На правах рукописи

Прокопенко Евгений Игоревич

ИНТЕРГО-ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ МОМЕНТНОМ УСЛОВИИ КРАМЕРА

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:
Могульский Анатолий Альфредович, доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:
Веретенников Александр Юрьевич, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики», ведущий н.с. международной лаборатории стохастического анализа и его приложений, профессор.

Ковалевский Артем Павлович, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет», доцент кафедры высшей математики.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится 19 сентября 2018 года в 17 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте math.nsc.ru.

Автореферат разослан «____»________2018г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук Ю.В. Шамадрин

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Предельному распределению различных случайных процессов посвящено большое количество работ в теории вероятностей, такие работы появляются и по сей день. Одной из классических предельных теорем является теорема Стоуна[1][2] для случайного блуждания. В ней находится асимптотика вероятности попадания сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов в «малый» куб. А.А. Боровков такой тип теорем[3] предложил называть «интегро-локальными предельными теоремами», так как в них содержатся элементы интегральных теорем (попадание в множество) и локальных теорем (это множество мало).

Интегро-локальная теорема Стоуна является наиболее совершенной и точной версией классической центральной предельной теоремы, не предполагающей никаких дополнительных условий, кроме существования дисперсий. Она лишь различает решетчатый и нерешетчатый случаи. В решетчатом (арифметическом) случае она превращается в локальную теорему. В нерешетчатом случае интегро-локальная теорема Стоуна дает, по существу, ту же точность, что и локальные предельные теоремы, но ничего не предполагает относительно существования плотностей. С помощью интегро-локальных теорем можно получить интегральные, но не наоборот. Интегро-локальные теоремы являются весьма эффективным техническим приёмом для изучения вероятностей больших уклонений.

В диссертационной работе получены интегро-локальные предельные теоремы для классического в теории вероятностей многомерного обобщенного процесса восстановления, при выполнении моментного условия Крамера.

Научная новизна. В диссертации получен ряд интегро-локальных теорем для многомерных процессов восстановления, которые являются обобщением аналогичных теорем А.А. Боровкова, А.А. Могульского[4] на многомерный случай, а также ослабляют некоторые условия в одномерном случае. При этом, интерго-локальная теорема для первого процесса восстановления в т.н. нерегулярной зоне является новой. Все теоремы получены при выполнении моментного условия Крамера на случайный вектор, порождающий обобщенный процесс восстановления.

Цель и задачи исследования. Объектами исследования данной работы являются два многомерных обобщенных процесса восстановления. Основная **цель** диссертации получение ряда интегро-локальных предельных теорем для этих процессов восстановления.

Практическое значение полученных результатов. Диссертация носит теоретический характер. Изложенные в ней результаты могут быть использованы при изучении приклад-

[1] Stone C. *A local limit theorem for nonlattice multi-dimensional distribution functions.* — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, p. 546–551.

[2] Stone C. *On local and ratio limit theorems.* In: Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. II, part II, Berkeley — Los Angeles: Univ. of California, 1967, p. 217–224.

[3] А. А. Боровков, А. А. Могульский, *Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. I*, Теория вероятн. и ее примен., **43**:1 (1998), 3–17.

[4] А. А. Боровков, А. А. Могульский, *Интегро-локальные предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера, I,* Сиб. матем. журн., Том 59, №3 (2018), 491-514, *II*, Сиб. матем. журн., Том 59, №4 (2018), 731-750.

ных задач, связанных с обобщенным процессом восстановления, с целью оценки вероятности редких событий.

Личный вклад соискателя. Все результаты диссертации получены и опубликованы в 3 работах в соавторстве с Могульским А.А. Вклады каждого автора одинаковы.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и научном семинаре.

1. Международной конференции «Symposium on Probability Theory and Random Processes», 5 - 9 июня 2017 г., г. Санкт-Петербург;

2. Международной конференции «The 39th Conference on Stochastic Processes and their Applications (SPA2017)», 24-28 июля 2017г., г. Москва;

3. Международной конференции «mathematics of risk» 27 ноября - 1 декабря 2017г., г. Кресвик, Австралия;

4. Научном семинаре лаборатории теории вероятностей и математической статистики Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН г.Новосибирск (руководитель семинара академик РАН А.А. Боровков).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] - [3].

