На правах рукописи

ПТАХОВ Денис Олегович

Полигоны с примитивно-нормальными и P-стабильными теориями

01.01.06 — математическая логика,

алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Владивосток 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования Дальневосточном федеральном университете

Научный руководитель:

Степанова Алёна Андреевна, доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты:

Пинус Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Новосибирский государственный технический университет профессор кафедры алгебры и математической логики.

Коровина Маргарита Владимировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского"

Защита состоится 23 ноября 2018 г. в 17 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, а так же на сайте http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан « __ » xxxxx 0000 г

Ученый секретарь диссертационного совета,

кандидат физико-математических наук А.И. Стукачев

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации.

Тема диссертации относится к теоретико-модельной алгебре. Предметом исследования являются некоторые классы полигонов. Под *левым* S*-полигоном* ${}_SA$ над моноидом S или просто *полигоном* понимается множество A, на котором определено действие элементов из S, причем единица действует на A тождественно. Понятие полигона относится к фундаментальным в таких областях, как теория представлений, алгебраическая теория динамических систем и др. Большое количество работ по теории полигонов посвящено гомологической классификации полигонов, а именно, характеризации моноидов с помощью категорных свойств полигонов, таких как проективность, инъективность, плоскость. Это работы Л.А.Скорнякова [10], М.Кильпа [4], [19], У.Кнауэра [19] , А.В.Михалева [19] и др. Вопросы, связанные со свойством регулярности полигонов, рассмотрены такими математиками, как М.Кильп [20], У.Кнауэр [20], [21], А.В.Михалев [21], Л.Х.Трэн [28] и др. На полигон над моноидом можно смотреть как на обобщение понятия модуля над кольцом. Именно поэтому многие задачи в теорию моделей полигонов пришли из теории моделей модулей. Одной из стандартных задач теории моделей модулей является задача описания колец, над которыми некоторый класс модулей обладал бы свойством P, где под P может пониматься аксиоматизируемость, или полнота, или стабильность и др.

В работах В. Гоулд [18], [17], С.Балмэн–Флеминг[17], А.А. Степановой [11] дается характеризация моноидов S таких, что классы слабо плоских, плоских, сильно плоских, проективных и свободных полигонов аксиоматизируемы. В работе А.А. Степановой [11] изучаются моноиды, над которыми аксиоматизируемые классы сильно плоских, проективных и свободных полигонов полны, модельно полны, категоричны. В работах Т.Г. Мустафина [6], А.А. Степановой [12] рассматриваются вопросы стабильности классов сильно плоских, проективных и свободных полигонов.

Аддитивные и примитивно связные теории являются обобщением теории модулей. Как и теория модулей над кольцом данные теории допускают элиминацию кванторов до примитивных формул (см.[7], [23]). Класс аддитивных теорий содержится в классе примитивно связных теорий. В отличии от примитивно связных теорий, в аддитивных теориях на факторах любых примитивных копий по некоторой примитивной эквивалентности можно определить с помощью примитивной формулы изоморфные абелевы группы. Это свойство аддитивных теорий обобщает известное свойство модулей: в любом модуле примитивные копии являются классами смежности некоторой абелевой группы. Аддитивные и примитивно связные теории являются по определению примитивно нормальными теориями.

Полигоны с примитивно нормальной и аддитивной теорией изучаются в работе А.А. Степановой [14]. В работе [13] того же автора исследуются моноиды, над которыми класс всех полигонов примитивно нормален, примитивно связен или аддитивен. В работе [15] изучаются моноиды, над которыми аксиоматизируемый класс регулярных полигонов примитивно связен. Таким образом, представляет интерес описание моноидов, классы сильно плоских, проективных и свободных полигонов над которыми примитивно нормальны, аддитивны, примитивно связны.

