [0,1],$$

и будем их рассматривать как случайные процессы с траекториями из пространства $D[0,1]$ с классической метрикой Скорохода.

В наших условиях на выборочное пространство $\mathbb{X}$ любая функция $f \in L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$ на множестве F^m-полной меры допускает представление в виде кратного ряда

$$f(z_1, \dots, z_m) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} f_{k_1\dots k_m} e_{k_1}(z_1) \dots e_{k_m}(z_m), \tag{1}$$

сходящегося в норме $L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$, где $\{e_{k_j}\}$ – ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{X}, F)$, причем без ограничения общности можно считать, что $e_0(\cdot) \equiv 1$. Тогда из условий ортонормированности следует, что

$$\mathbf{E} e_i(X_1) e_j(X_1) = \delta_{i,j}$$

для всех $i \ne j$. В частности, отсюда получаем, что $\mathbb{E} e_j(X_1) = 0$ для всех $j \ge 1$ из условия ортогональности с элементом $e_0(\cdot) \equiv 1$. Важно отметить, что для канонических ядер $f_{k_1\dots k_m} = 0$, если $k_j = 0$ хотя бы для одного j, т.е. элемент $e_0(\cdot)$ в (1) отсутствует.

В случае независимых наблюдений асимптотическое поведение невырожденных и канонических U и V-статистик достаточно полно изучено. Скажем, при условии независимости наблюдений Х. Рубин и Р. Витале [13] доказали, что

$$U_n \xrightarrow{d} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} f_{k_1\dots k_m} \prod_{j=1}^{\infty} H_{v_j(k_1,\dots,k_m)}(\tau_j), \tag{2}$$

где $\{\tau_j\}$ – последовательность независимых стандартных нормальных величин, $v_j(k_1, \dots, k_m)$ – количество индексов среди $k_1, \dots, k_m$, равных j, а $H_k(x)$ – полиномы Эрмита, определяемые с помощью рекуррентного соотношения

$$H_0(x) \equiv 1, \; H_1(x) = x,$$

$$H_{n+1} = xH_n(x) - nH_{n-1}(x), \quad \forall n \geq 1.$$

Перенос отмеченной выше предельной теории на зависимые наблюдения в последней четверти прошлого века был связан, главным образом, с каноническими статистикам второго порядка, в частности, с квадратом евклидовой нормы суммы центрированных гильбертовозначных случайных величин (А.Н. Тихомиров, [5], [6]; и др.).

И.С. Борисовым и Н.В. Володько [2] был получен аналог предельного соотношения (2) при любом m для наблюдений с условиями α- и φ-перемешивания. Эти результаты послужили толчком в исследовании функциональной сходимости рассматриваемых семейств статистик сразу для целых наборов $\{U_k,\, k = 1, \ldots, n\}$ и $\{V_k,\, k = 1, \ldots, n\}$.

Цель работы:

1. Доказать функциональную предельную теорему для последовательности U- и V-процессов от стационарно связанных наблюдений с условием α- или φ-перемешивания.

2. Получить экспоненциальные оценки для хвоста распределения равномерной нормы U- и V-процессов с каноническими ограниченными ядрами от независимых и слабо зависимых выборочных наблюдений.

Научная новизна. В диссертации получены функциональные предельные теоремы – *принципы инвариантности* – для последовательностей U- и V-процессов произвольного порядка с каноническими ядрами, которые заданы на выборках растущего объема из последовательности стационарно связанных наблюдений с условием α- или φ-перемешивания. Ранее в работах ряда авторов (А.Ф. Ронжин, [3]; Г. Делинг, М, Денкер, У. Филипп, [9]) подобные результаты были получены только для независимых наблюдений.

Кроме того, в диссертации получены экспоненциальные оценки для хвоста распределения равномерной нормы V-процессов с каноническими ограниченными ядрами, построенных как по независимым, так и слабо зависимым наблюдениям. Близкие результаты в случае независимых наблюдений ранее были получены в работах Э. Жине и М. Арконеса [7], П. Майора [12] и др. Для одномерных проекции U- и V-процессов для наблюдений, удовлетворяющих условию φ-перемешивания, аналогичные результаты получены И.С. Борисовым и Н.В. Володько [8].