Структура диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, четырёх глав, заключения и списка используемой литературы.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. Анатолию Альфредовичу Могульскому за неоценимую помощь на всех этапах выполнения диссертации.

Основные результаты диссертации.

1. Получена интегро-локальная теорема для функции (меры) восстановления, которая обобщает аналогичную теорему А.А. Боровкова, А.А. Могульского[4] на многомерный случай и ослабляет условие на первый скачок процесса восстановления.

2. Получена интегро-локальная теорема для первого многомерного процесса восстановления в регулярной зоне, которая обобщает аналогичную теорему А.А. Боровкова, А.А. Могульского[4] на многомерный случай.

3. Впервые получена интегро-локальная теорема для первого многомерного процесса восстановления в нерегулярной зоне.

4. Получена интегро-локальная теорема для второго многомерного процесса восстановления в регулярной зоне уклонений, которая обобщает аналогичную теорему А.А. Боровкова, А.А. Могульского[4] на многомерный случай и несколько ослабляет условия для одномерного случая.

Краткое содержание работы

Во **введении** определяются основные объекты изучения — первый и второй обобщенный процесс восстановления, приводится обзор литературы на тему исследования, а также обсуждается содержание диссертации по главам. Определим основные объекты исследования.

Пусть заданы случайный вектор $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$ и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов $(\tau, \boldsymbol{\zeta}), (\tau_2, \boldsymbol{\zeta}_2), \ldots$, где $\tau_1 \geqslant 0$, $\tau > 0$, а вектора $\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^d, d \geqslant 1$. Обозначим

$$T_n := \sum_{j=1}^{n} \tau_j, \quad \mathbf{Z}_n := \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\zeta}_j \quad \text{при } n \geqslant 1, \quad T_0 = 0, \ \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}.$$

Пусть при $t \geqslant 0$

$$\eta(t) := \min\{k \geqslant 0 \,:\, T_k > t\}, \quad \nu(t) := \max\{k \geqslant 0 \,:\, T_k \leqslant t\}.$$

Первым обобщенным процессом восстановления (п.о.п.в.) называется процесс

$$\mathbf{Z}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)}, \quad t \geqslant 0.$$

Наряду с п.о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ мы также будем рассматривать *второй обобщенный процесс восстановления* (в.о.п.в.)

$$\mathbf{Y}(t) := \mathbf{Z}_{\eta(t)} = \mathbf{Z}(t) + \boldsymbol{\zeta}_{\eta(t)}, \quad t \geqslant 0.$$

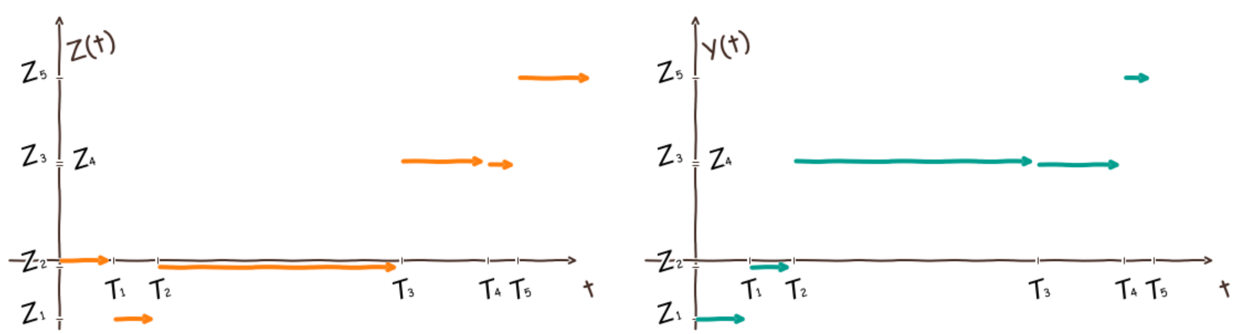

Рис. 1: Процессы восстановления $Z(t), Y(t)$ в одномерном случае $d = 1$.