Одним из объектов изучения теоретико-модельной алгебры является классификация элементарных теорий. Одним из способов получения этой классификации является классификация по количеству типов в этих теориях (т.е. совместных с теорией множеств формул со свободными переменными и с фиксированным множеством параметров, являющихся элементами модели данной теории). Исследования в этом направлении начались с работ Р. Вота [29], К. Рыль-Нардзевского [24] и М. Морли [22]. М. Морли глубоко исследовал тотально трансцендентные теории, т.е. теории, в которых имеется лишь счетное число типов над любым счетным множеством параметров. В дальнейшем понятие тотально трансцендентной теории было обобщено С.Шелахом до понятия стабильной теории [25] – теории, в которой для некоторой бесконечной мощности $\varkappa$ мощность множества полных 1-типов над множеством параметров мощности $\varkappa$ не превосходит этой мощности $\varkappa$.

Далее эта область исследований, которую называют теорией стабильности, развивалась в нескольких направлениях. Одно из направлений — изучение подклассов стабильных теорий, обладающих теми или иными интересными свойствами. С другой стороны, развиваются направления, целью которых является обобщить понятие стабильности, сохраняя при этом те или иные полезные свойства и методы исследования.

Интересное обобщение понятия стабильности было предложено Т.Г. Мустафиным [5], которое было в последствии уточнено до понятия E^*-стабильности Е.А. Палютиным [8]. Так же Е.А. Палютин доказал для этого уточнения теорему об определимости типов, обобщающую как определимость типов для стабильных теорий, полученную С. Шелахом [26], так и результат Т.Нурмагамбетова и Б.Пуаза для теории пар. Понятие E^*-стабильности представляет собой новую шкалу стабильности, основным параметром которой является некоторое отображение типов полной теории в типы другой теории. Частным случаем E^*-стабильности является P-стабильность.

Основное содержание диссертации.

В данной работе исследуются моноиды S, над которыми аксиоматизируемый класс всех свободных, проективных или сильно плоских полигонов является примитивно нормальным, а также доказывается, что ни для какого моноида S указанные аксиоматизируемые классы не являются аддитивными.

Рассматриваются полигоны с $(P,1)$-стабильной теорией. Доказывается критерий $(P,1)$-стабильности полигона. В качестве следствия, при условии, что S – группа доказывается, что полигон ${}_SS$, является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда S – конечная группа. Показывается, что класс всех полигонов над моноидом S является $(P,1)$-стабильным тогда и только тогда, когда S – одноэлементный моноид. Приводятся критерии $(P,1)$-стабильности полигонов над моноидами правых и левых нулей.

Изучаются вопросы (P,s)-, (P,a)- и (P,e)-стабильности полигонов. Доказывается, что (P, s)-, (P, a)- и (P, e)-стабильность класса всех полигонов над моноидом S эквивалентна тому, что S – группа. Кроме того, дается описание строения (P, s)-, (P, a)- и (P, e)-стабильных полигонов ${}_SA$ над счетным моноидом S левых нулей и, при условии неразличимости множества $A \setminus SA$, над моноидом правых нулей.

Цели и задачи данной работы заключаются в изучении строения моноидов с точки зрения теоретико-модельных свойств классов полигонов над ними, в частности, классов свободных, проективных, сильно плоских полигонов; исследование таких свойств этих классов, как примитивная нормальность, аддитивность, P-стабильность.

Выносимые на защиту положения. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Доказано, что аксиоматизируемый класс всех свободных, проективных или сильно плоских полигонов над моноидом S является примитивно нормальным тогда и только тогда, когда полигон ${}_SS$ примитивно нормален (опубликовано в [35]).

2. Доказано, что если аксиоматизируемый класс полигонов аддитивен, то все полигоны этого класса являются связными (опубликовано в [35]).

3. Найден критерий $(P, 1)$-стабильности полигона. Доказано, что то полигон над группой $(P, 1)$-стабилен тогда и только тогда, эта группа конечна (опубликовано в [30]).

4. Доказано, что (P, s)-, (P, a)- и (P, e)-стабильность класса всех полигонов над моноидом S эквивалентна тому, что S – группа (опубликовано в [31]).

5. Доказано, что полигон над моноидом левых нулей $(P, 1)$-стабилен тогда и только тогда, когда число неодноэлементных компонент связности этого полигона конечно. Найден критерий $(P, 1)$-стабильности полигона над моноидом правых нулей (опубликовано в [30]).