Методы исследований. В работе использованы разнообразные методы теории случайных процессов, теорема Прохорова, моментные неравенства для максимума частичных сумм слабо зависимых случайных величин, метод диадических цепочек, элементы теории ортогональных рядов и др.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы для построения статистических критериев для проверки тех или иных гипотез касательно неизвестного распределения стационарно связанных наблюдений.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на объединенном семинаре кафедры теории вероятностей и математической статистики НГУ и лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН под руководством академика А. А. Боровкова. Результаты работы также докладывались на следующих международных конференциях:

1) XLVII Международная научная студенческая конференции (Новосибирск, 2009);

2) V-th Conference «Limit Theorems in Probability Theory and Their Applications» (Новосибирск, 2011);

3) Third Northern Triangular Seminar (Санкт-Петербург, 2011).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в [15] и [16] в журналах, входящих в список ВАК для кандидатских и докторских диссертаций, а также анонсированы в [17] – [19]. Все результаты получены совместно с научным руководителем. Вклады авторов равноправны.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Объём диссертации составляет 71 страницу. Список литературы содержит 37 наименований.

Основные результаты диссертации.

1) Доказаны принципы инвариантности для канонических U- и V-процессов произвольного порядка, заданных на выборках растущего объема из последовательности стационарно связанных наблюдений с условием α- или φ-перемешивания. Соответствующий предельный процесс описывается в виде полиномиальной формы от последовательности зависимых винеровских процессов, которые представляют собой сечения двупараметрического гауссовского поля с известной ковариацией.

2) Получены экспоненциальные оценки для хвоста распределения равномерной нормы V-процессов с каноническими ограниченными ядрами, построенных по слабо зависимым наблюдениям. За исключением случай α-перемешивания все константы в этих неравенствах выписаны явно. Для d-зависимых и φ-перемешивающихся наблюдений зависимость от уровня уклонений в показателе экспоненты оптимальна. В силу известной двойственности между U- и V-статистиками эти результаты переносятся и на U-процессы.

Краткое содержание работы

Во **Введении** даётся обзор результатов по теме исследований, обсуждается содержание диссертации по главам, а также вводятся определения и дополнительные условия для формулировки основных теорем.

В работе рассматриваются стационарные последовательности $\{X_i\}$, удовлетворяющие условию α-, φ- или ψ-перемешивания. Некоторые результаты будут получены для независимых или d-зависимых наблюдений. Напомним определения последовательностей случайных величин с перемешиванием. Обозначим через $\mathfrak{M}_j^k$, где $j \le k$, σ-алгебру событий, порожденную случайными величинами $X_j, ..., X_k$.

Определение. Последовательность $X_1, X_2, ...$ удовлетворяет условию

1) α-перемешивания, если

$$\alpha(i) := \sup_{k\ge 1} \sup_{A\in\mathfrak{M}_1^k, B\in\mathfrak{M}_{k+1}^\infty} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \to 0 \text{ при } i\to\infty;$$

2) φ-перемешивания, если

$$\varphi(i) := \sup_{k\ge 1} \sup_{A\in\mathfrak{M}_1^k, B\in\mathfrak{M}_{k+1}^\infty, \mathbf{P}(A)>0} \left| \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} - \mathbf{P}(B)\right| \to 0 \text{ при } i\to\infty;$$

3) ψ-перемешивания, если

$$\psi(i) := \sup_{k\ge 1} \sup_{A\in\mathfrak{M}_1^k, B\in\mathfrak{M}_{k+1}^\infty, \mathbf{P}(A)>0, \mathbf{P}(B)>0} \left| \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} - 1\right| \to 0 \text{ при } i\to\infty.$$

Очевидные неравенства

$$\psi(i) \ge \varphi(i) \ge \alpha(i)$$

естественным образом упорядочивают эти три вида перемешивания.

