На правах рукописи

Шушпанов Михаил Павлович

СВОБОДНО 3-ПОРОЖДЁННЫЕ РЕШЁТКИ С ЭЛЕМЕНТАМИ ДИСТРИБУТИВНОГО И МОДУЛЯРНОГО ТИПОВ СРЕДИ ПОРОЖДАЮЩИХ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Научный руководитель:
Гейн Александр Георгиевич, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:
Швидефски Марина Владимировна, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник.
Коробков Сергей Самсонович, кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Уральский государственный педагогический университет», доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики.

Ведущая организация:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Защита диссертации состоится «__» ____ 2018 г. в ____ на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Академика Коптюга 4. г. Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан «__» ____ 2018 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент А.И. Стукачев

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы. С момента возникновения теории решёток в классических работах Г. Биркгофа, Р. Дедекинда, О. Оре и других математиков внимание в первую очередь было уделено решёткам двух важных классов – классу дистрибутивных решёток и классу модулярных решёток, определяемых посредством тождества дистрибутивности и квазитождества модулярности, соответственно. В последующем изучались элементы решёток, которые в той или иной степени аккумулировали в себе свойство дистрибутивности. Так, Г. Биркгоф [3] определил нейтральный элемент как такой элемент решётки, который в совокупности с любыми двумя другими элементами порождает дистрибутивную подрешётку, определения дистрибутивного и стандартного элементов используют тождество дистрибутивности.

Приведём основные определения, указывая, кому они принадлежат.

Определение 1. ([7]) Элемент d решётки L называется *дистрибутивным*, если

$$\forall x, y \in L\colon d \vee (x \wedge y) = (d \vee x) \wedge (d \vee y).$$

Определение 2. ([5]) Элемент d решётки L называется *стандартным*, если

$$\forall x, y \in L\colon x \wedge (y \vee d) = (x \wedge y) \vee (x \wedge d).$$

Определение 3. Элемент d решётки L называется *нейтральным*, если

$$\forall x, y \in L\colon (x \wedge y) \vee (y \wedge d) \vee (d \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee d) \wedge (d \vee x).$$

Эквивалентность этого определения упомянутому выше определению нейтрального элемента, предложенному Г. Биркгофом, доказана Г. Гретцером [4].

Отметим, что свойство «быть нейтральным элементом» самодвойственно. Для других свойств естественно возникают двойственные понятия.

Определение 4. Элемент называется *кодистрибутивным* (*костандартным*), если он дистрибутивен (соответственно, стандартен) в двойственной решётке.

Для краткости будем говорить, что элемент является *элементом дистрибутивного типа*, если он обладает каким-либо свойством из определений 1 – 4 или комбинацией таких свойств.

Обширную информацию об элементах дистрибутивного типа, показывающих естественность и необходимость их изучения можно найти, например, в [1] и [11].

Легко видеть, что определения элементов дистрибутивного типа получены по одной схеме – в равенстве, выражающем закон дистрибутивности, квантор всеобщности применяется только к двум элементам из трех, и оставшийся свободным третий элемент, для которого оказывается истинным сконструированное таким образом высказывание, и получает соответствующее название.

Если в тождестве дистрибутивности зафиксировать не один элемент, а два, то получаем определение *дистрибутивной пары* (О. Оре [9]). Аналогичный подход естественно применить, используя квазитождество модулярности.

Определение 5. ([15]) Пара элементов (a, b) решётки L называется *модулярной*, если

$$\forall x \in L\colon x \leq b \to x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b.$$

Если в этом определении применить квантор всеобщности еще к одному элементу – a или b, то возникают понятия левомодулярного и правомодулярного элементов [11].

Определение 6. Элемент a решётки L называется *левомодулярным*, если для любого элемента b из L пара (a, b) модулярна.

Определение 7. Элемент b решётки L называется *правомодулярным*, если для любого элемента a из L пара (a, b) модулярна.

Свойство «быть левомодулярным элементом» самодвойственно, что не имеет места для правой модулярности.

Определение 8. Элемент называется *коправомодулярным*, если он правомодулярен в двойственной решётке.

Для краткости будем говорить, что элемент является *элементом модулярного типа*, если он обладает каким-либо свойством из определений 6 – 8 или комбинацией таких свойств.

Элементы модулярного типа (под разными названиями) изучались О. Оре [8], С. Бхаттой [2], Г. Гретцером и Е. Шмидтом [6], Г. Цассенхаузом [16] и др. Особое внимание уделялось элементам, которые одновременно левомодулярны и коправомодулярны. Это объясняется тем, что в решётке подгрупп (подколец) произвольной группы (произвольного кольца) нормальные подгруппы (двусторонние идеалы) как раз являются такими элементами, хотя обратное утверждение неверно. Оказалось, что многие свойства нормальных подгрупп (идеалов) связаны не с групповыми (кольцевыми) операциями, а с указанными свойствами этих подгрупп (подколец) как элементов решётки подгрупп (подколец). Можно сказать, что переход от свойств решётки в целом к свойствам отдельных элементов локализует эти свойства, позволяя в тоже время достаточно эффективно выстраивать структурную теорию решёток, в которых элементы с такими свойствами имеются. Яркими примерами могут служить такие теоремы, как теорема Куроша-Оре и лемма Цассенхауза «о бабочке», которые показали, что именно этими решёточными свойствами обусловлены важные факты строения групп и колец. В представленной диссертационной работе доказан ряд новых утверждений, позволяющих вскрыть решёточную природу некоторых групповых и кольцевых феноменов. Название для элементов с указанным сочетанием свойств было предложено А. Г. Курошем.

