На правах рукописи
УДК 512.5

Порошенко Евгений Николаевич

СТРОЕНИЕ И ТЕОРИИ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ И БЛИЗКИХ К НИМ АЛГЕБР ЛИ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск–2018

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский государственный технический университет».

Научный консультант:
Тимошенко Евгений Иосифович, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:
Пузаренко Вадим Григорьевич, доктор физико-математических наук, доцент (ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева» Сибирского отделения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник);
Пчелинцев Сергей Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор (ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» (Финансовый университет), департамент анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, профессор);
Романьков Виталий Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор (ФГБОУ ВО, «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского», заведующий кафедрой компьютерной математики и программирования).

Ведущая организация:
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный университет».

Защита диссертации состоится «23» ноября 2018 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева» Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: Российская Федерация, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева» Сибирского отделения Российской академии наук, `http://math.nsc.ru`

Автореферат разослан «___» __________ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико математических наук А. И. Стукачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации. Понятие частичной коммутативности может рассматриваться применительно к различным алгебраическим системам: моноидам, группам, ассоциативным алгебрам, алгебрам Ли.

Частично коммутативные группы имеют большое число приложений в различных разделах математики, таких как метрическая геометрия, алгебраическая топология, робототехника. К настоящему моменту частично коммутативные группы исследованы в гораздо большей степени, чем другие частично коммутативные структуры. Хорошо известно сходство между алгебрами Ли и группами. Поэтому определенный интерес представляет нахождение аналогов групповых результатов в алгебрах Ли. Возможна и обратная ситуация, когда результат, полученный изначально для алгебр Ли, служит отправной точкой для получения аналогичного результата для групп.

Начало исследованиям в области частично коммутативных структур было положено в 1969 году, когда в работе П. Картье и Д. Фоата [50] было определено понятие свободных частично коммутативных моноидов для изучения комбинаторных проблем, связанных с перестановками на словах. Частично коммутативные группы были введены в рассмотрение в конце 1970-х годов А. Баудишем в работе [46] под названием "полукоммутативные группы" ("semicommutative groups"). Отметим, что для частично коммутативных групп в англоязычной литературе использовались также термины "graph groups" и "right-angled Artin groups".

Понятие частично коммутативной структуры также может быть очевидным образом введено и на различных многообразиях алгебраических систем: алгебраическая система, полученная факторизацией свободной алгебраической системы данного многообразия по идеалу или по нормальной подгруппе, порожденной определяющими соотношениями частично коммутативной структуры. При этом рассматриваются многообразия, из тождеств которых не следуют дополнительные соотношения коммутирования вершин, то есть две вершины коммутируют тогда и только тогда, когда они смежны в графе G. Чаще всего рассматриваются частично коммутативные структуры на многообразиях нильпотентных и разрешимых (в частности, метабелевых) алгебраических систем.

Период наиболее активного исследования частично коммутативных структур приходится на начало нашего века. Однако, некоторые важные результаты в данной области стали появляться несколько раньше: в

80–90-х годах прошлого века.

Структурные результаты для частично коммутативных ассоциативных алгебр. В 1980 году К. Кимом, Л. Макар-Лимановым и Дж. Неггерсом, Ф. Роушем [73] был получен один из фундаментальных результатов о классификации конечно порожденных частично коммутативных ассоциативных алгебр, а именно, было доказано, что две частично коммутативные ассоциативные алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их определяющие графы (в этой работе по аналогии с частично коммутативными группами, частично коммутативные алгебры также назывались "graph algebras"). В дальнейшем, Г. Душампом и Д. Кробом в [62] этот результат был сформулирован для ассоциативных частично коммутативных алгебр над произвольной областью целостности.

В том же 1980 году в работе К. Кима и Ф. Роуша [72] были описаны централизаторы мономов частично коммутативных ассоциативных алгебр над произвольным коммутативным кольцом и было установлено, что централизатор монома такой алгебры сам является частично коммутативной алгеброй. Кроме того, в этой работе было доказано, что любой моном единственным образом разлагается на попарно коммутирующие множители.

Структурные результаты для частично коммутативных групп. В 1987 г. К. Дромсом с использованием уже упоминавшегося результата Кима, Макар-Лиманова, Неггерса и Роуша об изоморфизме ассоциативных частично коммутативных алгебр было доказано аналогичное утверждение для конечно порожденных частично коммутативных групп [59].

В работе [26] Е. И. Тимошенко в явном виде были найдены Мальцевские базы частично коммутативных нильпотентных метабелевых групп. Нахождение Мальцевской базы позволяет ввести некоторую нормальную форму записи для элементов группы (в некоторой степени Мальцевскую базу можно считать аналогом линейного базиса в алгебре), что значительно упрощает дальнейшие исследования.

Ряд работ по частично коммутативным группам посвящен исследованиям их групп автоморфизмов. Так, Х. Серватиус в [91] привел полное описание централизаторов элементов частично коммутативных групп. В этой же работе, он показал, что для некоторых графов (например, для деревьев) эта группа конечно порождена автоморфизмами, представляющими собой естественные аналоги автоморфизмов Нильсена для свободных групп. Впоследствии это утверждение было доказано М. Р. Лоуренсом для всех конечных графов [74]. А. Дж. Дункан, И. В. Казачков и В. Н. Ремесленников установили, что стабилизаторные подгруппы группы автоморфизмов частично коммутативной группы могут быть представлены как подгруппы группы $GL(n, \mathbb{Z})$, где n — это число ребер в определяющем графе [65]. В. Н. Ремесленниковым и А. В. Трейером в [21] было дано полное описание группы автоморфизмов для случая двуступенно нильпотентных групп.

В работах [63, 64] А. Дж. Дункан, И. В. Казачков и В. Н. Ремесленников исследовали свойства централизаторной размерности частично коммутативных групп, а также их параболические и квазипараболические группы. В итоге был получен алгоритм для вычисления централизаторной размерности частично коммутативных групп [63]; найден критерий того, что подгруппа частично коммутативной группы является централизатором некоторого множества элементов и доказано, что множества параболических и квазипараболических подгрупп замкнуто относительно пересечения [64]. Е. И. Тимошенко в [31] вычислил точное значение централизаторной размерности частично коммутативных метабелевых групп, определенных деревьями.

Также следует отметить работу Г. Душампа и Д. Кроба [60], в которой было установлено, что факторы нижнего центрального ряда частично коммутативной группы состоят из свободных абелевых групп; и статьи С. Л. Шестакова [33, 34], в которых исследовались некоторые уравнения на частично коммутативных группах и были найдены критерии их разрешимости.