При переходе от независимых наблюдений к зависимым возникает принципиальная сложность: после подстановки в тождество (1) вместо переменных $(z_1, ..., z_m)$ набора зависимых случайных величин $(X_1, ..., X_m)$ равенство в (1) может нарушаться с положительной вероятностью.

Введем следующие два ограничения, каждое из которых обеспечивает указанную возможность замены в (1) неслучайных переменных на случайные. Впервые эти ограничения появились в 2008 году в статье И.С. Борисова и Н.В. Володько [2].

(AC) *Для любого набора попарно-различных индексов* $(j_1, ..., j_m)$ *распределение вектора* $(X_{j_1}, ..., X_{j_m})$ *абсолютно непрерывно относительно распределения вектора* $(X_1^*, ..., X_m^*)$.

(BC) *Каноническое ядро* $f(z_1, ..., z_m)$ *непрерывно всюду на* $\mathbb{X}^m$, *при этом все базисные элементы* $e_k(z)$ *в* (1) *непрерывны и равномерно по* z *и* k *ограничены положительной константой* c_o.

В первом случае, условие

$$B(f) := \sum_{k_1=1}^{\infty} ... \sum_{k_m=1}^{\infty} |f_{k_1...k_m}| < \infty \tag{3}$$

влечет за собой п.н. сходимость ряда (1) относительно распределения вектора $(X_1^*, ..., X_m^*)$. Следовательно при выполнении условия (AC) отмеченная сходимость имеет место и почти наверное относительно распределения случайного вектора $(X_{j_1}, ..., X_{j_m})$. Другими словами, при выполнении (AC) в тождество (1) вместо переменных $z_1, ..., z_m$ можно подставить случайные величины $X_{j_1}, ..., X_{j_m}$ для любых попарно различных индексов $j_1, ..., j_m$.

При выполнении условия (3) в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, ограничения в (BC) влекут за собой непрерывность кратного ряда в (1). Нетрудно видеть, что в этом случае равенство в (1) превращается в тождество по всем переменным $z_1, ..., z_m$, поскольку равенство двух непрерывных функций на всюду плотном множестве влечет за собой их равенство всюду. Стало быть, вместо переменных $z_1, ..., z_m$ в тождестве (1) можно подставить произвольно связанные наблюдения, скажем, тождественно совпадающие.

В первой главе диссертации сформулированы и доказаны принципы инвариантности для последовательности U- и V-статистик, т.е. функциональные предельные теоремы для случайных процессов $U_n(t)$ и $V_n(t)$, построенных по выборкам из стационарных последовательностей наблюдений с условиями α- или φ-перемешивания. Для представления фигурирующих в этих теоремах предельных случайных процессов определим двупараметрический центрированный гауссовский процесс (поле) $\gamma(t, k)$, $t \in [0, 1]$, $k \in \mathcal{N}$, с ковариацией

$$\mathbf{E}\gamma(t_1, k)\gamma(t_2, l) = \\ = \min(t_1, t_2) \left(\delta_{l,k} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E}e_k(X_1)e_l(X_{j+1}) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E}e_l(X_1)e_k(X_{j+1}) \right), \tag{4}$$

где $\delta_{l,k}$ – символ Кронекера. Отметим, что в условиях нижеследующих теорем ряды в (4) абсолютно сходятся. Очевидно, что при любом фиксированном k гауссовский процесс

$$w_k(t) := \gamma(t, k) \tag{5}$$

будет винеровским (стандартным для независимых X_i). Тем самым, случайное поле $\gamma(t, k)$ можно интерпретировать как последовательность *зависимых* винеровских процессов $\{w_k(t);\ k \in \mathcal{N}\}$ с известным совместным распределением, определяемым соотношением (4). Отметим, что в случае независимых наблюдений $\{X_i\}$ оба ряда в (4) исчезают в силу уже отмеченных свойств выбранного ортонормированного базиса $\{e_k(\cdot)\}$, и случайные процессы $\{w_k(t);\ k \in \mathcal{N}\}$ в (5) будут независимыми стандартными винеровскими.