Определение 9. Элемент называется *дедекиндовым*, если он одновременно левомодулярен и коправомодулярен.

О. Оре [8] такой элемент называл полунормальным; в более поздних работах ([10], [12]) его нередко называли модулярным. Одно из важных свойств дедекиндовых элементов, доказанное в [8], состоит в том, что отображение $\varphi_b: x \to x \wedge b$ оказывается изоморфизмом интервалов $[a, a \vee b]$ и $[a \wedge b, b]$ при любом b, тогда и только тогда, когда элемент a дедекиндов.

Свойство «быть дедекиндовым элементом» не самодвойственно, поэтому естественно

Определение 10. Элемент называется *кодедекиндовым*, если он дедекиндов в двойственной решётке.

Г. Гретцер и Е. Шмидт в [6] показали, что любой нейтральный элемент является стандартным, а любой стандартный – дистрибутивным. В то же время не трудно проверить, что любой дистрибутивный элемент является коправомодулярным, а любой стандартный элемент является также левомодулярным и, следовательно, дедекиндовым. Таким образом естественно возникает частичный порядок на совокупности рассматриваемых нами свойств. Этот порядок иллюстрируется рисунком 1, на котором стрелками показаны направления от более сильного свойства к более слабому.

Обращения стрелок в том или ином смысле тоже имеют место. Некоторые из них очевидны из определений, другие следуют из описания свойств стандартных и нейтральных элементов, приведённых, например, в [6]. В частности, элемент стандартен тогда и только тогда, когда он дистрибутивен и левомодулярен. Элемент нейтрален тогда и только тогда, когда он дистрибутивен, левомодулярен и кодистрибутивен.

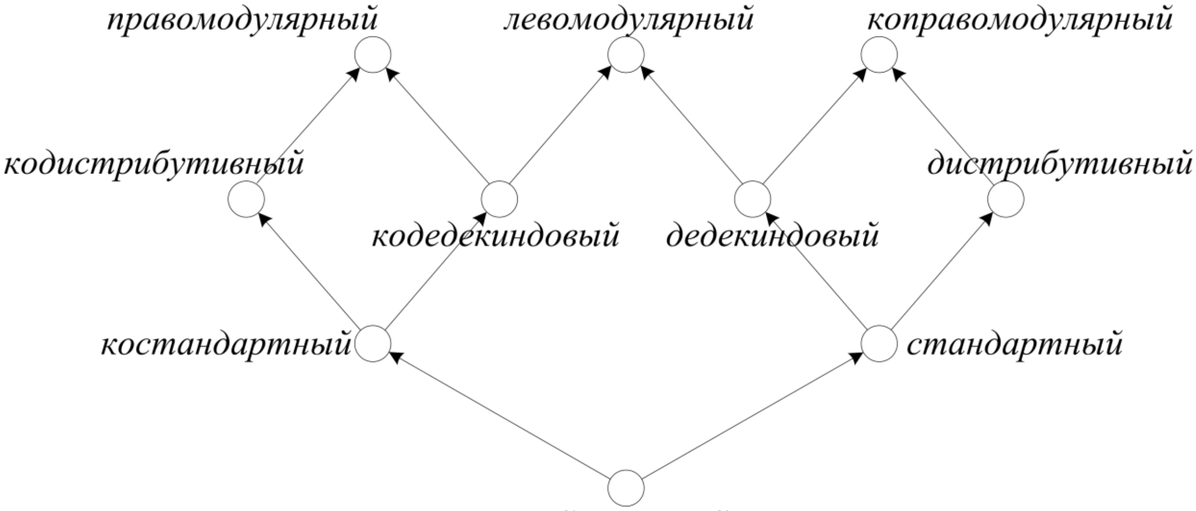

Рис. 1: частичный порядок на совокупности рассматриваемых свойств

Ради краткости мы введем рабочие термины для ещё двух вариантов комбинаций свойств.

Определение 11. Элемент называется *вполне правомодулярным*, если он правомодулярен и коправомодулярен.

Определение 12. Элемент называется *вполне модулярным*, если он правомодулярен, левомодулярен и коправомодулярен.

Отсутствие совпадений среди свойств, указанных в определениях 6 – 12, по-видимому, считается очевидным. В связи с этим отметим, что оно легко высматривается также и из результатов нашей работы.

Элементы модулярного и дистрибутивного типов под общим названием «специальные элементы решётки» изучались в работах [13, 14]. Нам, однако, будет удобно различать элементы модулярного и дистрибутивного типов.

При изучении конечнопорождённых алгебр значительное внимание уделяется влиянию свойств порождающих элементов на свойства алгебры в целом. Именно при изучении этого вопроса возникло понятие нейтрального элемента; С. Бхатта [2] определил *M*-нейтральный элемент (модулярный аналог нейтрального элемента) как такой элемент решётки, который в совокупности с любыми двумя другими элементами порождает модулярную подрешётку; Г. Гретцер и Е. Шмидт [6] доказали, что 3-порождённая решётка, у которой два порождающих стандартны, дистрибутивна.