Везде, если не оговорено противное, будем предполагать, что выполнено условие Крамера для случайного вектора $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ в следующем виде

$[\mathbf{C}_0]$. $\mathbf{E}e^{v\tau + v|\boldsymbol{\zeta}|} < \infty$ *при некотором* $v > 0$.

Кроме того, мы будем предполагать, что случайный вектор $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ является *нерешетчатым*, т.е. *для любого ненулевого вектора* $(c, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ *выполняется* $|\mathbf{E}e^{i(c\tau + \mathbf{c}\boldsymbol{\zeta})}| < 1$. *Эти два условия для случайного вектора* $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ *во избежание повторений в формулировках основных утверждений напоминаться не будут.* Моментные условия для случайного вектора $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$ (т.н. условия «допустимой неоднородности») будут приводиться в каждом из утверждений.

Стандартная общепринятая модель о.п.в. предполагает, что время τ_1 появления первого скачка и величина $\boldsymbol{\zeta}_1$ этого скачка имеют совместное распределение, отличное, вообще говоря, от совместного распределения $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$. Если $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \stackrel{d}{=} (\tau, \boldsymbol{\zeta})$, то процессы $\mathbf{Z}(t), \mathbf{Y}(t)$ будем называть *однородными о.п.в.*; в противном случае — *неоднородными.*

Если $\tau_1 = \tau \equiv 1$, то процесс $\mathbf{Z}(t)$ при $t = 1, 2, 3, \ldots$ становится *случайным блужданием,* порожденным последовательностью сумм независимых случайных векторов $\{\boldsymbol{\zeta}_k\}$. Интегро-локальные теоремы для сумм случайных векторов можно найти в упомянутых работах Стоуна, а также в монографиях В.В. Петрова[5] и А.А.Боровкова.[6]

Если $\zeta_1 = \zeta \equiv 1$, то процесс $Z(t) = \nu(t)$ становится простым процессом восстановления. Для таких процессов распределение $Z(t)$ совпадает с точностью до 1 с распределением времени $\eta(t)$ первого прохождения блужданием $\{T_k\}$ уровня t. Так как $\tau_j \geqslant 0$, то справедливо равенство

$$\mathbf{P}\,(\,Z(t) \geqslant n\,) = \mathbf{P}\,(\,Y(t) > n\,) = \mathbf{P}\,(\,\eta(t) > n\,) = \mathbf{P}\,(\,T_n < t\,)\,,$$

и изучение распределений $Z(t), Y(t)$ вновь сводится к изучению распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Этот объект хорошо исследован как в области нормальных, так и в области больших уклонений, включая интегро-локальные теоремы (см., например, монографию А.А. Боровкова[7], Гл.9).

Грубые аналоги интегро-локальных теорем в одномерном случае $d = 1$ (локальные принципы больших уклонений для конечномерных распределений) установлены в монографии А.А.Боровкова[5].

В **первой главе** вводятся функции, играющие ключевую роль в описании асимптотики процессов восстановления, а также доказывается интегро-локальная теорема для функции (меры) восстановления. Приведём сокращенное содержание первой главы.

Положим для $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E} e^{\lambda\tau + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}}, \quad \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E} e^{\lambda\tau_1 + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}_1},$$

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ \psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}\,, \quad \mathcal{A}_1 := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ \psi_1(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}\,.$$

Ясно, что в соответствии с условием $[\mathbf{C}_0]$ внутренность $(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ содержит точку $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = (0, \mathbf{0})$ и является областью аналитичности функции $\psi(\lambda, \boldsymbol{\mu})$.

Ключевую роль описания асимптотики процессов восстановления играет функция аргумента $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$

$$D(\boldsymbol{\alpha}) := \sup_{\boldsymbol{\mu}} \{\boldsymbol{\mu}\alpha - A(\boldsymbol{\mu})\}, \text{ где } A(\boldsymbol{\mu}) := -\sup\{\lambda : \ \psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \leqslant 1\}\,.$$

В диссертации (А.А. Боровковым, А.А. Могульским[4] в одномерном случае) установлено, что функции $D(\boldsymbol{\alpha})$, $A(\boldsymbol{\mu})$ выпуклы и полунепрерывны снизу.