В дальнейшем мы не будем каждый раз оговаривать, что скобка в правой части (4) при $k = l$ должна быть строго положительной. Иначе дисперсия случайной величины $w_k(t)$ в (4) (при $k = l$ и $t_1 = t_2 = t$) обращается в ноль при всех $t \in [0,1]$, т.е. соответствующий случайный процесс в левой части (4) будет вырожденным. Иными словами, нам будет удобно допускать в (4) и далее вырожденность в нуле тех или иных случайных процессов $w_i(\cdot)$ в (5), тем самым мы добавляем к классу гауссовских случайных процессов вырожденные – тождественные нули на отрезке $[0,1]$. Нулевая константа здесь интерпретируется как центрированная гауссовская случайная величина с нулевой дисперсией, т.е. с параметрами $(0,0)$, и эта константа является предельной точкой класса центрированных гауссовских распределений в топологии слабой сходимости. Отметим, что в теории суммирования зависимых случайных величин подобные эффекты не являются необычными.

Введем в рассмотрение случайные процессы

$$U(t) := \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_m=1}^{\infty} f_{k_1 \dots k_m} t^{m/2} \prod_{j=1}^{\infty} H_{v_j(k_1,\dots,k_m)}(t^{-1/2} w_j(t)), \tag{6}$$

$$V(t) := \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_m=1}^{\infty} f_{k_1 \dots k_m} w_{k_1}(t) \cdots w_{k_m}(t), \tag{7}$$

где последовательность винеровских процессов определена в (5).

В случае независимых наблюдений $\{X_i\}$ функциональные предельные теоремы для последовательностей U- и V-статистик – *принципы инвариантности* – были доказаны в работах А.Ф. Ронжина [3] и М. Денкера, Х. Делинга и У. Филиппа [9], где соответственно установлено, что при $n \to \infty$

$$U_n(\cdot) \xrightarrow{d} U(\cdot), \tag{8}$$

$$V_n(\cdot) \xrightarrow{d} V(\cdot); \tag{9}$$

здесь слабая сходимость понимается в метрическом пространстве $D[0,1]$ с классической метрикой Скорохода. Отметим, что для п.н. непрерывных предельных случайных процессов мы будем использовать несколько иной вариант слабой сходимости, предложенный А.А. Боровковым в 1980 году.

Определение. Будем говорить, что последовательность случайных процессов $\{\eta_n(\cdot)\}$ с траекториями из $D[0,1]$ *C-сходится* к предельному процессу $\eta(\cdot)$ с п.н. непрерывными траекториями, если для любого измеримого в $D[0,1]$ функционала $g(\cdot)$, непрерывного в точках пространства $C[0,1]$, последовательность случайных величин $g(\eta_n)$ сходится по распределению к случайной величине $g(\eta)$.

Основные результаты первой главы переносят предельные соотношения (8) и (9) на случай зависимых наблюдений с условиями α- и φ-перемешивания.

Будем предполагать, что в случае (AC) ортонормированный базис $\{e_j(t)\}$ в (1) удовлетворяет следующим дополнительным ограничениям, используемым при доказательстве предельных теорем только для U-процессов в случае φ-перемешивания:

$$\sup_i \mathbf{E}|e_i(X_1)|^m < \infty. \tag{10}$$

При условии α-перемешивания будем предполагать, что выполнено условие (BC) и коэффициент перемешивания убывает экспоненциально быстро. т.е. при всех $k \geq 0$

$$\alpha(k) \leq ce^{-bk}, \tag{11}$$

где $c \geq 1$ и $b > 0$ – некоторые постоянные.

Основными результатами первой главы являются следующие две теоремы. Первая из них описывает предельное распределение последовательности U-процессов, а вторая — V-процессов.

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из двух условий*:

1) *стационарная последовательность* $\{X_i\}$ *удовлетворяет условию* α-*перемешивания с ограничением* (11);

2) *стационарная последовательность* $\{X_i\}$ *удовлетворяет условию* φ-*перемешивания с ограничением* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(k) < \infty$.