Отмеченные результаты о дистрибутивности 3-порожденных решёток, у которых среди порождающих имеется нейтральный элемент или два стандартных, делают естественным вопрос: наличие каких элементов дистрибутивного и модулярного типов среди порождающих гарантируют дистрибутивность или модулярность 3-порождённой решётки.

В модулярной решётке любой элемент является вполне модулярным, но может не быть элементом дистрибутивного типа, вместе с тем в дистрибутивной решётке каждый элемент нейтрален, поэтому при отсутствии элементов дистрибутивного типа естественно интересоваться модулярностью решётки, а при наличии элементов дистрибутивного типа естественно интересоваться дистрибутивностью решётки.

В диссертации рассматриваются тройки элементов с условием, что в тройке присутствуют элементы дистрибутивного и модулярного типов. Наличие частичного порядка на совокупности свойств элементов индуцирует частичный порядок на тройках элементов: будем говорить, что одна тройка сильнее другой, если есть перестановка элементов в одной из троек, что свойства первого элемента первой тройки влекут наличие свойств первого элемента второй тройки, свойства второго элемента первой тройки влекут наличие свойств второго элемента второй тройки, и свойства третьего элемента первой тройки влекут наличие свойств третьего элемента второй тройки. При этом отметим, что для одного или двух элементов тройки может вообще не предполагаться наличие рассматриваемых свойств.

Если какая-либо тройка элементов порождает дистрибутивную решётку, то и все более сильные тройки также порождают дистрибутивную решётку, если какая-либо тройка элементов порождает модулярную решётку, то и все более сильные тройки также порождают модулярную решётку. Эти наблюдения приводят к постановке следующих двух задач.

Задача 1. Найти все минимальные по силе тройки с элементами модулярного типа, гарантирующие модулярность порождаемой ими решётки.

Задача 2. Найти все минимальные по силе тройки с элементами дистрибутивного и модулярного типов, гарантирующие дистрибутивность порождаемой ими решётки.

Решение этих задачи может служить базой для исследования модулярности или дистрибутивности решёток с большим числом порождающих.

Ответ, полученный в диссертации при решении задачи 1, показывает, что не каждая тройка с элементами модулярного типа порождает модулярную решётку. Поскольку любая 3-порожденная модулярная решётка конечна, а свободная решётка ранга 3 и свободная модулярная решётка ранга 4 бесконечны, возникает естественный вопрос, когда будет конечной 3-порожденная решётка, у которой среди порождающих есть элементы модулярного типа.

Задача 3. Найти все минимальные по силе тройки с элементами модулярного типа, порождающие конечную решётку.

В ходе исследования выяснилось, что некоторые 3-порождённые решётки с элементами модулярного типа среди порождающих могут быть заданы конечным числом определяющих соотношений. Поэтому изучение 3-порождённых решёток, заданных тем или иным конечным набором определяющих соотношений, выступает важным инструментом для решения поставленных задач 1 – 3. Эти исследования выполнены в главе 1.

Для решения задачи 3 оказалось полезным введённое нами понятие свободно порождённой решётки, порождающие элементы которой обладают заданными свойствами. Оно является аналогом определения свободной решётки, порождённой частично упорядоченным множеством [1, с. 55].

Определение 13. Свободно порождённой решёткой с заданными свойствами порождающих элементов будем называть решётку F, порождённую множеством X, некоторые элементы которого обладают какими-либо заданными свойствами (не обязательно одними и теми же для разных элементов) в решётке F, и удовлетворяющую следующему условию:

если φ – некоторое отображение множества X в произвольную решётку L, причём для каждого элемента $x \in X$ образ $\varphi(x)$ обладает теми же свойствами, что и элемент x, то φ продолжается до гомоморфизма решётки F в решётку L.

В данной работе под свойствами порождающих элементов понимается наличие элементов дистрибутивного и модулярного типов среди порождающих.

В ряде случаев удаётся предъявить конечную решётку, которая является свободно 3-порождённой решёткой с элементами дистрибутивного и модулярного типа среди порождающих. В других случаях возникает вопрос существования таких решёток. В главе 2 показано существование свободно порождённых решёток с элементами модулярного типа среди порождающих. Отметим, что достаточные условия существования свободно порождённой решётки с заданными свойствами порождающих элементов иные, нежели критерий существования свободной решётки, порождённой частично упорядоченным множеством, сформулированный в [1, с. 55].

И модулярность, и дистрибутивность, и конечность сохраняются при гомоморфизмах, поэтому при решении задач 1-3 достаточно отвечать на вопрос, является ли модулярной, дистрибутивной или конечной решётка, свободно порождённая рассматриваемой тройкой.

Цели и задачи исследования. Изучить свободно 3-порождённые решётки, у которых среди порождающих есть элементы дистрибутивного и/или модулярного типов; найти все минимальные по силе тройки с элементами модулярного типа, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является модулярной; найти все минимальные по силе тройки с элементами дистрибутивного и модулярного типов, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является дистрибутивной, найти все минимальные по силе тройки с элементами модулярного типа, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является конечной.