Структурные результаты для частично коммутативных алгебр Ли. В отличие от частично коммутативных групп, частично коммутативные алгебры Ли изучены в гораздо меньшей степени. Кроме уже упоминавшейся работы Г. Душампа и Д. Кроба [62], посвященной частично коммутативным структурам вообще, автору диссертации известна лишь еще одна статья этих же авторов [61], посвященная базисам частично коммутативных алгебр Ли. Однако в этой статье нет явного описания базисов, а описан рекурсивный процесс, суть которого в том, что в графе выделяется вполне несвязное подмножество его вершин и задача сводится к нахождению базиса для частично коммутативной алгебры Ли, определяющий граф которой порожден остальными вершинами.

Ряд вопросов, привлекающих внимание исследователей, возникает на стыке алгебры и логики. Речь идет о вопросах, связанных с элементарными и универсальными теориями алгебраических систем, в частности, о вопросах элементарной и универсальной эквивалентности групп и алгебр.

Вопросы элементарной эквивалентности в группах. Для абелевых групп В. Шмелевой был получен критерий элементарной эквивалентности [92].

В работе [12] А. И. Мальцевым было доказано, что группы из класса свободных нильпотентных или свободных разрешимых элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда они изоморфны. Также А. И. Мальцевым были описаны критерии элементарной эквивалентности для классических линейных групп [13].

А. Г. Мясников и О. Харлампович [71], а также независимо З. Села [90] доказали, что конечно порожденные свободные неабелевы группы элементарно эквивалентны, то есть решили знаменитую проблему Тарского. В этой же работе Мясникова и Харлампович были найдены условия, при которых произвольная неабелева группа элементарно эквивалентна свободной неабелевой группе.

А. Г. Мясниковым совместно с В. Н. Ремесленниковым в [17, 18] был найден критерий элементарной эквивалентности для нильпотентных $\mathbb{Q}$-степенных групп конечного ранга, а в [77] были определены необходимые и достаточные условия для некоторых классов свободных групп с операторами и свободных произведений с функцией длины. При этом полностью разобран случай с групп с операторами, удовлетворяющими условию рациональной координатизации и обладающих конечным базисом. К таким группам относятся полициклические группы, разрешимые конечного ранга без кручнеия, а также группы Черникова. В работе [51] И. В. Казачковым, М. Касальс-Руис и В. Н. Ремесленниковым установлен критерий элементарной эквивалентности графовых произведений конечных абелевых групп. Работа А. Г. Мясникова и Н. С. Романовского [19], посвящена исследованиям элементарных теорий (и в частности элементарной эквивалентности) m-жестких групп. Наконец, А. Г. Мясниковым совместно с М. Сохраби [78] было доказано, что если пополнение П. Холла свободной нильпотентной группы ранга $r \geqslant 2$ и класса нильпотентности $c \geqslant 2$ над некоторой биномиальной областью целостности R элементарно эквивалентно некоторой группе G, то G является абелевой деформацией пополнения П. Холла свободной нильпотентной группы ранга r и класса эквивалентности c над биномиальной областью целостности S, элементарно эквивалентной R.

Следует отметить работы Ф. Оджера, в которых главным образом исследуются вопросы элементарной эквивалентности на группах, являющихся расширениями групп одного из многообразия посредством групп из другого, а также вопросы сокращения. Так в [79, 81] доказывается, что из элементарной эквивалентности групп вида $G \times \mathbb{Z}$ и $H \times \mathbb{Z}$ следует элементарная эквивалентность групп G и H, а в случае, если G и H являются конечно-порожденными расширениями конечных групп с помощью нильпотентных, то G и H изоморфны. В [80] доказывается критерий элементарной эквивалентности расширений абелевых групп посредством конечных, а также приводится пример таких неизоморфных групп G и H этого класса, что $G \times \mathbb{Z}$ и $H \times \mathbb{Z}$ элементарно эквивалентны. В совместной работе Оджера с К. Лазаром [75] был установлен критерий элементарной эквивалентности расширений полициклических групп посредством конечных.

В [8] Ч. К. Гуптой и Е. И. Тимошенко исследовались вопросы элементарной эквивалентности частично коммутативных метабелевых групп и был найден критерий элементарной эквивалентности таких групп.

Вопросы элементарной эквивалентности в алгебрах Ли. Элементарная эквивалентность алгебр Ли исследована в гораздо меньшей степени, однако и в этой области получены некоторые результаты. Так, А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников в [18] установили критерий элементарной эквивалентности конечномерных нильпотентных алгебр Ли над полем рациональных чисел, используя связь между нильпотентными группами и нильпотентными алгебрами Ли над полем рациональных чисел, установленную А. И. Мальцевым [11]. В. А. Романьков в [23] доказал, что в многообразии, содержащем многообразие метабелевых алгебр Ли, относительно свободные алгебры Ли с различным числом порождающих не являются элементарно эквивалентными.

Универсальная эквивалентность в частично коммутативных группах. Большой вклад в исследования в данной области внес Е. И. Тимошенко. Его работы [9, 10, 25, 27] (первые две из которых в соавторстве с Ч. К. Гуптой) посвящены универсальным теориям частично коммутативных групп из многообразий метабелевых и нильпотентных групп. В первых трех работах были найдены критерии универсальной эквивалентности для частично коммутативных метабелевых и метабелевых нильпотентных групп, определяющими графами которых являются деревья, а также для частично коммутативных метабелевых групп, определенных циклами. Кроме того было показано, что класс частично коммутативных метабелевых групп, определенных деревьями, не выделяется по универсальной теории в классе всех частично коммутативных метабелевых групп, то есть существуют универсально эквивалентные частично коммутативные метабелевы группы, одна из которых определена деревом, а другая — графом с циклами. Четвертая работа посвящена гипотезе В. Н. Ремесленникова: если универсальные теории двух частично коммутативных групп различны, то существует граф, такой что формула, определенным образом построенная по этому графу, будет истинна на одной из этих групп и ложна на другой. В указанной работе был приведен пример частично коммутативных метабелевых групп, универсальные теории которых различны, но множества формул, построенных по деревьям, истинных в соответствующей группе, совпадают.

Следует отметить работы А. А. Мищенко и А. В. Трейера [16] и А. А. Мищенко [14], посвященные исследованию универсальных теорий двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп. В частности, во второй из перечисленных работ для этих групп была доказана справедливость гипотезы Ремесленникова. Наконец, в совместной работе А. А. Мищенко с Е. И. Тимошенко [15] устанавливается критерий универсальной эквивалентности для двуступенно нильпотентных R-групп над произвольным биномиальным евклидовым кольцом R.

Важной характеристикой алгебраических систем, в том числе и частично коммутативных, является коммутаторная ширина. Это понятие происходит от понятия ширины в группах.

Коммутаторная ширина в группах. Непосредственно понятие коммутаторной ширины в группах вводится, например, в [87]. В данной области исследования можно вести по двум направлениям. С одной стороны, можно исследовать вопросы нахождения такого минимального значения n, что любой элемент из коммутанта группы (производной алгебры Ли) может быть представлен в виде произведения (соответственно, суммы) не более, чем n коммутаторов. С другой стороны, можно рассматривать понятие коммутаторной ширины для каждого конкретного элемента, в частности, изучать вопросы существования алгоритмов, позволяющих для каждого элемента g из коммутанта группы найти такое минимальное значение $n(g)$, что элемент g представим в виде произведения $n(g)$ коммутаторов.