6. Для счетного моноида левых нулей найден критерий (P, s)-стабильности полигона, так же доказана эквивалентность (P, a)- и (P, e)-стабильности. Доказано, что для полигонов ${}_SA$ над моноидом

правых нулей, у которых неразличимо множество $A \setminus SA$, эквиваленты условия $(P,1)$- и (P,s)-стабильности. Найден критерий (P,a)-стабильности полигона над моноидом правых нулей(опубликовано в [31]).

Методы исследования. В работе используются классические методы теории моделей такие, как теорема компактности, теория категоричности, а также методы теории полигонов.

Новизна и научная значимость работы. Результаты диссертации являются новыми и носят теоретический характер. Они могут быть использованы в теоретико-модельной алгебре, в теории полигонов, при чтении спецкурсов по теории моделей, написании учебных пособий и монографий.

Апробация работы. Результаты диссертации излагались автором на семинарах Института математики СО РАН (г. Новосибирск), Института прикладной математики ДВО РАН (г. Владивосток), Дальневосточного федерального университета (г. Владивосток), а также на следующих конференциях: международной конференции "Мальцевские чтения" (г. Новосибирск, 2012, 2015), региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам (г. Владивосток, 2013, 2015).

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [30-38], при этом работы [30, 31, 35] опубликованы в издании, которое входит в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук, а так же индексируемом в наукометрических системах (SCOPUS и т.д.). Работы [31, 32] написаны в неразрывном сотрудничестве со Степановой А.А.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Все утверждения занумерованы двойками индексов, из которых первый является номером главы, второй – номером утверждения в данной главе. Компьютерный набор выполнен с использованием пакета LaTeX. Общий объем диссертации 59 страниц. Библиография включает в себя 42 наименование.

Содержание работы

Первая глава работы посвящена исследованию свойств примитивной нормальности и аддитивности на классах свободных, проективных и сильно-плоских полигонов. В первом параграфе первой главы приведены некоторые определения, а так же известные факты, которые будут использоваться для формулировки и доказательства основных результатов.

Свободным полигоном над множеством X называется полигон ${}_SF$ такой, что для любого полигона ${}_SA$ и отображения $\theta : X \to A$ существует единственный S-морфизм $\bar{\theta} : F \to A$, для которого $i\bar{\theta} = \theta$, где $i : X \to F$ – вложение. Через $\mathcal{F}r$ обозначается класс всех свободных полигонов. Известно, что полигон ${}_SF$ является свободным тогда и только тогда, когда он изоморфен копроизведению полигонов вида ${}_SS$.

Проективным полигоном называется полигон ${}_SP$ такой, что для любых полигонов ${}_SN$ и ${}_SM$ и S-морфизмов $\varphi : N \to M, \psi : P \to M$, где φ – сюръекция, существует S-морфизм $\chi : P \to N$ такой, что $\psi = \varphi \circ \chi$. Через $\mathcal{P}$ обозначается класс всех проективных полигонов. Известно, что полигон ${}_SP$ является проективным тогда и только тогда, когда он изоморфен копроизведению полигонов вида ${}_SSe$, где e – идемпотент моноида S .

Сильно плоским полигоном называется полигон ${}_SB$ такой, что функтор $- \otimes {}_SB$ сохраняет универсальные квадраты. Через $\mathcal{SF}$ обозначается класс всех сильно плоских полигонов. Стенстрём сформулировал условия (P) и (E), которые вместе эквивалентны сильной плоскости полигона.

Предложение 1.1 *Полигон* ${}_SB$ *является сильно плоским тогда и только тогда, когда* ${}_SB$ *удовлетворяет условиям (P) и (E):*

(P): *если* $x, y \in B$ *и* $s, t \in S$ *такие, что* $sx = ty$, *то существуют элементы* $z \in B$ *и* $s', t' \in S$ *такие, что* $x = s'z, y = t'z$ *и* $ss' = tt'$ *;*

(E): *если* $x \in B$ *и* $s, t \in S$ *такие, что* $sx = tx$, *то существуют* $z \in B$ *и* $s' \in S$ *такие, что* $x = s'z$ *и* $ss' = ts'$.