В соответствии с поставленными целями были сформулированы следующие задачи исследования:

1. На основе анализа научной литературы выявить способы описания решёток с теми или иными ограничениями на порождающие элементы.
2. Выявить совокупности определяющих соотношений, которые вытекают из наличия элементов дистрибутивного и модулярного типов среди порождающих.
3. Выдвижение гипотез о строении 3-порождённых решёток с элементами дистрибутивного и модулярного типов среди порождающих и их обоснование.
4. Получение основных результатов в виде доказательств соответствующих теорем.

5. Проведение апробации работы в форме выступлений на конференциях и публикаций в научных журналах.

Научная новизна. Все результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы как в общей теории решёток, так и при изучении решёточных свойств других алгебраических систем (групп, полугрупп, колец и др.) и их производных структур (многообразий, конгруэнций и др.).

Методология и методы исследования. В работе использованы общеалгебраические методы, методы построения и исследования свободных решёток в различных многообразиях, а также решёток, заданных конечным набором определяющих соотношений.

Положения, выносимые на защиту.

1. Найдены конечные наборы определяющих соотношений для ряда свободно 3-порождённых решёток, у которых среди порождающих есть элементы дистрибутивного и модулярного типов. Построены диаграммы этих решёток.

2. Найдены все минимальные по силе тройки с элементами модулярного типа, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является модулярной.

3. Найдены все минимальные по силе тройки с элементами дистрибутивного и модулярного типов, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является дистрибутивной.

4. Найдены все минимальные по силе тройки с элементами модулярного типа, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является конечной.

Степень достоверности.

Достоверность результатов исследования обеспечивается использованием научно-обоснованных методов с опорой на основополагающие теоретические положения в области математики, на фундаментальные работы по теории решёток, использованием общеалгебраических и специальных методов исследований в области универсальных алгебр, заданных определяющими соотношениями.

Апробация результатов. Результаты проведённого исследования были представлены на Международной конференции «Алгебра и линейная оптимизация» (Екатеринбург, 2012), Международной конференции по алгебре (Киев, 2012), Международных конференциях «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2012, 2014, 2016, 2017), Международной конференции «G2M2» (Екатеринбург, 2017). Кроме того, результаты диссертации докладывались на семинаре «Алгебраические системы» (Екатеринбург, 2015 – 2017). Работа автора по теме диссертации была представлена на XVII Свердловском областном конкурсе студенческих научных работ «Научный олимп» (2014), где получила третью премию по направлению «естественные науки».

Публикации. Результаты диссертационного исследования содержатся в 18 научных работах, в том числе 9 опубликованы в рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК МОиН РФ. В совместных работах [17] и [19] руководителю принадлежат постановка задач и общая схема их решения, работе [23] руководителю принадлежит только доказательство теоремы 1, которая не входит в данную диссертацию, в работах [18] и [21] результаты получены в неразделимом единстве.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, библиографического списка, включающего 37 источников. Текст содержит 2 таблицы, 20 рисунков. Общий объём диссертации составляет 78 страниц.

Краткое содержание работы

Во **Введении** обсуждается история проблематики диссертационной работы, приведены основные результаты других авторов, относящиеся к данной проблематике, определены цели и задачи работы, даны определения основных понятий и кратко описаны результаты, полученные автором в решении поставленных задач.

В **Главе 1** представлен основной математический инструментарий, посредством которого решаются все задачи Главы 2 и значительная часть задач Главы 3. Этот инструментарий основан на исследовании 3-порождённых решёток, заданных тем или иным конечным набором определяющих соотношений. В этой главе найден набор из 11 определяющих соотношений для свободной модулярной решётки ранга 3 с порождающими элементами a, b и c:

$$((a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee (c \wedge a))) \vee ((b \vee (c \wedge a)) \wedge (c \vee (a \wedge b))) \vee$$
$$\vee ((c \vee (a \wedge b)) \wedge ((a \vee (b \wedge c))) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a); \qquad (1)$$
$$((a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge (c \vee a))) \wedge (b \wedge (c \vee a)) \vee (c \wedge (a \vee b))) \wedge$$
$$\wedge ((c \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge (b \vee c))) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) \qquad (2)$$
$$a \vee ((a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)) = (c \vee a) \wedge (a \vee b); \qquad (3)$$
$$b \vee ((a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)) = (a \vee b) \wedge (b \vee c); \qquad (4)$$
$$c \vee ((a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)) = (b \vee c) \wedge (c \vee a); \qquad (5)$$
$$a \wedge ((a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)) = (c \wedge a) \vee (a \wedge b); \qquad (6)$$
$$b \wedge ((a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c); \qquad (7)$$
$$c \wedge ((a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)) = (b \wedge c) \vee (c \wedge a); \qquad (8)$$
$$(a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c) = (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge c); \qquad (9)$$

$(b \vee (c \wedge a)) \wedge (c \vee a) = (b \wedge (c \vee a)) \vee (c \wedge a);$ (10)

$(c \vee (a \wedge b)) \wedge (a \vee b) = (c \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge b).$ (11)

Отметим, что указанный набор соотношений является минимальным.

Также найдены наборы определяющих соотношений для решёток, изображённых на рисунке 2 и рисунке 3, возникающих при решении задачи 3 в главе 3. Представления индексированных элементов этих решёток через порождающие элементы a, b и c приведены в тексте диссертации.