[5] В.В. Петров, *Суммы независимых случайных величин,* М.: Физматлит, (1972), — 416 с.

[6] А.А. Боровков, *Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстроубывающие распределения приращений,* М.: Физматлит, (2013), - 448 с.

[7] А.А. Боровков, *Теория вероятностей,* М.: URSS, (2009) - 652 с.

Ключевую роль описания асимптотики функции восстановления (см. опр. (1.1)) играет т.н. *вторая функция уклонений* аргументов $\theta \geqslant 0, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}} \{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\} = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \partial\mathcal{A}^{\leqslant 0}} \{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\},$$

где $\mathcal{A}^{\leqslant 0} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ \psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \leqslant 1\}$, ∂B — граница B. Легко заметить, что при $\theta > 0$

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \theta D\left(1, \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right) = \theta D\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right).$$

Пусть $(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$ — любая точка, в которой достигается супремум

$$\sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}} \{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}\} = D(1, \boldsymbol{\alpha}) = D(\boldsymbol{\alpha}),$$

если такая точка имеется. На рисунке 2 показан способ нахождения точки $(\lambda(\alpha), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$ — это точка касания гиперплоскостью с нормалью $(1, \boldsymbol{\alpha})$ выпуклого множества $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$. Если эта точка лежит во внутренности множества $\mathcal{A}$, то граница множества $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ будет строго выпукла в окрестности этой точки, и, следовательно, такая точка будет единственной.

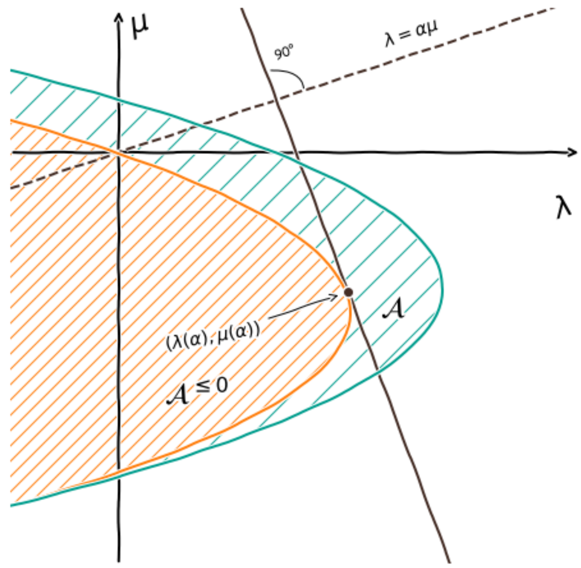

Рис. 2: Определение точки $(\lambda(\alpha), \mu(\alpha))$.

В работе (А.А. Боровковым, А.А. Могульским[4] в одномерном случае) показано, что функции $D(\boldsymbol{\alpha}), D(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ аналитичны во множествах

$$\mathfrak{A} := \{\boldsymbol{\alpha} \, : \, (\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})) \in (\mathcal{A})\}, \quad \mathcal{D} := \left\{(\theta, \boldsymbol{\alpha}) : \ \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta} \in \mathfrak{A}, \quad \theta > 0\right\},$$

соответственно.

Перейдём к формулированию первого основного результата. Для этого определим функцию (меру) восстановления

$$H(B) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}((T_n, \mathbf{Z}_n) \in B), \quad B \subset \mathbb{R}^{d+1}, \tag{1.1}$$

отвечающую случайному блужданию $(T_0, \mathbf{Z}_0), (T_1, \mathbf{Z}_1), (T_2, \mathbf{Z}_2), \cdots$, по которому строятся первый и второй о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$.

Обозначим для $(u, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\delta[u) := [u, u + \delta), \quad \Delta[\mathbf{x}) := [x_{(1)}, x_{(1)} + \Delta) \times \cdots \times [x_{(d)}, x_{(d)} + \Delta)$$

полуинтервал шириной δ с вершиной u и куб в $\mathbb{R}^d$ с ребром Δ с вершиной $\mathbf{x}$, соответственно.