Очевидна связь проблем нахождения коммутаторной ширины и исследования вопросов разрешимости уравнений определенного вида. В этой связи следует упомянуть обзор В. А. Романькова [89], в котором собраны основные результаты об уравнениях в группах.

По-видимому, первый алгоритм вычисления коммутаторной ширины элементов из коммутанта свободной группы был построен Р. Голдстейном и Е. Тёрнером [68]. Алгоритм, предложенный несколько позже М. Каллером [54], может быть использован не только для свободных групп, но и для свободных произведений. Еще один алгоритм вычисления коммутаторной ширины можно извлечь из работы А. Ю. Ольшанского [20]. Все эти алгоритмы в той или иной степени используют геометрические соображения.

В работе [88] доказано, что если в группе G есть нормальная абелева подгруппа, такая что групп G/A удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей для нормальных подгрупп, то коммутаторная ширина группы G конечна. Романьковым доказано, что коммутаторная ширина полициклических групп конечна [22]. Также в работах В. А. Романькова [1, 2, 23], первые две из которых в соавторстве с Х. С. Алламбергеновым, и в работе [42] М. Ахавала-Малайери и А. Ремтуллы найдены значения коммутаторной ширины для некоторых нильпотентных и метабелевых групп. В этих работах речь идет о нахождении коммутаторной ширины для всей нильпотентной группы в целом, то есть исследования проводились в первом из описанных выше направлений.

В работе [41] М. Ахавалом-Мелайери найдены оценки для коммутаторной ширины каждого элемента из коммутанта разрешимой группы, удовлетворяющей условию обрыва возрастающих цепей для нормальных подгрупп. В этой работе также найдены формулы для представления каждого элемента из коммутанта в виде произведения минимального числа коммутаторов. Работа [28] Е. И. Тимошенко посвящена изучению коммутаторной ширины элементов сплетений свободных абелевых групп.

Коммутаторная ширина в алгебрах Ли. Понятие коммутаторной ширины в алгебрах Ли определяется аналогично понятию коммутаторной ширины в группах. Как и понятие частичной коммутативности, понятие коммутаторной ширины для алгебр Ли изучено в значительно меньшей степени, чем для групп. Однако и здесь получены определенные результаты. Например, В. А. Романьковым в уже упоминавшейся работе [23] были найдены значения коммутаторной ширины для некоторых относительно свободных алгебр Ли над отдельными полями. Как и для групп, для алгебр Ли в этой статье изучается коммутаторная ширина для всей алгебры Ли в целом.

Распределения элементов на многообразиях алгебраических систем. Элементы, равномерно распределенные на группах, изучались в работах [85, 86]. Такие элементы назывались сохраняющими меру (measure preserving elements). В работах Е. И. Тимошенко [29, 30] было введено понятие системы элементов, сохраняющей меру на некотором многообразии групп, а также, по аналогии, понятие системы элементов, сохраняющей меру на многообразии алгебраических систем. В настоящее время такие системы элементов также называют равномерно распределенными системами. В этих же работах Е. И. Тимошенко были описаны системы элементов, сохраняющие меру на многообразиях нильпотентных и метабелевых групп. Оказалось, что такие системы элементов являются примитивными системами, то есть их можно дополнить до базиса свободной группы многообразия. Все описанные результаты получены для групп, а их аналогов для алгебр или колец Ли нет. Кроме равномерного распределение элементов на группах и кольцах можно изучать и другие распределения.

Базисы Грёбнера — Ширшова. Идея базисов Грёбнера — Ширшова для алгебр Ли была введена А. И. Ширшовым в [37] (см. также [5] для явного описания). Однако, некоторые предварительные результаты были получены еще раньше. Например, понятие так называемых ассоциативных слов Линдона — Ширшова было введено в работе Линдона [76], а неассоциативные слова Линдона — Ширшова были введены в работах [36] и [53] независимо. Метод базисов Грёбнера — Ширшова получил применение сразу же после появления работы [37]. Первые применения были сделаны самим А. И. Ширшовым. Так, в этой же работе была решена проблема равенства и доказана теорема о свободе для алгебр Ли с одним определяющим соотношением, а в [38] была опровергнута гипотеза о строении подалгебр свободного произведения алгебр Ли.

Существует ряд свойств базисов Грёбнера — Ширшова, которые упрощают изучение алгебр Ли и позволяют получить алгоритмы, отвечающие на те или иные фундаментальные вопросы, касающиеся алгебр Ли. Поэтому в настоящее время базисы Грёбнера — Ширшова активно используются как в теоретических вычислениях, так и в вычислительной алгебре. Например, если S — это конечный базис Грёбнера — Ширшова конечно порожденной алгебры Ли, то существует алгоритм, позволяющий для любого элемента свободной алгебры Ли установить, лежит ли этот элемент в идеале $\mathrm{Id}(S)$ свободной алгебры Ли, порожденном множеством S. Поэтому нахождение базисов Грёбнера — Ширшова для той или иной алгебры само по себе является полезной задачей. Полученный результат может быть использован в дальнейшем для других исследований, связанных с этой алгеброй.

Наиболее часто базис Грёбнера — Ширшова алгебры Ли используется для того, чтобы найти линейный базис этой алгебры. Однако, в силу того, что базис Грёбнера — Ширшова представляет из себя набор более сложных элементов и серий элементов, иногда, при наличии дополнительной информации об алгебре, бывает удобнее наоборот использовать линейный базис алгебры Ли для получения базиса Грёбнера — Ширшова этой алгебры. Алгоритм, осуществляющий этот процесс, описан в работе автора диссертации [84].

Количество работ, посвященных базисам Грёбнера — Ширшова настолько велико, что не представляется возможным здесь перечислить их все. Поэтому мы ограничимся ссылкой на обзоры [6, 49], посвященные тематике базисов Грёбнера — Ширшова. В настоящее время базисы Грёбнера — Ширшова наиболее активно изучаются в России, где данной связи первую очередь заслуживает упоминания имя Л. А. Бокутя; а также в Китае, где основной вклад в изучение базисов Грёбнера — Ширшова внес Ю. Чен. В диссертации речь пойдет о базисах Грёбнера — Ширшова алгебры Онсагера и тетраэдной алгебры.

Алгебра Онсагера. Эта алгебра Ли была введена Л. Онсагером в работе [82]. В этой статье свободная энергия двумерной модели Айсинга была точно вычислена. В течение многих лет алгебры Онсагера активно изучались в связи с моделями разрешимых решеток [40, 43, 44, 48, 58, 93], теорией представлений [56, 57], алгебрами Каца — Муди [55, 83] и частично-ортогональными полиномами [66, 67].