Кроме того, пусть каноническое ядро $f \in L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$ *удовлетворяет условию* (3), *и выполнено либо условие* (BC), *либо в случае* φ-*перемешивания условие* (BC) *может быть заменено на условие* (AC) *с ограничением* (10).

Тогда последовательность случайных процессов $\{U_n(\cdot)\}$ C-*сходится к п.н. непрерывному процессу* $U(\cdot)$, *определенному в* (4)–(6).

Теорема 2. *Пусть выполнено одно из двух условий* 1) *или* 2) *теоремы* 1. *Кроме того, пусть для канонического ядра* $f \in L_2(\mathbb{X}^m, F^m)$ *выполнены условия* (3) *и* (BC).

Тогда последовательность случайных процессов $\{V_n(\cdot)\}$ C-*сходится к п.н. непрерывному процессу* $V(\cdot)$, *определенному в* (4), (5), (7).

Во второй главе диссертации получены экспоненциальные оценки для хвоста распределения равномерной нормы V-процессов для независимых и слабо зависимых наблюдений. Отметим, что между U- и V-статистиками существует своеобразная двойственность: каждая U-статистика может быть представлена в виде конечной линейной комбинации V-статистик убывающих порядков, и наоборот. Более того, изучение невырожденных U- и V-статистик может быть сведено к анализу канонических статистик. Так что получая оценки для хвоста распределения для одного класса статистик, мы тем самым получаем аналогичные оценки и для другого класса. Вопрос заключается лишь в вычислении соответствующих констант, если они представляют интерес для исследователя.

В случае независимых наблюдений $\{X_i\}$ одной из первых работ по экспоненциальным неравенствам интересующего нас типа является статья В. Хёфдинга [11], в которой для невырожденных U-статистик при всех $x \geq 0$ была доказана следующая оценка:

$$\mathbf{P}(U_n - \mathbf{E}U_n \geq x) \leq e^{-2kx^2/(b-a)^2}, \tag{12}$$

где $a \leq f(\cdot, ..., \cdot) \leq b, \quad k = [n/m]$,

$$U_n = \frac{(n-m)!}{n!} \sum_{1 \leq i_1 \neq ... \neq i_m \leq n} f(X_{i_1}, ..., X_{i_m}).$$

Стоит отметить, что главный по порядку член в представлении любой центрированной U-статистики с невырожденным ограниченным ядром представляет собой сумму независимых центрированных и ограниченных случайных величин, для которой также справедлива оценка вида (12).

В работе И.С. Борисова [1] для независимых наблюдений $\{X_i\}$ были получено аналоги неравенств Бернштейна и, как следствие, – Хёфдинга для канонических V-статистик в случае, когда каноническое ядро имеет мажоранту с разделяющимися переменными:

$$|f(z_1, ..., z_m)| \leq \prod_{i \leq m} g(z_i), \tag{13}$$

где функция $g(t)$ удовлетворяет условию С.Н. Бернштейна:

$$\mathbf{E}(g(X_1))^k \leq \sigma^2 L^{k-2} k!/2 \text{ для всех } k \geq 2.$$

где σ и L – некоторые положительные постоянные. В этом случае имеет место следующий аналог неравенства Бернштейна:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |V_n(t)| \geq x\right) \leq c_1 \exp\left\{-\frac{c_2 x^{2/m}}{\sigma^2 + L x^{1/m} n^{-1/2}}\right\}, \tag{14}$$

где постоянные c_1 и c_2 зависят только от m. При этом, как было отмечено в [1], неравенство (14) в известном смысле неулучшаемо. Легко видеть, что если

$$\sup_{z_i} |f(z_1, \ldots, z_m)| = B < \infty,$$

то в (13) и (14) можно положить $g(\cdot) = \sigma = L = B^{1/m}$. Поскольку в этом случае нам достаточно рассмотреть в (14) только зону уклонения $|x| \leq Bn^{m/2}$ (в противном случае левая часть (14) обращается в ноль), то из (14) при всех $x \geq 0$ немедленно следует оценка

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq t\leq 1} |V_n(t)| \geq x\right) \leq c_1 \exp\left\{-\frac{c_2}{2}(x/B)^{2/m}\right\}, \tag{15}$$

которая является аналогом неравенства Хёфдинга (12) (при соответствующей перенормировке) для m-й степени суммы независимых одинаково распределенных центрированных и ограниченных случайных величин – простейшему примеру канонической V-статистики порядка m.