Теорема 1.1. *Пусть* $(\theta_0, \boldsymbol{\alpha}_0) \in \mathcal{D}$ *и выполнено условие «допустимой неоднородности»:*

$$\left(\lambda\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}_0}{\theta_0}\Big), \boldsymbol{\mu}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_0}{\theta_0}\right)\right) \in (\mathcal{A}_1)\,.$$

Тогда для всех $\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\alpha}_0$ *при* $t \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$H\,(\,\delta[\theta t) \times \Delta[\boldsymbol{\alpha} t)\,) = \frac{\delta \Delta^d}{t^{d/2}} C(\theta, \boldsymbol{\alpha}) \psi_1\,(\theta, \boldsymbol{\alpha})\, e^{-tD(\theta, \boldsymbol{\alpha})}(1 + o(1)),$$

где $\psi_1\,(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \psi_1\left(\lambda\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right), \boldsymbol{\mu}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right)\right)$, $\delta = \delta_t \to 0$, $\Delta = \Delta_t \to 0$ *достаточно медленно при* $t \to \infty$*, положительная и непрерывная в* $\mathcal{D}$ *функция* $C(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ *найдена в явном виде.*

Теорема 1.1 доказана А.А. Боровковым, А.А. Могульским[4] (см. теорему 4.1) для случая $d = 1$ и при дополнительном предположении выполнения условия $[\mathbf{C}_0]$ для с.в. $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$. В работе приведено доказательство теоремы 1.1 в случае произвольной размерности $d \geqslant 1$, которое близко в некоторых частях доказательству для одномерного случая $d = 1$, но не использует условие $[\mathbf{C}_0]$ для с.в. $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$.

Во **второй главе** асимптотика вероятностей

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\boldsymbol{\alpha} t)) \tag{2.1}$$

изучается в зоне уклонений $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{A}$, и эту зону, по аналогии с областями аналитичности, возникающими в классических предельных теоремах для случайных блужданий, естественно назвать *крамеровской зоной*. Однако в отличие от названных классических теорем, асимптотику (2.1) не всегда возможно получить во всей зоне $\mathcal{A}$. В ряде случаев ее приходится сужать. Если $\lambda_+ := \sup\left\{\lambda : \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\right\} > D(\mathbf{0})$, то сужение не требуется.

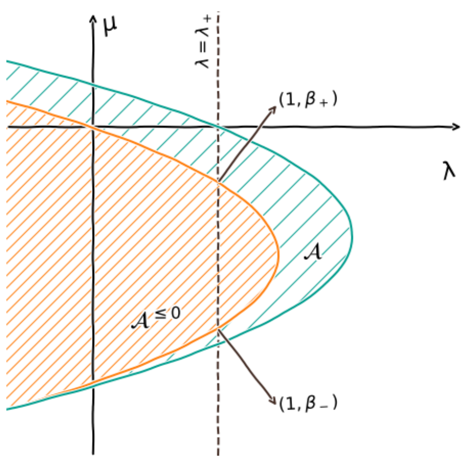

Рис. 3: Множество $\mathfrak{B} = (\beta_-, \beta_+)$.

Рассмотрим случай $\lambda_+ \leqslant D(\mathbf{0})$. В этом случае запретной частью зоны $\mathfrak{A}$ будет замыкание множества

$$\mathfrak{B} := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d : \ \lambda(\boldsymbol{\alpha}) > \lambda_+\}.$$

Множество $\mathfrak{B}$ можно определить с помощью вектора нормали к границе множества $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ в точках пересечения границы с прямой $\lambda = \lambda_+$, при этом первую координату нормали необходимо положить равной 1. На рисунке 3 множество $\mathfrak{B}$ совпадает с интервалом (β_-, β_+).