Пусть $\mathcal{C}$ – достаточно насыщенная модель полной теории T языка L, элементарно содержащая все рассматриваемые модели теории T. Формула вида

$$\exists\bar{x}(\Phi_0 \wedge \cdots \wedge \Phi_k),$$

где Φ_i – атомарные формулы $(0 \leq i \leq k)$, называется *примитивной формулой.* Множество $\Phi(\mathcal{C}, \bar{a})$ называется *примитивным*, где $\bar{a} \in \mathcal{C}$. Множества $\Phi(\mathcal{C}, \bar{a})$ и $\Phi(\mathcal{C}, \bar{b})$ называются *примитивными копиями*, где $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{C}$ и $|a| = |b|$. Теория T называется *примитивно нормальной*, если $X = Y$ или $X \cap Y = \varnothing$ для любых примитивных копий X, Y. Аксиоматизируемый класс K структур языка L называется *примитивно нормальным*, если теория этого класса примитивно нормальна.

Эквивалентность α на некотором множестве X n-ок элементов из $\mathcal{C}$, определенная в $\mathcal{C}$ с помощью некоторой примитивной формулы $\Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, называется *примитивной эквивалентностью.* Множество X называется Δ*–примитивным*, если оно является пересечением примитивных множеств. Эквивалентность α называется Δ-*примитивной*, если она является пересечением примитивных эквивалентностей. Классы X и Y одной Δ–примитивной эквивалентности α называются Δ–*примитивными копиями.* Множество вида $X = X^*/\alpha = \{a/\alpha \mid a \in X^*\}$, где X^* – Δ-примитивное множество, α – примитивная эквивалентность и выполнено $X^* \subseteq dom(\alpha)$, называется *обобщенно примитивным множеством,* при этом X^* называется *основой*, а α называется *образующей эквивалентностью.* Обобщенно примитивные множества X_1, X_2 называются *обобщенно примитивными копиями*, если у них есть общая образующая эквивалентность, а их основы X_1^*, X_2^* являются Δ–примитивными копиями.

Пусть обобщенно примитивные множества X_1 и X_2 являются обобщенно примитивными копиями и α – их образующая эквивалентность. Говорят, что X_1 *аддитивно связано* с X_2, если существуют примитивные формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$, $\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})$ (с параметрами $\bar{d}$), примитивная эквивалентность β и кортежи элементов $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ такие, что

(a) $(\alpha \cap (X_i^*)^2) \subseteq \beta, i \in \{1,2\}$;

(b) для любого $i \in \{1,2\}$ формула $\Phi(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{b}_i)$ задает в $\mathcal{C}$ на X_i^*/β абелеву группу, причем эта группа нетривиальна, если множество X_1 или X_2 более, чем одноэлементно;

(c) формула $\Psi(\bar{x},\bar{y},\bar{d})$ задает изоморфизм групп, определенных в (b).

Теория T называется *аддитивной*, если она примитивно нормальна и любые обобщенно примитивные копии аддитивно связаны. Аксиоматизируемый класс структур K языка L называется *аддитивным*, если теория этого класса аддитивна.

Во втором параграфе первой главы исследуются моноиды S, над которыми аксиоматизируемый класс всех свободных, проективных или сильно плоских полигонов является примитивно нормальным.

Всюду в данном параграфе класс $\mathcal{K}$ – один из классов: $\mathcal{P}, \mathcal{F}r, \mathcal{SF}$.