Тетраэдная алгебра. Понятие тетраэдной алгебры было введено Б. Хартвигом и П. Тервилигером в [70]. В этой работе также было показано, что тетраэдная алгебра, будучи рассмотренной как векторное пространство, может быть представлена в виде прямой суммы трех подпространств, каждое из которых представляет собой алгебру, изоморфную алгебре Онсагера. Там же был найден линейный базис тетраэдной алгебры.

Цель работы. Основной целью работы является изучение частично коммутативных (метабелевых) колец и алгебр Ли, а также близких к ним объектов, и распространение результатов, полученных для групп, на кольца и алгебры Ли.

Основные результаты диссертации.

1. Построены базисы частично коммутативных алгебр Ли и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли в явном виде.

2. Получено полное явное описание централизаторов элементов частично коммутативных алгебр Ли.

3. Найдены критерии универсальной эквивалентности конечнопорожденных частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, определенных циклами.

4. Найдены критерии универсальной эквивалентности частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли (конечно- и счетнопорожденных), определенных деревьями, а также найден критерий универсальной эквивалентности счетнопорожденных метабелевых групп, определяющими графами которых являются деревья.

5. Найдены критерии элементарной эквивалентности конечнопорожденных частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых колец Ли, а также конечнопорожденных частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли над произвольными полями в случае, когда алгебра Ли рассматривается как двуосновная алгебраическая система.

6. Установлено, что проблема нахождения коммутаторной ширины элемента производной однородной метабелевой алгебры Ли является алгоритмически разрешимой.

7. Установлено, что система элементов свободного конечнопорожденного метабелева кольца Ли является равномерно распределенной тогда и только тогда, когда она является примитивной.

8. Найдены базисы Грёбнера — Ширшова алгебры Онсагера и тетраэдной алгебры.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно (п.п. 1, 4 в части частично коммутативных алгебр Ли, п.п. 2,3,5,6,8) или в неразделимом соавторстве с научным консультантом Е. И. Тимошенко (п.п. 1, 4 в части частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, п. 7).

Теоретическая и практическая значимость результатов. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть полезны, в первую очередь, специалистам по неассоциативной теории колец. Кроме того, они могут быть включены в программы спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в различных областях алгебры.

Методы исследования. В работе используются как теоретико-групповые методы, адаптированные для алгебр и колец Ли, так и методы собственно комбинаторной теории алгебр Ли, в частности, метод базисов Грёбнера — Ширшова.

Аппробация результатов. Результаты исследований докладывались на следующих конференциях.

1. Международная конференция, “Алгебра и логика: теория и приложения”, посвященная 70-летию со дня рождения В. М. Левчука, Красноярск, Россия, 2016 г.

2. Международная конференция “Алгебра и математическая логика: теория и приложения”, Казань, Россия, 2014 г.

3. Четвертая школа-конференция “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов”, Москва, Россия, 2014 г.

4. Международная конференция “Мальцевские чтения”, Новосибирск, Россия, 2012, 2014, 2015, 2016, 2017 гг.

5. Международная конференция по теории колец, посвященная 90-летию со дня рождения А. И. Ширшова, Новосибирск, Россия, 2011 г.

6. Международная летняя школа-конференция “Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры”, Эрлагол, республика Алтай, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017 гг.

Кроме того, результаты докладывались семинаре “Алгебра и логика” кафедры алгебры и математической логики механико-математического факультета Новосибирского государственного университета, на семинаре по теории колец им. А. И. Ширшова, лаборатории теории колец Института математики СО РАН, научно-методическом семинаре кафедры алгебры и методики обучения математике Алтайской государственной педагогической академии (2011 г.) и на научной сессии факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета (2016, 2017 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [94]–[116], в том числе работы [94]–[104] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора наук или в приравненных к ним зарубежных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 8 глав, разбитых на разделы (кроме главы 7) и подразделы (разделы 3.1,4.1,4.2,6.1), заключения, списка основных обозначений и библиографического списка. Объем диссертации составляет 229 страниц.

Содержание диссертации

В главе 1 приведены основные определения и результаты, которые будут использоваться в дальнейшем.

В главе 2 мы в явном виде строим линейные базисы для частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, определенных произвольными неориентированными графами без петель. Каждому из двух указанных выше классов алгебр посвящено по разделу, так как при построении линейных базисов для частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли использовались принципиально различающиеся методы. Для частично коммутативных алгебр Ли используется метод базисов Грёбнера — Ширшова. В случае частично коммутативных метабелевых алгебр Ли сначала доказываются некоторые свойства элементов такой алгебры в зависимости от структуры ее определяющего графа и на основе этих свойств находится множество мономов, для которого доказывается, что оно будет являться базисом. Используемые при этом методы аналогичны методам для решения сходных задач для частично коммутативных метабелевых групп. Основные результаты главы приведены в следующих теоремах.

Теорема 2.7. *Пусть R — область целостности и G — неориентированный граф без петель, с множеством вершин A. Тогда множество всех PCLS-слов является базисом частично коммутативной R-алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A;G)$.*

Теорема 2.11. *Пусть R — область целостности и G — неориентированный граф без петель. Множество* $\mathrm{Bas}(A;G)$ *является базисом частично коммутативной метабелевой R-алгебры Ли $\mathcal{M}_R(A;G)$.*

Глава 3 посвящена исследованию централизаторов частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли. Как и в главе 2, здесь каждому из случаев частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли для произвольного определяющего графа без петель посвящен отдельный раздел. Различие в подходах является следствием различий в структуре базисных элементов в этих случаях.

В случае частично коммутативных алгебр Ли задача была решена полностью, то есть было получено исчерпывающее описание централизатора любого элемента из соответствующей алгебры. В качестве основного результата раздела была получена следующая теорема.

Теорема 3.15. *Пусть R — область целостности, G — неориентированный граф без петель с множеством вершин A, g — произвольный элемент частично коммутативной R-алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A;G)$ и $H_1, H_2, \ldots, H_p$ — компоненты связности графа $\overline{G}(\mathrm{supp}(g))$. Тогда $g = \sum_{i=1}^{p} g_i$, где $\mathrm{supp}(g_i) \subseteq A(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots p$ и $C(g)$ состоит из элементов вида $h = \sum_{i=1}^{p} h_i + h^{(1)}$, где для каждого $i = 1, 2, \ldots p$ либо $h_i = 0$, либо $g_i \backsim h_i$, а также $\mathrm{supp}(g) \overset{G}{\leftrightarrow} \mathrm{supp}(h^{(1)})$.*

Для частично коммутативных метабелевых алгебр Ли получено только описание централизаторов линейных комбинаций порождающих, которое дают два следующих утверждения.