Сформулируем основное утверждение второй главы в однородном случае:

$$(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \stackrel{d}{=} (\tau, \boldsymbol{\zeta}).$$

Теорема 2.1. *Пусть* $\boldsymbol{\alpha}_0 \in \mathfrak{A} \setminus [\mathfrak{B}]$, *тогда для всех* $\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\alpha}_0$ *при* $t \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\boldsymbol{\alpha} t)) = \frac{\Delta^d}{t^{d/2}} C(\boldsymbol{\alpha}) e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})} I_Z(\boldsymbol{\alpha})(1+o(1)), \tag{2.2}$$

где

$$I_Z(\boldsymbol{\alpha}) := \int_0^\infty e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})y} \mathbf{P}(\tau > y) dy,$$

$C(\boldsymbol{\alpha})$ *есть положительная непрерывная в* $\mathfrak{A}$ *функция, найденная в явном виде,* $\Delta = \Delta_t$ *сходится к* 0 *достаточно медленно при* $t \to \infty$.

Замечание 2.1. *Утверждение теоремы 2.1 распространяется на неоднородный случай при выполнении дополнительного условия «допустимой неоднородности»:*

$$(\lambda(\boldsymbol{\alpha}_0), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}_0)) \in (\mathcal{A}_1).$$

В этом случае, в правой части равенства (2.2) появится дополнительный множитель $\psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$ *и при* $\boldsymbol{\alpha}_0 = 0$ *дополнительное слагаемое*

$$I_{\{\mathbf{0} \in \Delta[\boldsymbol{\alpha} t)\}} \mathbf{P}(\tau_1 \geqslant t),$$

которое при $\lambda_+^{(\tau_1)} > D(\mathbf{0})$ *можно удалить.*

Теорема 2.1 обобщает аналогичную теорему А.А. Боровкова, А.А. Могульского[4] на многомерный случай.

В **третьей главе** исследуется т.н. нерегулярная зона уклонений и доказываются интегро-локальные предельные теоремы в этой зоне как для одномерного, так и для многомерного случая (параграфы 2, 3 и 4, 5, соответственно). Причем, доказательство основного утверждения в одномерном случае построено таким образом, что в многомерном случае оно повторяется слово в слово, лишь с заменой соответствующих лемм. Далее приведём основные утверждения этой главы только для одномерного случая (многомерный случай $d > 1$ формулируется аналогично, но требует больше обозначений).

Как оказалось, для нахождения (точной) асимптотики вероятности (2.1) процесса $Z(t)$ внутри нерегулярной зоны уклонений требуется всего лишь чтобы граница $\partial\mathfrak{B}$ лежала внутри крамеровской зоны $\mathfrak{A}$, в отличии от интегро-локальной теоремы 2.1, где асимптотика найдена только внутри крамеровской зоны. Сформулируем соответствующее условие

$[\mathbf{B}_1]$. *Пусть* $\lambda_+ < D(0)$ *и уравнение*

$$A(\mu) = -\lambda_+$$

имеет ровно два решения $\mu^{(-)} < \mu^{(+)}$, *таких, что*

$$\left(-A(\mu^{(\pm)}), \mu^{(\pm)}\right) = \left(\lambda_+, \mu^{(\pm)}\right) \in (\mathcal{A}).$$

Обозначим

$$\beta_- := A'\left(\mu^{(-)}\right), \quad \beta_+ := A'\left(\mu^{(+)}\right),$$

так что всегда $\beta_- < 0 < \beta_+$. В работе установлено, что множество $\mathfrak{B}$ совпадает с интервалом (β_-, β_+). Нам также потребуется следующее условие:

$[\mathbf{F}_\tau]$. *При $t > 0$ справедливо представление*

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant t) = l(t)e^{-\lambda_+ t + ct^\gamma}, \qquad l(t) = t^\kappa L(t),$$

где $\gamma \in [0, 1)$; κ—произвольная вещественная константа; c—произвольная не равная 0 константа, если $\gamma \in (0, 1)$ и $c = 0$, если $\gamma = 0$; $L(t)$ — произвольная медленно меняющаяся при $t \to \infty$ функция.