Теорема 1.2 *Пусть класс* $\mathcal{K}$ *– один из классов:* $\mathcal{P}, \mathcal{F}\mathrm{r}, \mathcal{SF}$ *и* $\mathcal{K}$ *аксиоматизируемый. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) класс $\mathcal{K}$ *примитивно нормален;*

2) полигон ${}_S S$ *примитивно нормален;*

3) для любых попарно непересекающихся множеств индексов I, J, K, *любых* $s_i, t_j, r_k^1, r_k^2, a_1, a_2, a_3 \in S\,(i \in I, j \in J, k \in K)$, *если*

$${}_S S \models \bigwedge_{i \in I} s_i a_1 = s_i a_2 \wedge \bigwedge_{j \in J} t_j a_2 = t_j a_3 \wedge \bigwedge_{k \in K} \bigwedge_{m \in \{1,2,3\}} r_k^1 a_m = r_k^2 a_m,$$

то существует $b \in S$ *такой, что*

$${}_S S \models \bigwedge_{i \in I} s_i a_3 = s_i b \wedge \bigwedge_{j \in J} t_j b {=} t_j a_1 \wedge \bigwedge_{k \in K} r_k^1 b = r_k^2 b;$$

4) любые примитивные эквивалентности α *и* β, *определенные на* S, *перестановочны, т.е.* $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

В третьем параграфе первой главы доказывается, что классы $\mathcal{P}, \mathcal{F}r, \mathcal{SF}$ не являются аддитивными ни для какого моноида S.

Теорема 1.3 *Если аксиоматизируемый класс полигонов аддитивен,* *то все полигоны этого класса являются связными*

Следствие 1.4 *Если аксиоматизируемый примитивно нормальный класс полигонов замкнут относительно копроизведений, то не является аддитивным классом.*

Поскольку классы $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}r$, $\mathcal{SF}$ замкнуты относительно копроизведений, то имеет место следующее утверждение.

Следствие 1.5 *Пусть* $\mathcal{K}$ *– один из классов* $\mathcal{P}, \mathcal{F}r, \mathcal{SF}$. *Не существует моноида* S *такого, что класс* $\mathcal{K}$ *является аксиоматизируемым и аддитивным.*

Во второй главе изучаются свойства P-стабильности полигонов. Первый параграф второй главы содержит необходимые сведения для формулировки и доказательства дальнейших результатов.

Пусть T – теория языка L. Через $L(X)$ будем обозначать язык, который получается из языка L добавлением множества X в качестве множества новых констант. Через $T(X)$ будем обозначать следующее множество формул языка $L(X)$:

$$\{\varphi(\bar{a}) \mid \bar{a} \in X, C \models \varphi(\bar{a}), \varphi(\bar{x}) - \text{формула языка } L\}.$$

Ясно, что $T(X)$ будет полной теорией языка $L(X)$.

Пусть язык L_P получается из языка L добавлением нового одноместного предикатного символа P, Δ — некоторое множество предложений языка L_P. Теория T называется P_Δ*-стабильной в мощности* λ, если для любого множества X в теории T мощности $\leqslant \lambda$ множество

$$T_\Delta(X) = T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta \tag{1}$$

имеет не более λ пополнений в языке $(L(X))_P$. Теория T называется P_Δ*-стабильной*, если T является P_Δ-стабильной в некоторой бесконечной мощности λ. Структура A языка L называется P_Δ*-стабильной*, если теория $Th(A)$ является P_Δ-стабильной. Класс структур языка L называется P_Δ*-стабильным*, если каждая структура этого класса является P_Δ-стабильной. Ниже приведем важные случаи P_Δ-стабильности.

1) Теория T называется $(P,1)$ *-стабильной,* если она является P_Δ -стабильной для $\Delta=\varnothing$.

2) Теория T называется (P,s) *-стабильной,* если она является P_Δ -стабильной для множества $\Delta,$ состоящего из предложений, выражающих замкнутость предиката P относительно функций, определимых функциональными символами языка L.

3) Теория T называется (P,a) *-стабильной,* если она является P_Δ -стабильной для множества $\Delta,$ состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является алгебраически замкнутым множеством, т.е. содержит все конечные множества, определимые в структуре C формулами языка L с параметрами из предиката P.

4) Теория T называется (P,e) *-стабильной*, если она является P_Δ -стабильной для множества $\Delta,$ состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат P является элементарной подсистемой.

Во втором параграфе второй главы доказывается критерий $(P,1)$ -стабильности полигонов.