Теорема 3.23 *Пусть R — область целостности и G — неориентированный граф без петель с множеством вершин A. Тогда централизаторы порождающих частично коммутативной метабелевой R-алгебры Ли $\mathcal{M}_R(A;G)$ имеют следующий вид.*
1. Если a_1 — изолированная вершина в графе G, то $C(a_1)$ состоит из всех элементов g представимых в виде

$$g = \alpha_1 a_1, \tag{1}$$

где $\alpha_1 \in R$.
2. Если вершина a_1 висячая (для определенности смежна только с вершиной a_2) в графе G, то $C(a_1)$ состоит из всех элементов g представимых в виде

$$g = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \tag{2}$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in R$.
3. Если вершина a_1 смежна с вершинами $a_2, \ldots, a_r$, в графе G ($r \geqslant 3$), то $C(a_1)$ состоит из всех элементов g, представимых в виде

$$g = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k a_{l_k} + \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant r} [a_i, a_j].g_{ij}, \tag{3}$$

где $\alpha_k \in R$, $g_{ij} \in R[A \backslash \{a_1\}]$.

Лемма 3.25 *Пусть R — область целостности, G — неориентированный граф без петель с множеством вершин A. Тогда в частично коммутативной метабелевой R-алгебре Ли $\mathcal{M}_R(A;G)$ выполнено*

$$\mathcal{C}(\sum_{j=1}^{l} \alpha_{i_j} a_{i_j}) = \bigcap_{j=1}^{l} \mathcal{C}(a_{i_j})$$

для любых элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_l}$ и для любых $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_l} \in R \backslash \{0\}$.

Кроме того, в разделе 3.2 более детально исследуются централизаторы линейных комбинаций порождающих в частных случая, когда определяющий граф соответствующей частично коммутативной метабелевой алгебры Ли является циклом или деревом, соответственно. Явная структура централизаторов в этих случаях является удобным инструментом для исследования универсальных теорий частично коммутативных алгебр Ли.

В главе 4 изучаются условия универсальной эквивалентности частично коммутативных структур. Исследуются случаи, когда определяющие графы являются циклами и когда эти графы представляют собой деревья.

В разделе 4.1 найдены критерии универсальной эквивалентности частично коммутативных алгебр Ли и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, определенных циклами. Приведем соответствующие результаты.

Теорема 4.4 *Пусть R — область целостности, а C_n и C_m — циклические графы на n и m вершинах соответственно ($n, m \geqslant 3$). Частично коммутативные R-алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A; C_n)$ и $\mathcal{L}_R(B; C_m)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$.*

Теорема 4.9 *Пусть R — область целостности, C_n и C_m — циклические графы на n и m вершинах соответственно ($m, n \geqslant 3$). Частично коммутативные метабелевы алгебры Ли $\mathcal{M}_R(A; C_n)$ и $\mathcal{M}_R(B; C_m)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$.*

Для случая деревьев, в том числе бесконечных, в разделе 4.2 показано, что классы частично коммутативных алгебр Ли, определенные деревьями конечного и бесконечного типов, отделяются друг от друга по универсальной теории.

Теорема 4.24 *Пусть R —область целостности, G — дерево бесконечного типа с множеством вершин A, а H — дерево конечного типа с множеством вершин B. Тогда частично коммутативные R-алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A; G)$ и $\mathcal{L}_R(B; H)$ не являются универсально эквивалентными.*

Затем для каждого из этих классов найдены критерии универсальной эквивалентности, которые мы приведем в следующих двух теоремах.

Теорема 4.25 *Пусть R — область целостности, G и H — деревья конечного типа с множествами вершин A и B соответственно, причем $|A| \geqslant 2$, $|B| \geqslant 2$. Частично коммутативные R-алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A; G)$ и $\mathcal{L}_R(B; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $G^* \simeq H^*$.*

Теорема 4.29 *Пусть R — область целостности, G и H — деревья бесконечного типа с множествами вершин A и B соответственно. Частично коммутативные R-алгебры Ли $\mathcal{L}_R(A; G)$ и $\mathcal{L}_R(B; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда деревья G^* и H^* взаимно локально вложимы.*

Та же работа проделана и для частично коммутативных метабелевых алгебр Ли (теоремы 4.38–4.40). Кроме этого, были найдены критерии универсальной эквивалентности для частично коммутативных метабелевых групп, определенных деревьями, хотя бы одно из которых бесконечно (теоремы 4.43–4.45). По причине сходства этих результатов с приведенными выше результатами для частично коммутативных алгебр Ли мы не будем приводить здесь формулировки этих теорем. Напомним, что критерий универсальной эквивалентности конечно порожденных частично коммутативных метабелевых групп был найден Е. И. Тимошенко в [25].

Наконец, в разделе 4.3 показывается, что класс частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, определенных деревьями, не выделяется по универсальной теории в классе всех частично коммутативных метабелевых алгебр Ли.

Теорема 4.52 *Пусть R — область целостности, содержащая множество $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца, G — неориентированный граф без петель с множеством вершин A. Предположим, что существует $a \in A$, такой что класс $\sim_\perp$-эквивалентности $\widetilde{A}_a^\perp$ содержит более одного элемента. Наконец, пусть $A^{(n)} = A\backslash\{a\}$ и $G^{(n)} = G(A^{(n)})$. Тогда частично коммутативные метабелевы алгебры Ли $\mathcal{M}_R(A;G)$ и $\mathcal{M}(A^{(n)};G^{(n)})$ универсально эквивалентны.*

Глава 5 посвящена исследованию вопросов элементарной эквивалентности. Найдены критерии элементарной эквивалентности в двух случаях: для частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, рассматриваемых, как двуосновные системы, и для частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых колец Ли. Каждому случаю посвящено по разделу. Приведем соответствующие результаты.

Теорема 5.6 *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, G и H — конечные неориентированные графы без петель, с множествами вершин A и B соответственно.*

(1) *Частично коммутативные алгебры Ли $\mathcal{L}_\mathbb{F}(A;G)$ и $\mathcal{L}_\mathbb{F}(B;H)$, рассматриваемые как двуосновные алгебраические системы, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G \simeq H$.*

(2) *Частично коммутативные метабелевы алгебры Ли $\mathcal{M}_\mathbb{F}(A;G)$ и $\mathcal{M}_\mathbb{F}(B;H)$, рассматриваемые как двуосновные алгебраические системы, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G \simeq H$.*

Теорема 5.12 *Пусть G и H —- произвольные конечные неориентирован-*

ные графы без петель, с множествами вершин A и B соответственно. (1) *Частично коммутативные кольца Ли $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(A; G)$ и $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(B; H)$, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G \simeq H$.*

(2) *Частично коммутативные метабелевы кольца Ли $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(A; G)$ и $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(B; H)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G \simeq H$.*

Кроме того, в разделе 5.1 доказывается аналог теоремы об изоморфизме частично коммутативных структур (см. [62]) для конечно порожденных частично коммутативных метабелевых алгебр Ли.