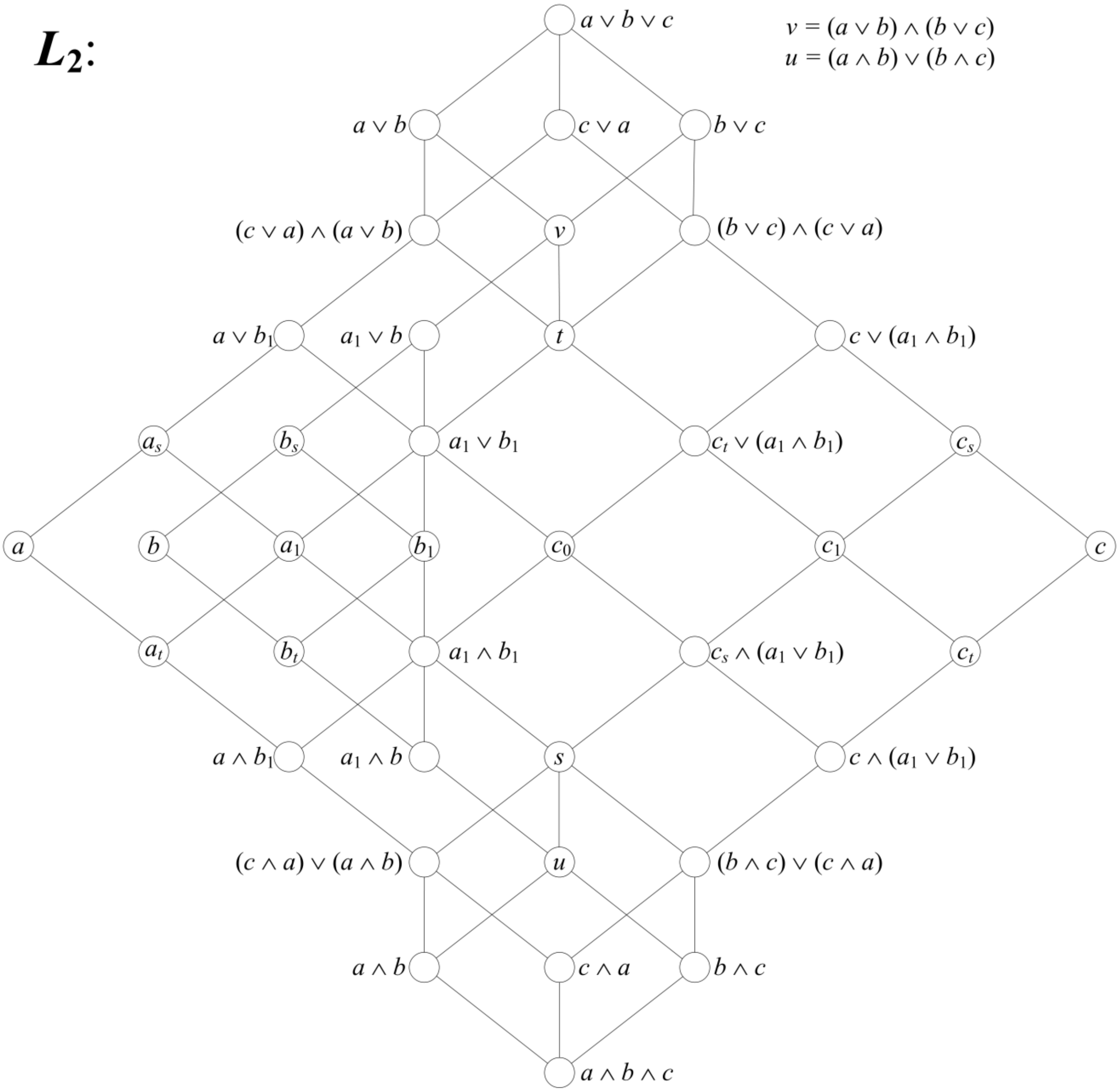

Рис. 2: решётка $\boldsymbol{L_2}$

В **Главе 2** исследованы свойства элементов модулярного и дистрибутивного типов и решаются задачи 1 и 2.

В § 2.1 приведены основные эквациональные свойства элементов дистрибутивного и модулярного типов, некоторые из которых были получены в предшествующих работах других авторов, а бóльшая часть – автором данной

L_3:

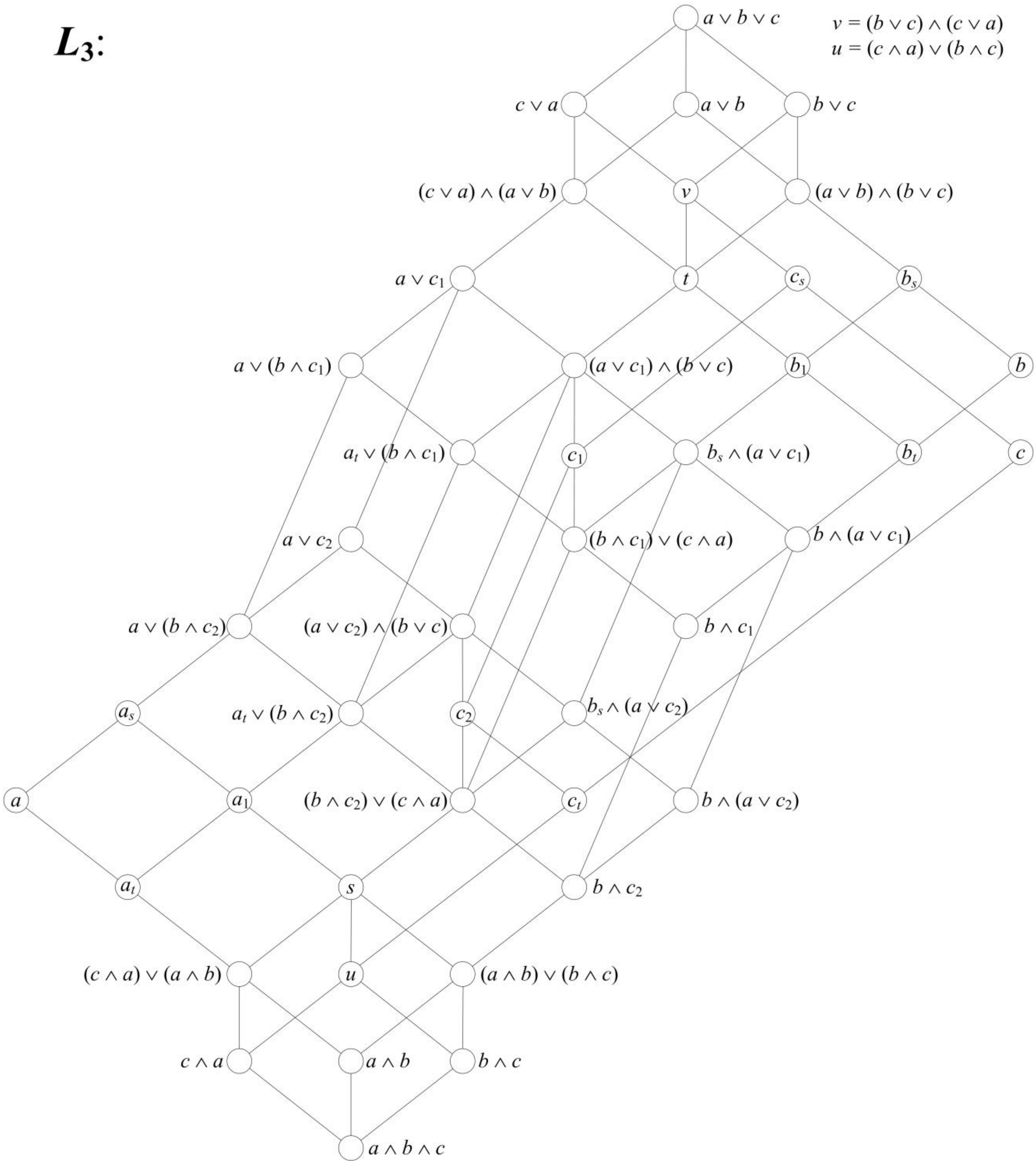

Рис. 3: решётка $\boldsymbol{L_3}$

диссертации. Под эквациональными свойствами элементов нами понимаются свойства, записываемые с помощью равенств. К ним относятся определения (ко-)дистрибутивного, (ко-)стандартного и нейтрального элементов, а также, например, следующие утверждения, доказанные автором диссертационного исследования:

Лемма 2.3. Если элемент a решётки L вполне модулярен, то для любых элементов x и y из L

$$a \vee ((x \vee (y \wedge a)) \wedge (y \vee (a \wedge x))) = a \vee (x \wedge (y \vee (a \wedge x))).$$

Лемма 2.7. Если элемент a решётки L левомодулярен и правомодулярен, то для любых элементов x и y из L

$a \wedge ((a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)) = (y \wedge a) \vee (a \wedge x)$ и

$x \wedge ((a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y)$.

Важную роль играют те эквациональные свойства элементов модулярного типа, которые эквивалентны их исходному определению. Для левомодулярных, коправомодулярных правомодулярных, коправомодулярных, дедекиндовых, кодедекиндовых, вполне модулярных и вполне правомодулярных элементов их эквациональные свойства, эквивалентные определению, приведены в работах О. Оре [8] и С. Бхатты [2]. Это позволило доказать, что для любого набора порождающих элементов, среди которых есть элементы модулярного типа, существует решётка, свободно порождённая этим набором элементов.

В § 2.2 приведены примеры малых немодулярных решёток с элементами дистрибутивного и модулярного типов среди порождающих. Эти примеры используются в § 2.3 и § 2.4 при доказательстве теорем 2.4 и 2.8.

В § 2.3 решается задача 1: найдены все минимальные по силе тройки с элементами модулярного типа, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является модулярной.

Теорема 2.1. Решётка, свободно порождённая тремя элементами, один из которых вполне модулярен, а среди двух других есть левомодулярный, изоморфна свободной модулярной решётке ранга 3.

Теорема 2.2. Решётка, свободно порождённая тремя элементами, один из которых вполне модулярен, а среди двух других есть правомодулярный и коправомодулярный (возможно, один и тот же), изоморфна свободной модулярной решётке ранга 3.

Теорема 2.3. Решётка, свободно порождённая тремя левомодулярными элементами, изоморфна свободной модулярной решётке ранга 3.

Эта теорема, в частности, показывает, что модулярность подрешётки, порождённой в решётке подгрупп (подколец) тремя нормальными подгруппами (идеалами) обусловлена именно решёточной характеристикой этих подгрупп и подколец.

Теорема 2.4. Случаи, перечисленные в Теоремах 2.1 – 2.3, исчерпывают все минимальные по силе тройки с элементами модулярного типа, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является модулярной.