В случае независимых наблюдений $\{X_i\}$ отметим также работу М. Арконеса и Э. Жине [7], в которой рассматривались канонические U-статистики с ограниченными ядрами и был получен несколько более слабый аналог неравенства Бернштейна (14), но без условия (13). Позднее неравенство Арконеса–Жине было улучшено в тех же условиях П. Майором [12]. Отметим также работу П.С. Рузанкина [4], где по сути было предложено несколько иное доказательство основного результата в [1].

Говоря о зависимых наблюдениях, упомянем работу И.С. Борисова и Н.В. Володько [8], в которой получены аналогичные (15) экспоненциальные оценки для распределений канонических V-статистик (в наших обозначениях — для $V_n(1)$), построенных по стационарным последовательностям наблюдений с условием φ-перемешивания.

Цель второй главы диссертации состоит в доказательстве экспоненциальных неравенств вида (15) для *равномерной нормы* V-процессов, построенных по последовательностям с перемешиванием. При этом самая сильная форма перемешивания – ψ-перемешивание – в полной мере задействована не будет. При выводе неравенств для равномерной нормы введенных процессов, построенных по последовательностям с φ-перемешиванием, мы рассмотрим два варианта показательных оценок, в одном из которых будет дополнительно предполагаться, что $\psi(d) < 1$ для некоторого натурального d. При этом мы не будем требовать, чтобы $\psi(k) \to 0$ при $k \to \infty$. Кроме того, будут получены равномерные неравенства для уклонений V-процессов в случае d-зависимых и независимых последовательностей наблюдений.

Основными результатами второй главы являются следующие две теоремы.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (BC)*. Пусть, кроме того, выполнено одно из следующих условий*:
(*i*) $\{X_i;\, i \geq 1\}$ — *независимые случайные величины.*
(*ii*) $\{X_i;\, i \geq 1\}$ — d*-зависимые случайные величины.*
(*iii*) $\{X_i; i \in \mathbb{Z}\}$ *образуют стационарную последовательность случайных величин, удовлетворяющую условию* φ*-перемешивания, причем*

$$\bar{\varphi} := \sum_{k \geq 1} \varphi(k) < \infty.$$

(*iv*) *В условиях* (*iii*) *дополнительно предполагается, что* $\psi(d) < 1$ *для некоторого натурального* d.

Тогда для любого $x \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |V_n(t)| > x\right) \leq A \exp\left\{-\frac{x^{2/m}}{2eL^2 B^{2/m}(f)}\right\}, \tag{16}$$

где

в случае (*i*): $A = 2\sqrt{e},\ L = c_o$,

в случае (*ii*): $A = 2\sqrt{e}(d+1),\ L = c_o\sqrt{d+1}$,

в случае (*iii*): $A = e^3$, $L = 24c_o(e\bar{\varphi})^{1/2}$,

в случае (*iv*): $A = 6\sqrt{e}\frac{1+\psi(d)}{1-\psi(d)} \exp\left\{\frac{c_o^2(d-1)^2}{C_1^2(e/2+1/4)}\right\}$, $C_1^2 = 8c_o^2\sum_{j=0}^{n-1}(n-j)\varphi(j)$ *и* $L = 2c_o\sqrt{\bar{\varphi}(e/2+1/4)}$.

Отметим, что константа L в правой части (16) в случае (*iv*) существенно меньше, чем в случае (*iii*).

Теорема 6. *Пусть* $\{X_i\}$ – *стационарная последовательность случайных величин, удовлетворяющая условию* α*-перемешивания с ограничением* (11)*. Кроме того, пусть ядро* $f(\cdot)$ *удовлетворяет условию* (BC)*. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |V_n(t)| > x\right) \leq A_2 \exp\left\{-\frac{C_2 x^{1/(2m)}}{B(f)^{1/(2m)}}\right\}, \tag{17}$$

где A_2 *и* C_2 — *некоторые положительные постоянные* (*неявные*).