Теорема 5.5 *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, G и H — конечные неориентированные графы без петель с множествами вершин A и B соответственно. Частично коммутативные метабелевы алгебры Ли $\mathcal{M}_{\mathbb{F}}(A; G)$ и $\mathcal{M}_{\mathbb{F}}(B; H)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $G \simeq H$.*

Вопросы проверки на разрешимость уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{m} [x_i, y_i] = g$$

над конечнопорожденными метабелевыми алгебрами Ли для произвольного элемента g из производной рассматриваемой алгебры Ли исследуются в главе 6. Итогом исследований в данной области является следующая теорема.

Теорема 6.11 *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, такое что существует алгоритм, проверяющий разрешимость произвольной конечной системы линейных уравнений над $\mathbb{F}$, $\mathcal{M}_{\mathbb{F}}(A)$ — свободная метабелева алгебра Ли над полем $\mathbb{F}$, с конечным множеством порождающих A. Тогда для произвольного элемента $g \in \mathcal{M}'_{\mathbb{F}}(A)$ задача проверки существования решений уравнения $\sum_{s=1}^{m} [x_s, y_s] = g$ является алгоритмически разрешимой.*

Из нее вытекает, что коммутаторная ширина любого элемента g из мультиоднородной метабелевой алгебры Ли над полем $\mathbb{F}$, удовлетворяющим условиям теоремы 6.11, может быть найдена алгоритмически (теорема 6.12).

В главе 7 изучаются равномерно распределенные системы элементов на многообразии метабелевых колец Ли, а также примитивные системы элементов свободных метабелевых колец Ли и их свойства. Основным результатом главы является следующий.

Теорема 7.8 *Пусть A — конечное множество. Система элементов $\{g_1, \ldots, g_m\}$ свободного метабелевого кольца $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}(A)$ примитивна тогда и только тогда, когда она равномерно распределена на многообразии метабелевых колец Ли.*

Наконец, глава 8 посвящена нахождению базисов Грёбнера — Ширшова для алгебры Онсагера (теорема 8.3) и тетраэдной алгебры (теорема 8.4). В силу того, что тетраэдная алгебра представляет собой прямую сумму трех пространств, каждое из которых является алгеброй, изоморфной алгебре Онсагера, базис Грёбнера — Ширшова для этой алгебры получается из соотношений, составляющих базис Грёбнера — Ширшова алгебры Онсагера (для каждой копии этой алгебры) в совокупности с некоторым множеством дополнительных соотношений, связывающих элементы различных копий алгебры Онсагера.

Заключение

В процессе исследования в рамках диссертации были получены следующие результаты:

1. Построены базисы частично коммутативных алгебр Ли и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли в явном виде.

2. Получено полное явное описание централизаторов элементов частично коммутативных алгебр Ли.

3. Найдены критерии универсальной эквивалентности конечнопорожденных частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, определенных циклами.

4. Найдены критерии универсальной эквивалентности частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли (конечно- и счетнопорожденных), определенных деревьями, а также найден критерий универсальной эквивалентности счетнопорожденных метабелевых групп, определяющими графами которых являются деревья.

5. Найдены критерии элементарной эквивалентности конечнопорожденных частично коммутативных и частично коммутативных мета-

белевых колец Ли, а также конечнопорожденных частично коммутативных и частично коммутативных метабелевых алгебр Ли над произвольными полями в случае, когда алгебра Ли рассматривается как двуосновная алгебраическая система.

6. Установлено, что проблема нахождения коммутаторной ширины элемента производной однородной метабелевой алгебры Ли является алгоритмически разрешимой.

7. Установлено, что система элементов свободного конечнопорожденного метабелева кольца Ли является равномерно распределенной тогда и только тогда, когда она является примитивной.

8. Найдены базисы Грёбнера — Ширшова алгебры Онсагера и тетраэдной алгебры.

В дальнейшем перспективными представляются следующие направления исследований.

1. Получение полного описания централизаторов элементов частично коммутативных метабелевых алгебр Ли. В диссертации было получено лишь описание централизаторов линейных комбинаций порождающих этих алгебр.

2. Изучение вопросов универсальной эквивалентности на более широких классах частично коммутативных (метабелевых) алгебр Ли.

3. Исследование вопроса о выделимости частично коммутативных (метабелевых) алгебр Ли в классе всех алгебр Ли соответствующего многообразия по универсальной теории. Иными словами, ответ на вопрос, существует ли (метабелева) алгебра Ли, не являющаяся частично коммутативной, универсальная теория которой совпадает с универсальной теорией некоторой частично коммутативной (метабелевой) алгебры Ли.

4. Нахождение критерия элементарной эквивалентности конечно порожденных частично коммутативных (метабелевых) алгебр Ли над произвольным полем.

5. Изучение вопросов универсальной эквивалентности для ассоциативных алгебр.

Благодарности. Автор выражает благодарность Е. И. Тимошенко за внимание к данной работе, полезные дискуссии в области тематики диссертации и всестороннюю поддержку. Кроме того, автор благодарен Л. А. Бокутю, своему первому научному руководителю, за обсуждения, касающиеся базисов Гребнера — Ширшова. Также автор приносит благодарность всем участникам семинара “Алгебра и логика” и семинара по теории колец имени А. И. Ширшова за заданные вопросы и полезные замечания, сделанные во время докладов. Наконец, автор благодарит сотрудников кафедры алгебры и математической логики Новосибирского государственного технического университета, а также родных и близких за моральную поддержку.

Литература

[1] Х. С. Алламбергенов, В. А. Романьков, Произведения коммутаторов в группах, Докл. АН УзССР, **4** (1984), 14–15.

[2] Х. С. Алламбергенов, В. А. Романьков, О произведении коммутаторов в группах, Сиб. мат. журн. Новосибирск, 1985, 20 с., Деп. в ВИНИТИ, №4566–85.

[3] В. А. Артамонов, Проективные метабелевы группы и алгебры Ли, Изв. АН СССР, Сер. мат, **42**, 2 (1978), 226–236.

[4] Л. А. Бокуть, База свободных полинильпотентных алгебр Ли, Алгебра и логика, Семинар, **2**, 4 (1963), 13–20.

[5] Л. А. Бокуть, Неразрешимость проблемы равенство и супералгебры конечно представленных алгебр Ли, Изв. АН СССР, **6** (1972), 1153–1199.

[6] Л. А. Бокуть, Ю. Фонг, В.-Ф. Ке, П. С. Колесников, Базисы Грёбнера и Грёбнера — Ширшова в алгебре и конформные алгебры, Фундаментальная и прикладная математика, **6**, 3 (2000), 669–706.

[7] Б. Л. ван дер Варден, Алгебра, Изд. 3-е, стер, Санкт-Петербург, изд-во Лань, 2004.

[8] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность, Алгебра и логика, **48**, 3 (2009), 309–341.

[9] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Об универсальных теориях частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, **50**, 1 (2011), 3–25.