В § 2.4 решается задача 2: найдены все минимальные по силе тройки с элементами дистрибутивного и модулярного типов, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является дистрибутивной.

Теорема 2.5. Решётка, свободно порождённая тремя элементами, один из которых вполне модулярен и дистрибутивен, а другой коправомодулярен, изоморфна свободной дистрибутивной решётке ранга 3.

Теорема 2.6. Решётка, свободно порождённая тремя элементами, один из которых стандартен, а другой дедекиндов, изоморфна свободной дистрибутивной решётке ранга 3.

Этот результат является усилением теоремы Гретцера-Шмидта о дистрибутивности 3-порождённой решётки, у которой два порождающих стандартны.

Теорема 2.7. Решётка, свободно порождённая тремя элементами, один из которых дистрибутивен, а два другие кодедекиндовы, изоморфна свободной дистрибутивной решётке ранга 3.

Таблица 1

a	*b*	*c*
свойства порождающих элементов обеспечивают модулярность (Теорема 2.4) и среди порождающих есть хотя бы один дистрибутивный элемент		
нейтральный	любой	любой
вполне модулярный и дистрибутивный	коправомодулярный	любой
стандартный	дедекиндовый	любой
дистрибутивный	кодедекиндовый	кодедекиндовый

Теорема 2.8. Случаи, перечисленные в таблице 1, а также двойственные к ним исчерпывают все минимальные по силе тройки с элементами дистрибутивного и модулярного типов, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является дистрибутивной.

В **Главе 3** решается задача 3: найдены все минимальные по силе тройки с элементами модулярного типа, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является конечной.

В § 3.1 проведено доказательство достаточности найденных условий конечности.

Теорема 3.1. Решётка, свободно порождённая тремя элементами, один из которых вполне модулярен, изоморфна решётке $\boldsymbol{L_2}$, изображённой на рисунке 2.

Теорема 3.2. Решётка, свободно порождённая тремя элементами, один из которых кодедекиндов, а другой дедекиндов, изоморфна решётке $\boldsymbol{L_3}$, изображённой на рисунке 3.

В § 3.2 обосновано, что случаи, перечисленные в Теоремах 2.3, 3.1 и 3.2, исчерпывают все минимальные по силе тройки с элементами модулярного типа, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является конечной. А именно доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.3. Решётка, свободно порождённая тремя элементами, два из которых кодедекиндовы, а третий вполне правомодулярен, бесконечна.

Теорема 3.4. Решётка, свободно порождённая тремя элементами, один из которых кодедекиндов, а два другие вполне правомодулярны, бесконечна.

Теорема 3.5. Решётка, свободно порождённая тремя вполне правомодулярными элементами, бесконечна и содержит в качестве подрешётки свободную решётку ранга 3.

В **Заключении** приводятся основные результаты диссертации.

Список литературы завершает изложение работы.

Заключение

В работе решены задачи 1 – 3. Основные результаты состоят в следующем:

1. Найдены конечные наборы определяющих соотношений для ряда свободно 3-порождённых решёток, у которых среди порождающих есть элементы дистрибутивного и модулярного типов. Построены диаграммы этих решёток.

2. Найдены все минимальные тройки с элементами модулярного типа, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является модулярной.

3. Найдены все минимальные тройки с элементами дистрибутивного и модулярного типов, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой является дистрибутивной.

4. Найдены все минимальные тройки с элементами модулярного типа, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является конечной.

В дальнейшем интерес представляет следующие направления:

Найти все минимальные тройки с элементами дистрибутивного и модулярного типов, для которых решётка, свободно порождённая такой тройкой, является конечной.

Любая конечно порождённая дистрибутивная решётка конечна, а свободная n-порождённая модулярная решётка при $n > 3$ бесконечна. Какие свойства модулярного и дистрибутивного типа у порождающих элементов могут гарантировать конечность n-порождённой решётки?

В [18] было показано, что решётка, порождённая n вполне модулярными элементами, при $n > 3$ может уже не быть модулярной. Какие свойства дистрибутивного типа у порождающих элементов могут гарантировать модулярность n-порождённой решётки?

Список литературы

[1] Гретцер, Г. Общая теория решеток. / Г. Гретцер. — М.: Мир, 1982.

[2] Bhata, S. P. A characterization of neutral elements by the exclusion of sublattices / S. P. Bhata // Discrete Mathematics. — 2009. — Vol. 309. — P. 1691–1702.

[3] Birkhoff, G. Neutral elements in general lattices / G. Birkhoff // Bull. Amer. Math. Soc. — 1940. — Vol. 46. — P. 702–705.

[4] Grätzer, G. A characterization of neutral elements in lattices. (Note on Lattice Theory, I) / G. Grätzer // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. — 1962. — Vol. 7. — P. 191–192.

[5] Grätzer, G. Standard ideals / G. Grätzer // Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. — 1959. — Vol. 9. — P. 81–97.

[6] Grätzer, G. Standard ideals in lattices / G. Grätzer, E. T. Schmidt // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1961. — Vol. 12. — P. 17–86.

[7] Ore, O. On the foundations of abstract algebra. I / O. Ore // Ann. of Math. — 1935. — Vol. 36. — P. 406–437.