Теорема 2.1 *Полигон* ${}_SA$ *является* $(P,1)$ *-стабильным тогда и только тогда, когда для любого* $t\in S$ *множество*

$$tA\backslash\{a\in A\mid ta=a\}\cup\{a\in A\mid ta=a\wedge\exists b(tb=a\wedge b\neq a)\}$$

конечно.

Следствие 2.2 *Пусть* ${}_SA=\bigsqcup\limits_{i\in I}{}_SA_i, |I|\geq 2,$ *где* ${}_SA_i$ *– компоненты связности полигона* ${}_SA$. *Полигон* ${}_SA$ *является* $(P,1)$ *-стабильным тогда и только тогда, когда для любого* $i\in I$ *полигоны* ${}_SA_i$ *являются* $(P,1)$ *-стабильными и для любого* $t\in S$

$$|\{i\in I\mid\exists a\in A_i(ta\neq a)\}|<\omega.$$

Следствие 2.3 *Пусть* S *– группа. Полигон* ${}_SS$ *является* $(P,1)$ *-стабильным тогда и только тогда, когда* S *– конечная группа.*

Следствие 2.4 *Класс* $S-Act$ *является* $(P,1)$ *-стабильным тогда и только тогда, когда* $|S|=1$.

Во третьем параграфе второй главы исследуются полигоны с (P,s) -

, (P, a) - и (P, e) -стабильными теориями.

Теорема 2.5 *Для моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) класс $S - \mathcal{A}ct$ всех полигонов (P, s) -стабилен;

2) класс $S - \mathcal{A}ct$ всех полигонов (P, a) -стабилен;

3) класс $S - \mathcal{A}ct$ всех полигонов (P, e) -стабилен;

4) S – группа.

В первом параграфе третьей главы исследуются свойства P-стабильности полигонов над моноидами левых нулей.

Моноид S называется *моноидом левых нулей*, если для любых $a, b \in S$ выполняется $a \cdot b = a$.

Следствие 3.1 *Пусть S – моноид левых нулей. Полигон ${}_SA$ является $(P, 1)$ -стабильным тогда и только тогда, когда число неодноэлементных компонент связности полигона ${}_SA$ конечно.*

Через $\bar{S}$ обозначим полугруппу $S \setminus \{1\}$. Для полигона ${}_SA = \bigsqcup_{i \in I^A} {}_SA_i$, где ${}_SA_i$ – компонента связности полигона ${}_SA$ $(i \in I^A)$, введем обозначения:

$$I_1^A = \{i \in I^A \mid |A_i| \geq \omega\},\ I_2^A = \{i \in (I^A \setminus I_1^A) \mid 0 < |A_i \setminus \bar{S}A_i| < \omega\},$$

$$I_3^A = I \setminus (I_1^A \cup I_2^A).$$

Теорема 3.2 *Пусть S – счетный моноид левых нулей. Полигон ${}_SA$ является (P, s) -стабильным тогда и только тогда, когда*

1) $|I_1^A \cup I_2^A| < \omega$;

2) существует $n \in \omega$ такой, что $|A_i| \leq n$ для любого $i \in I_3^A$;

3) для любого $a \in \prod_{i \in I_3^A} A_i$ существуют $m \in \omega$, $t_0, \ldots, t_m \in \bar{S}$, подмножества $J_0, \ldots, J_m$ множества I_3^A такие, что $I_3^A = J_0 \cup \ldots \cup J_m$ и $t_k a(j) = a(j)$ для любых k, $0 \leq k \leq m$ и $j \in J_k$.

Теорема 3.3 *Пусть S – счетный моноид левых нулей. Следующие условия эквивалентны:*

1) полигон ${}_SA$ является (P, e) -стабильным;

2) полигон ${}_SA$ является (P, a) -стабильным;

3) $|I_1^A| < \omega$ и существует $n \in \omega$ такой, что $|A_i| \leq n$ для любого

$i \in I_2^A \cup I_3^A$.

Так же в этом параграфе приводится пример (P, s)-стабильного полигона над моноидом левых нулей, который не является $(P, 1)$-стабильным.

Во втором параграфе третьей главы исследуются свойства P-стабильности полигонов над моноидами правых нулей.

Моноид S называется *моноидом правых нулей*, если для любых $a, b \in S$ выполняется $a \cdot b = b$.