[10] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Свойства и универсальные теории частично коммутативных метабелевых нильпотентных групп, Алгебра и логика, **51**, 4 (2012), 429–457.

[11] А. И. Мальцев, Об одном классе однородных пространств, Изв. АН СССР, серия математика, **13**, 1 (1949), 9–32.

[12] А. И. Мальцев, О свободных разрешимых группах, Докл. АН СССР, **130**, 3 (1960), 495–498.

[13] А. И. Мальцев, Об элементарных свойствах линейных групп, Проблемы математики и механики, изд-во СОРАН, Новосибирск, 1961, 110–132.

[14] А. А. Мищенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп, Вестник Омского ун-та, спец. выпуск "Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений", 2008, 61–68.

[15] А. А. Мищенко, Е. И. Тимошенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных нильпотентных групп, Сибирский математический журнал, **52**, 5 (2011), 1113–1122.

[16] А. А. Мищенко, А. В. Трейер, Графы коммутативности для частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп, Сиб. электрон. матем. изв., **4** (2007), 460–481, `http://semr.math.nsc.ru/v4/p460-481.pdf`.

[17] А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Изоморфизмы и элементарные свойства нильпотентных степенных групп, Докл. АН СССР, **258**, 5 (1981), 1056–1059.

[18] А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Классификация степенных нильпотентных групп по элементарным свойствам, Изоморфизмы и элементарные свойства нильпотентных степенных групп, в кн. Мат. логика и теория алгоритмов, Новосибирск, Наука, 1982, 56–87 (Труды Ин-та математики).

[19] А. Г. Мясников, Н. С. Романовский, Логические аспекты теории делимых жестких групп, **459**, 2 (2014), 154–155.

[20] А. Ю. Ольшанский, Диаграммы гомоморфизмов групп поверхностей, Сибирский математический журнал, **30**, 6 (1989), 150–171.

[21] В. Н. Ремесленников, А. В. Трейер, Структура группы автоморфизмов для частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп, Алгебра и логика, **49**, 1 (2010), 60–97.

[22] В. А. Романьков, О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп, Алгебра и логика, **21**, 1 (1982), 60–72.

[23] В. А. Романьков, Коммутативная ширина некоторых относительно свободных алгебр Ли и нильпотентных групп, Сиб. мат. ж., **57**, 4 (2016), 866–888.

[24] А. А. Суслин, Проективные модули над кольцами многочленов свободны, Докл. АН СССР, **229** (1976), 1063–1066.

[25] Е. И. Тимошенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, **49**, 2 (2010), 263–290.

[26] Е. И. Тимошенко, Мальцевская база частично коммутативной нильпотентной группы, Алгебра и логика, **50**, 5 (2011), 647–658.

[27] Е. И. Тимошенко, Об одной гипотезе Ремесленникова для частично коммутативных групп, Algebra and Model Theory 8: coll of papers, Novosibirsk: NSTU publ., 2011, 107–115.

[28] Е. И. Тимошенко, Коммутаторная ширина элементов сплетения свободных абелевых групп, Сибирский математический журнал, **54**, 5 (2013), 1155–1161.

[29] Е. И. Тимошенко, Примитивные и сохраняющие меру системы элементов на многообразиях метабелевых и метабелевых проконечных групп, Сиб. мат. журнал, **54**, 1 (2013), 199–207.

[30] Е. И. Тимошенко, Системы элементов, сохраняющие меру на многообразиях групп, Математический сборник, **204**, 12 (2013), 119–126.

[31] Е. И. Тимошенко, Централизаторные размерности и универсальные теории частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, **56**, 2 (2017), 226–255.

[32] У. У. Умирбаев, Частные производные и эндоморфизмы некоторых относительно свободных алгебр Ли, Сиб. мат. журнал, **34**, 6 (1993), 179–188.

[33] С. Л. Шестаков, Уравнение $[x, y] = g$ в частично коммутативных группах, Сибирский математический журнал, **46**, 2 (2005), 466–477.

[34] С. Л. Шестаков, Уравнение $x^2y^2 = g$ в частично коммутативных группах, Сибирский математический журнал, **47**, 2 (2006), 463–472.

[35] А. И. Ширшов, Подалгебры свободных лиевых алгебр, Мат. Сб., **33(75)**, 2 (1953), 441–452.

[36] А. И. Ширшов, О свободных кольцах Ли, Мат. сб., **45(87)** (1958), 113–122.

[37] А. И. Ширшов, Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли, Сиб. мат. журнал, **3** (1962), 292–296.

[38] А. И. Ширшов, Об одной гипотезе теории алгебр Ли, Сибирский математический журнал, **3** (1962), 297–301.

[39] А. Л. Шмелькин, Свободные полинильпотентные группы, Изв. АН СССР, **28** (1964), 91–122.

[40] C. Ahn, K. Shigemoto, Onsager algebra and integrable lattice models, Modern Phys. Lett. **38**, 6 (1991), 3509–3515.

[41] M. Akhaval-Malayeri, Commutator length of solvable groups satisfying max-N, Bull. Korean Math. Soc., **43** (2006), 805–812.

[42] M. Akhavan-Malayeri, A. Rhemtulla, Commutator length of abelian-by-nilpotent groups, Glasgow Math. J., **40** (1998), 117–121.

[43] G. Albertini, B. McCoy, J. Perk, Eigenvalue spectrum of the superintegrable chiral Potts model, in *Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics*, Adv. Stud. Pure Math., Academic Press, Boston, MA, **19** (1989), 1–55.

[44] H. Au-Yang, J. H. H. Perk, Onsager's star triangle equation: master key to integrability, in *Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics*, Adv. Stud. Pure Math., Academic Press, Boston, MA, **19** (1989), 57–94.

[45] V. A. Artamonov, The categories of free metabelian groups and Lie algebras, Commentationes mathematicae universitatis Carolinae, **18**, 1 (1977), 142–159.

[46] A. Baudisch, Subgroups of semifree groups, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **38** (1981), no. 1–4, 49–28

[47] G. Baumslag, Lecture Notes on Nilpotent Groups, Amer. Math. Soc. Regional Conference, Series 2 (1971).

[48] V. V. Bazhanov, Y. G. Stroganov, Chiral Potts model as a descendant of the six-vertex model, J. Stand. Phys, **59** (1990), 799–817.

[49] L. A. Bokut, Y. Chen, Gröbner-–Shirshov bases and their calculation, Bulletin of Mathematical Sciences, **4**, 3 (2014), 325–395.

[50] P. Cartier, D. Foata, "Problèmes combinatoires de commutatation et de réarrangements, Lecture Notes in Mathematics, **85**, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1969.

[51] M. Casals-Ruiz, I. Kazachkov, V. Remeslennikov, "Elementary equivalence of right-angled Coxeter groups and graph products of finite abelian groups", Bull. Lond. Math. Soc., **42**, 1 (2010), 130–136.