[8] Ore, O. On the theorem of Jordan–Hölder / O. Ore // Trans. Amer. Math. Soc. — 1937. — Vol. 41. — P. 266–275.

[9] Ore, O. Structures and group theory. II / O. Ore // Duke Math. J. — 1938. — Vol. 4. — № 2. — P. 247–269.

[10] Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. — Berlin: Walter de Cruyter, 1994.

[11] Stern, M. Semimodular Lattices. Theory and Applications / M. Stern. — Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[12] Varea, V. R. Modular subalgebras, quasi-ideals and inner ideals Lie algebras of prime characteristic / V. R. Varea // Comm. in Algebra. — 1993. — Vol. 21. — № 11. — P. 4195–4218.

[13] Vernikov, B. M. Special elements in lattices of semigroup varieties / B. M. Vernikov // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2015. — Vol. 81. — № 1–2. — P. 79–109.

[14] Vernikov, B. M. Special elements of the lattice of epigroup varieties / V. Yu. Shaprynski, D. V. Skokov, B. M. Vernikov // Algebra Univ. — 2016. — Vol. 76. — № 1. — P. 1–30.

[15] Wilcox, L. R. Modularity in the theory of lattices / L. R. Wilcox // Ann. of Math. — 1939. —Vol. 40. — № 2. — P. 490–505.

[16] Zassenhaus, H. The theory of group / H. Zassenhaus. — 2nd ed. — New York: Chelsea Publishing Company, 1958.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых журналах из списка ВАК

[17] Шушпанов, М. П. Достаточные условия модулярности решётки с порождающими элементами, обладающими свойствами типа модулярности / А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов // Сибирский математический журнал. — 2015. — Т. 56. — № 4. — С. 798–804.

[18] Шушпанов, М. П. Конечнопорождённые решётки с вполне модулярными элементами среди порождающих / А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52. — № 6. — С. 657–666.

[19] Шушпанов, М. П. Модулярность и дистрибутивность 3-порождённых решёток со специальными элементами среди порождающих / А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов // Алгебра и логика. — 2017. — Т. 56. — №. 1. — С. 3–19.

[20] Шушпанов, М. П. О бесконечности свободной 3-порожденной решетки с одним левомодулярным порождающим / М. П. Шушпанов // Сибирские электронные математические известия. — 2017. — Т. 14. — С. 528–532.

[21] Шушпанов, М. П. Об определяющих соотношениях свободной модулярной решетки ранга 3 / А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2013. — № 10. — С. 69–72.

[22] Шушпанов, М. П. Решётки, порождённые модулярными элементами / М. П. Шушпанов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2015. — № 12. — С. 84–86.

[23] Shushpanov, M. P. Free 3-Generated Lattices with Two Semi-Normal Generators / A. G. Gein, M. P. Shushpanov // Order. — 2018. — P. 1–6. doi:10.1007/s11083-017-9429-0

[24] Shushpanov, M. P. On 3-generated lattices with a completely modular element among generators / M. P. Shushpanov // Algebra universalis. — 2017. — Vol. 78. — № 3. — P. 377–387.

[25] Shushpanov, M. P. On the embedding of the free lattice of rank 3 in the lattice freely generated by three completely right modular elements / M. P. Shushpanov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — Vol. 14. — P. 1215–1219.

Другие публикации

[26] Шушпанов, М. П. Конечнопорождённые решётки с модулярными элементами среди порождающих / М. П. Шушпанов // XVII Областной конкурс студенч. научно-исслед. работ «Научный олимп»: Тез. студенч. научных работ. Направление «Естествен. науки». Екатеринбург. — 2014. — С. 15–16.

[27] Шушпанов, М. П. О вложении свободной решётки ранга 3 в свободную решётку, порождённую тремя вполне правомодулярными элементами / М. П. Шушпанов // Международная конференция «Мальцевские чтения»: Тез. докл. Новосибирск. — 2017. — С. 160.
[28] Шушпанов, М. П. О конечности 3-порождённой решётки с ограничениями типа модулярности на порождающие элементы / М. П. Шушпанов // Международная конференция «Мальцевские чтения»: Тез. докл. Новосибирск. — 2016. — С. 203.
[29] Шушпанов, М. П. О подрешётке, порождённой модулярными элементами / А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов // Международная алгебраическая конференция «Алгебра и линейная оптимизация», посвященная 100-летию С.Н. Черникова: Тез. докл. Екатеринбург. — 2012. — С. 47.
[30] Шушпанов, М. П. О решетках, порожденных вполне модулярными элементами / А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов // Международная алгебраическая конференция «Мальцевские чтения»: Тез. докл. Новосибирск. — 2012. — С. 52.
[31] Шушпанов, М. П. Условия дистрибутивности 3-порождённых решёток / А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов // Международная алгебраическая конференция «Мальцевские чтения»: Тез. докл. Новосибирск. — 2014. – С. 131.
[32] Shushpanov, M. P. Nonmodular lattices generated by modular elements / M. P. Shushpanov // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M.Chernikov: Book of abstracts. Kyiv, Ukraine. — 2012. — P. 146.
[33] Shushpanov, M. P. On lattices with left modular and distributive elements among generators / M. P. Shushpanov // The International Conference and PhD-Master Summer School «Groups and Graphs, Metrics and Manifolds»: Book of abstracts. Yekaterinburg. — 2017. — P. 93.