Пусть ${}_SA$ – полигон над моноидом правых нулей. Обозначим $Y_A = \{y \in A \mid sy = y$ для всех $s \in S\}, X_A = A \setminus Y_A$.

Утверждение 3.4. *Пусть S – моноид правых нулей. Полигон ${}_SA$ является $(P, 1)$-стабильным тогда и только тогда, когда для любого $t \in S$ выполняется $|t \cdot Y_A| < \omega$.*

Пусть $\mathcal{A}$ – структура языка L, X – подмножество множества A, строго линейно упорядоченное отношением $<$, которое может быть одним их принадлежащих языку L отношений, а может и не быть им. Множество элементов X называется *неразличимым* в $\mathcal{A}$ (по отношению к упорядочению $<$), если $\mathcal{A}(\{x_0, \ldots, x_n\}) \equiv \mathcal{A}(\{y_0, \ldots, y_n\})$ для всех n и для любых последовательностей $x_1 < \ldots < x_n$ и $y_1 < \ldots < y_n$ из множества X.

Теорема 3.5 *Пусть ${}_SA$ – полигон над моноидом правых нулей и множество X_A неразличимо в ${}_SA$. Следующие условия эквивалентны:*

1) полигон ${}_SA$ является $(P, 1)$-стабильным;

2) полигон ${}_SA$ является (P, s)-стабильным;

3) $|tX_A| < \omega$ для любого $t \in \bar{S}$.

Теорема 3.6 *Пусть ${}_SA$ – полигон над моноидом правых нулей, множество X_A неразличимо в ${}_SA$. Тогда полигон ${}_SA$ является (P, a)-стабильным.*

Список литературы

[1] *Гоулд В., Михалев А.В., Палютин Е.А., Степанова А.А.* Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов // Фунд. прикл. матем. 2008. Т.14. №7. С.63-110.

[2] *Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.* Математческаая логика // Физматлит. М. 2011. 6-е изд.

[3] *Кейслер Г., Чен Ч* Теория моделей // Мир. М. 1977.

[4] *Кильп М.* К гомологической классификации моноидов // Сиб. мат. журн. 1972. Т.13. №3. С.578-586.

[5] *Мустафин Т.Г.* Новые понятия стабильности теорий // Труды советско-французского коллоквиума по теории моделей. Караганда. 1990. С.112—125.

[6] *Мустафин Т.Г.* О стабильностной теории полигонов // Теория моделей и ее применение.– Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е, – (Тр.АН СССР. Сиб.отд-е. Ин-т математики; Т.8) 1988. Т.8. С. 92-108.

[7] *Палютин Е.А.* Примитивно связные теории // Алгебра и логика. 2000. Т.39. №2. С.145-169.

[8] *Палютин Е. А.* E^*-стабильные теори // Алгебра и логика. 2003. Т.42. №2. С.194-210.

[9] *Русалеев М.А.* Характеризация $(P, 1)$-стабильных теорий // Алгебра и логика. 2007. Т.52. №5. С.606-631.

[10] *Скорняков Л.А.* О гомологической классификации моноидов // Сиб. мат. журн. 1969. Т.10. №5. С.1139-1143.

[11] *Степанова А.А.* Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S–полигонов // Алгебра и логика. 1991. Т.3. №5. С.583-594.

[12] *Степанова А.А.* Моноиды со стабильными плоскими полигонами // Вестник НГУ, серия: математика, информатика, механика. 2002. Т.2. вып. 2. С. 64-77.

[13] *Степанова А.А.* Примитивно связные и аддитивные теории полигонов // Алгебра и логика. 2006. Т.45. №3. С.300–313.

[14] *Степанова А.А.* Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями // Алгебра и логика. 2008. Т.47. №4. С.491-508.

[15] *Степанова А.А.* Регулярные полигоны с примитивно связными теориями // Сибирский математический журнал. 2014. Т.55, № 3. С. 666-671.

[16] *Халиуллина А.Р.* Условия модулярности решетки конгруэнций полигона над полугруппой правых и левых нулей // Дальневосточный математический журнал. 2015. Т.15, № 1. С. 102-120.