Для $y, u \in [-1, 1]$, $\alpha \in (\beta_-, \beta_+)$ обозначим

$$G(y, u, \alpha) := D(\theta_\alpha + y, \alpha) - D(\theta_\alpha, \alpha) - \lambda_+ y - c(\theta_\alpha - y)^\gamma u,$$

где константы $c \in \mathbb{R}$, $\gamma \in [0, 1)$ взяты из условия $[\mathbf{F}_\tau]$, которое предполагается выполненым. В случае $\gamma = 0$ имеем $c = 0$ (см. условие $[\mathbf{F}_\tau]$), и тогда функция $G(y, u, \alpha) = G(y, \alpha)$ не зависит от параметра u.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия $[\mathbf{B}_1]$, $[\mathbf{F}_\tau]$, $\alpha_0 \in (\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+)$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, $|u| < \varepsilon$*

$$\inf_{y \in [-\varepsilon, \varepsilon]} G(y, u, \alpha) = G(y_\alpha(u), u, \alpha),$$

где $y_a(u)$ является единственным решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y} G(y, u, \alpha) = 0,$$

причем $\frac{\partial^2}{\partial y^2} G(y, u, \alpha) > 0$ для всех $y \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

При этом верны следующие соотношения

$$y_\alpha(u) \to 0 \quad \text{при} \quad u \to 0, \quad G(y_\alpha(u), u, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\alpha) u^k,$$

где для аналитических в некоторой окрестности точки $\alpha = \alpha_0$ функций $g_k(\alpha)$ известен алгоритм их построения, в частности: если $\gamma \in (0, 1)$, то

$$g_1(\alpha) = -c(1 - \theta_\alpha)^\gamma, \quad g_2(\alpha) = \frac{(\gamma c)^2 \theta_\alpha (1 - \theta_\alpha)^{2(\gamma - 1)}}{\lambda'(\beta_\alpha)\beta_\alpha},$$

где

$$\beta_\alpha := \begin{cases} \beta_+, & \text{если } \alpha > 0; \\ \beta_-, & \text{если } \alpha < 0; \end{cases}$$

если $\gamma = 0$, то для всех $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$

$$y_\alpha = 0, \quad G(y_\alpha, \alpha) = 0.$$

Определяющую роль в интегро-локальной теореме будет играть полином

$$\Pi(u, \alpha) := \sum_{k=0}^{k_0} g_k(\alpha) u^k, \;\; \alpha \in (\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+),$$

где $k_0 := \left[\frac{1}{1-\gamma}\right]$, $g_0(\alpha) := D_Z(\alpha)$, функции $g_k(\alpha)$ для $k = 1, \cdots, k_0$ определены в лемме 3.1. В случае $\gamma = 0$ полином $\Pi(u, \alpha)$ вырождается в единственное слагаемое $g_0(\alpha) = D_Z(\alpha)$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* $[\mathbf{B}_1]$, $[\mathbf{F}_\tau]$. *Пусть* $\alpha_0 \in (\beta_-, 0) \cup (0, \beta_+)$ *и выполнено условие допустимой неоднородности*

$$(\lambda_+, \mu(\beta_{\alpha_0})) \in (\mathcal{A}_1).$$

Тогда для всех $\alpha \to \alpha_0$ *при* $t \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(Z(t) \in \Delta[\alpha t)) = \Delta l(t) C(\alpha) \psi_1(\lambda_+, \mu(\beta_\alpha)) e^{-t\Pi(t^{\gamma-1}, \alpha)}(1 + o(1)), \tag{3.1}$$

где $\Delta = \Delta_t \to 0$ *достаточно медленно при* $t \to \infty$, *положительная непрерывная функция* $C(\alpha)$ *найдена в явном виде.*

Замечание 3.2. *Если* $\alpha_0 \in (\beta_-, 0)$, *то утверждение теоремы 3.1 сохранится, если условие* $[\mathbf{B}_1]$ *заменить на более слабое условие*

$[\mathbf{B}_1^{(-)}]$. *Пусть* $\lambda_+ < D(0)$ *и уравнение*

$$A(\mu) = -\lambda_+$$

имеет решение $\mu^{(-)}$ *такое, что*

$$\left(-A(\mu^{(-)}), \mu^{(-)}\right) = \left(\lambda_+, \mu^{(-)}\right) \in (\mathcal{A})$$

и $\beta_- := A'\left(\mu^{(-)}\right) < 0$.

Аналогичное утверждение справедливо и для $\alpha_0 \in (0, \beta_+)$.