Показатель экспоненты в (17) как функция от x существенно хуже оптимального показателя в (16). Вопрос о возможности сокращения этого зазора остается открытым.

В **Заключении** перечисляются основные результаты диссертации.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Игорю Семеновичу Борисову за предложенную интересную тему исследования, внимание к работе, помощь и ценные советы.

Список литературы

1. *Борисов И.С.* Аппроксимация распределений статистик Мизеса с многомерными ядрами. *Сиб. Матем. Журн.*, 1991, **32**, 20-35.

2. *Борисов И.С., Володько Н.В.* Ортогональные ряды и предельные теоремы для канонических U- и V-статистик от стационарно связанных наблюдений. *Математ. Труды*, 2008, **11**, 25-48.

3. *Ронжин А.Ф.* Функциональные предельные теоремы для U-статистик. *Матем. заметки*, 1986, **40**, No. 5, с. 886-893.

4. *Рузанкин П.С.* Об экспоненциальных неравенствах для канонических V-статистик. *Сиб. Электр. Матем. Извест.*, 2014, **11**, 70-75.

5. *Тихомиров А.Н.* О точности нормальной аппроксимации вероятности попадания в шар сумм слабо зависимых гильбертовозначных случайных величин. I. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1991, **36**, в. 4, с. 699-710.

6. *Тихомиров А.Н.* О точности нормальной аппроксимации вероятности попадания в шар сумм слабо зависимых гильбертовозначных случайных величин. II. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1993, **38**, в. 1, с. 110-127.

7. *Arcones M.A., Gine E.* Limit theorems for U-processes. *Ann. Probab.*, 1993, **21**, 1494-1542.

8. *Borisov I.S., Volodko N.V.* A note on exponential inequalities for the distribution tails of canonical Von Mises' statistics of dependent observations. *Statist. Probab. Lett.*, 2015, **96**, 287-291.

9. *Dehling H., Denker M., Philipp W.* The almost sure invariance principle for the empirical process of U-statistic structure. – *Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist.*, 1987, **23**, No. 2, p. 121-134.

10. *Hoeffding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution. *Ann. Math. Statist.*, 1948, **19**, p.293-325.

11. *Hoeffding W.* The strong law of large numbers for U-statistics. *Inst. Statist. Mimeo Ser.*, 1961, **302**, 1-10.

12. *Major P.* On a multivariate version of Bernstein's inequality. *Electronic J. of Probab.*, 2007, **12**, 966-988.

13. *Rubin H., Vitale R.* Asimptotic distribution of symmetric statistics. – *Ann. Statist.*, 1980, **8**, No. 1, p. 165-170.

14. *Von Mises R.* On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions. *Ann. Math. Statist.*, 1947, **18**, p. 309-348.

Публикации по теме диссертации

15. *Борисов И.С., Жечев В.А.* Функциональная предельная теорема для канонических U-процессов от зависимых наблюдений. *Сиб. Матем. Жур.*, 2011, **52**, в. 4, с. 754–764.

16. *Борисов И.С., Жечев В.А.* Принцип инвариантности для канонических U- и V-статистик от зависимых наблюдений. *Математ. Труды*, 2013, **16**, в. 1, с. 28–44.

17. *Жечев В.А.* Функциональная предельная теорема для канонических U и V-статистик, *XLVII Международная научная студенческая конференции.*, Тезисы докладов, НГУ, Новосибирск, 2009, с. 202–203.

18. *Borisov I.S, Zhechev. V.A.* The functional limit theorem for canonical U-processes of dependent observations — *V-th Conference "Limit Theorems in Probability Theory and Their Applications"*, Novosibirsk, August 15–21, 2011; Abstracts of Communications, p. 11.

19. *Zhechev V.A.* The functional limit theorem for canonical U-processes of dependent observations. *Third Northern Triangular Seminar*, St. Petersburg, April 11–13, 2011; Programme and Abstracts, p. 23.