[17] *Bulman-Fleming S., Gould V.* Axiomatisability of weakly flat, flat and projective S-acts // Preprint.

[18] *Gould V.* Axiomatisability problems for S–systems // J. London Math. Soc. 1987. V.35. №2. P.193-201.

[19] *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V.* Monoids, acts and categories.// Walter de Gruyter. Berlin. 2000.

[20] *Kilp M., Knauer U.* Characterization of monoids by properties of regular acts // J. of Pure and Applied Alg. 1987. V.2. №35. P.193-201.

[21] *Knauer U., Mihalev A.V.* Wreath products of acts over monoids: I. Regular and inverse acts // J. of Pure and Applied Algebra. 1988. V.51. P.251-260.

[22] *Morley M.D.* Categoricity in power // Trans. A.M.S. 1965. V.114 P.514-538.

[23] *Palyutin E.A.* Additive theory // Proceedings of Logic Colloquium'98 (Lecture Notes in Logic, 13), ASL, Massachusetts. 2000. P.352-356.

[24] *Ryll-Nardzewski C.* On the Categoricity in Power $\leqslant \aleph_0$ // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Astr. Phys. 1959. V.7 P.545-548.

[25] *Shelah S.* Stable theories // Israel J. Math. 1969. V.7 P.187-202.

[26] *Shelah S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models // Amsterdam: North-Holland. 1978.

[27] *Stenström B.* Flatness and localization over monoids // Math. Nachr. 1971. V. 48 P.315-334

[28] *Tran L.H.* Characterization of monoid by regular acts // Period. Math. Hungar. 1985. V.16. P.273-279.

[29] *Vaught R. L.* Models of complete theories // Bull. Amer. Math. Soc. 1963. V.69 P.299-313.

Список работ автора по теме исследования

[30] *Птахов Д.О.* Полигоны с $(P,1)$-стабильной теорией // Алгебра и логика. 2017. Т.56. №6. С.712-720.

[31] *Птахов Д.О., Степанова А.А.* P-стабильные полигоны // Алгебра и логика. 2017. Т.56. №4. С.486-505.

[32] *Птахов Д.О., Степанова А.А.* (P,s)- и (P,e)-стабильные полигоны // Международная конференция “Мальцевские чтения”. Новосибирск. 2015. С.198.

[33] *Птахов Д.О.* Полигоны с $(P,1)$-стабильной теорией // Международная конференция “Мальцевские чтения”. Новосибирск. 2015. С.196.

[34] *Птахов Д.О.* Полигоны над моноидами правых нулей с $(P,1)$-стабильной теорией // Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам. Владивосток. 2015. С.160.

[35] *Птахов Д.О.* Примитивная нормальность и аддитивность свободных, проективных и сильно плоских полигонов // Алгебра и логика. 2014. Т.53. №5. С.614-624.

[36] *Птахов Д.О.* Полигоны с $(P,1)$-стабильной теорией // Материалы региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам. Владивосток. 2013. С.147.

[37] *Птахов Д.О.* Об аддитивности некоторых классов полигонов // Международная конференция “Мальцевские чтения”. Новосибирск. 2012. С.145.

[38] *Птахов Д.О.* Примитивная нормальность сильно плоских полигонов // Синтаксис и семантика логических систем. Иркутск. 2012. С.102–103.

Другие публикации работ автора

[39] *Птахов Д.О., Степанова А.А.* Решетки конгруэнций полигонов // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т.13. №1. С.107-115.

[40] *Птахов Д.О.* Решетки конгруэнций полигонов // Международная конференция “Мальцевские чтения”. Новосибирск. 2011. С.88.

[41] *Птахов Д.О.* Решетки конгруэнций несвязных полигонов // Вторая Дальневосточная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по теоретической и прикладной математике: материалы конференции. Владивосток. 2010. С.19.

[42] *Птахов Д.О.* Решетки слабых конгруэнций унарных алгебр // Материалы III российской школы-семинара Синтаксис и семантика логических систем. Иркутск. 2010. С.83-85.