Главным утверждением **четвертой главы** является интегро-локальная теорема для второго процесса восстановления в регулярной зоне. Приведём её упрощенную формулировку в однородном случае: $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1) \overset{d}{=} (\tau, \boldsymbol{\zeta})$. Регулярную зону уклонений для в.о.п.в. определяет следующее множество

$$\mathfrak{C} := \{\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) \in (\mathcal{M})\}, \text{ где } \mathcal{M} := \left\{\boldsymbol{\mu} : \mathbf{E} e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}} < \infty\right\}.$$

На рисунке 4 внутренность множества $\mathcal{M}$ совпадает с интервалом (μ_-, μ_+). Множество $\mathfrak{C}$ можно построить с помощью вектора нормали аналогично построению множества $\mathfrak{B}$. На рисунке 4 множество $\mathfrak{C}$ совпадает с интервалом (γ_-, γ_+).

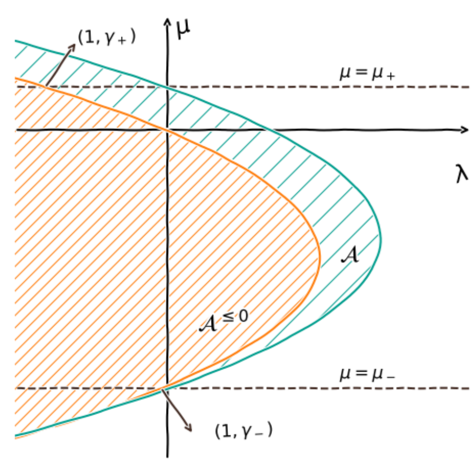

Рис. 4: Множество $\mathfrak{C} = (\gamma_-, \gamma_+)$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\boldsymbol{\alpha}_0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{C}$, *тогда для всех* $\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\alpha}_0$ *при* $t \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\boldsymbol{\alpha} t)) = \frac{\Delta^d}{t^{d/2}} C(\boldsymbol{\alpha}) e^{-tD(\boldsymbol{\alpha})} I_Y(\boldsymbol{\alpha})(1 + o(1)), \tag{4.1}$$

где

$$I_Y(\boldsymbol{\alpha}) := \int_0^\infty e^{\lambda(\boldsymbol{\alpha})y} \mathbf{E}(e^{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\zeta}};\ \tau \geqslant y) dy,$$

$C(\boldsymbol{\alpha})$ *есть положительная непрерывная в* $\mathfrak{A}$ *функция, найденная в явном виде,* $\Delta = \Delta_t$ *сходится к* 0 *достаточно медленно при* $t \to \infty$.

Замечание 4.3. *Утверждение теоремы 4.1 распространяется на неоднородный случай при выполнении дополнительного условия «допустимой неоднородности»:*

$$(\lambda(\boldsymbol{\alpha}_0), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}_0)) \in (\mathcal{A}_1)\,.$$

В этом случае, в правой части равенства (4.1) появится дополнительный множитель $\psi_1(\lambda(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}))$ *и дополнительное слагаемое*

$$\mathbf{P}\left(\, \tau_1 > t,\ \boldsymbol{\zeta}_1 \in \Delta[\boldsymbol{\alpha} t) \,\right),$$

которое можно удалить при выполнении условия

$$(0, \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}_0)) \in (\mathcal{A}_1).$$

Теорема 4.1 обобщает аналогичную теорему А.А. Боровкова, А.А. Могульского[4] на многомерный случай $d \geqslant 1$ и несколько расширяет зону уклонений, для которых выполнено равенство (4.1).

Публикации по теме диссертации

[1] А.А. Могульский, Е.И. Прокопенко, *Интегро-локальные предельные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. I,* Сиб. электрон. матем. изв., Том 15 (2018), 475–502.

[2] А.А. Могульский, Е.И. Прокопенко, *Интегро-локальные предельные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. II,* Сиб. электрон. матем. изв., Том 15 (2018), 503–527.

[3] А.А. Могульский, Е.И. Прокопенко, *Интегро-локальные предельные теоремы для многомерных обобщенных процессов восстановления при моментном условии Крамера. III,* Сиб. электрон. матем. изв., Том 15 (2018), 528–553.