[52] Y. Chen, Y. Chen, Gröbner–Shirshov bases for metabelian Lie algebras, J. Algebra, **358** (2012), 143–161.

[53] K. T. Chen, R. H. Fox, R. C. Lyndon, Free differential calculus IV. The quotient groups of the lower power series, Ann. of Math., **68**, 1 (1958), 81–95.

[54] M. Culler, Using surfaces to solve equations in free groups, Topology, **20**, 2 (1981), 133–145.

[55] E. Date, S. S. Roan, The structure of quotients of the Onsager algebra by closed ideals, J. Phys. A: Math. Gen, **33**, 16 (2000), 3275–3296.

[56] B. Davies, Onsager's algebra and superintegrability, J. Phys. A: Math. Gen, **23** (1990), 2245–2261.

[57] B. Davies, Onsager's algebra and the Dolan–Grady condition in the non-self-dual case, J. Math. Phys., **32** (1991), 2945–2950.

[58] L. Dolan, M. Grady, Conserved charges from self-duality, Phys. Rev. D, **25**, 6 (1982), 1597–1604.

[59] C. Droms, Isomorphisms of graph groups, Proc. Amer. Math. Soc, **100**, 3 (1987), 407–408.

[60] G. Duchamp, D. Krob, The lower central ceries of the free partially commutative group, Semigroup Forum, **45**, 1992, 385–394.

[61] G. Duchamp, D. Krob, The Free Partially Commutative Lie Algebra: Bases and Ranks, Advances in Mathematics, **92** (1992), 95–126.

[62] G. Duchamp, D. Krob, Free Partially Commutative Structures, J. Algebra, **156** (1993), 318–361.

[63] A. J. Duncan, I. V. Kazachkov, V. N. Remeslennikov, Centraliser dimension of partially commutative groups, Geometriae Dedicata, **120**, 1 (2006), 73–97.

[64] A. J. Duncan, I. V. Kazachkov, V. N. Remeslennikov, Parabolic and quasiparabolic subgroups of free partially commutative groups, J. Algebra, **318**, 2 (2007), 918–932.

[65] A. J. Duncan, I. V. Kazachkov, V. N. Remeslennikov, Automorphisms of partially commutative groups I: Linear subgroups, Groups Geom. Dyn., **4** (2010), 739–757.

[66] G. von Gehlen, Onsager's algebra and partially orthonormal polynomials. Lattice statistics and mathematical physics, 2001 (Tianjin), Internat. J. Modern Phys. B, **16**, 14n15 (2002), 2129–2136.

[67] G. von Gehlen, S.-S. Roan, The superintegrable chiral Potts quantum chain and generalized Chebyshev polynomials. Integrable structures of exactly solvable two-dimensional models of quantum field theory, (Kiev, 2000), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, **35** (2001), 155–172.

[68] R. Z. Goldstein, E. C. Turner, Applications of topological graph theory to group theory, Math. Zeit., **165**, 1 (1979), 1–10.

[69] M. Hall, A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups, Proc. Amer. Math. Soc., **1** (1950), 575–581.

[70] B. Hartwig, P. Terwilliger, The Tetrahedron Algebra, the Onsager Algebra, and the $\mathfrak{sl}_2$ Loop Algebra, J. Algebra, **308**, 2 (2007), 840–863. (Reviewer: Erik Koelink)

[71] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, Elementary theory of free non-abelian groups, J. Algebra, **302**, 2 (2006), 451–552.

[72] K. H. Kim, F. W. Roush, Homology of certain algebrais defined by graphs, J. Pure Appl. Algebra **17** (1980), 179–186.

[73] K. H. Kim, L. Makar-Limanov, J. Neggers, F. W. Roush, Graph algebras, J. Algebra, **64** (1980), 46–51.

[74] M. R. Laurence, A generating set for the automorphism group of a graph group, J. London Math.Soc, **52**, 2 (1995), 318–334.

[75] C. Laserre, F. Oger, Direct products and elementary equivalence of polycyclic-by-finite groups, J. Algebra, **418** (2014), 213–226.

[76] R. C. Lyndon, On Burnsides problem, Trans. Am. math. Soc., **77** (1954), 202–215.

[77] A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, Elementary equivalence of groups with integral length function, Illinois J. Math., **30**, 2 (1986), 335–354.

[78] A. G. Myasnikov, M. Sohrabi, Groups elementarily equivalent to a free nilpotent group of finite rank, Ann. of Pure and Appl. Logic, **162**, 11 (2011), 916–933.

[79] F. Oger, Cancellation and elementary equivalence of groups, J. Pure Appl. Algebra **30**, 3 (1983), 293–299.

[80] F. Oger, Elementary equivalence and profinite completions: a characterization of finitely generated abelian-by-finite groups, Proc. Amer. Math. Soc. **103**, 4 (1988), 1041–1048.

[81] F. Oger, Cancellation and elementary equivalence of finitely generated finite-by-nilpotent Groups, J. London. Math. Soc., **s2-44**, 1 (1991), 173–183.

[82] L. Onsager, Crystal Statistics I, a Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition, Phys. Rev., **65**, 3–4 (1944), 117–149.

[83] J. H. H. Perk, Star-Triangle Relations, Quantum Lax Pairs, And Higher Genus Curves, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Amer Math. Soc., Providence, RI, **49** (1990), 341–354.

[84] E. N. Poroshenko, Gröbner–Shirsov bases for the Kac–Moody Algebras of the type $A_n^{(1)}$,Communications in Algebra, **30**, 6 (2002), 2617–2637.

[85] D. Puder, Primitive words, free factors and measure preservation, Israel J. Math. **201**, 1 (2014), 25–73.

[86] D. Puder, O. Parzanchevski, Measure preserving words are primitive, Measure preserving words are primitive, J. Amer. Math. Soc., **28** (2015), 63–97.

[87] A. H. Rhemtulla, A problem of bounded expressibility in free products, Proc. Camb. Phil. Soc, **64**, 3 (1968), 573–584.

[88] A. H. Rhemtulla, Commutators of certain finitely generated soluble groups, Canad. J. Math., **21** (1969), 1160–1164.

[89] V. Roman'kov, Equations over groups, Groups Complex. Cryptol., **4**, 2 (2012), 191–239.

[90] Z. Sela, Diophantine geometry over groups. VI. The elementary theory of a free group, Geom. Funct. Anal., **16**, 3 (2006), 707–730.

[91] H. Servatius, Automorphisms of graph groups, J. Algebra, **126**, 1 (1989), 34–60.

[92] W. Szmielew, Elementary properties of Abelian groups. Fund, math., **41**, 2 (1955), 203–271.

[93] D. B. Uglov, I. T. Ivanov, $sl(N)$ Onsager's algebra and integrability, J. Statist. Phys., **82**, 1 (1996), 87–113.

Работы автора по теме диссертации

[94] Е. Н. Порошенко, О базисах частично коммутативных алгебр Ли, Алгебра и логика, **50**, 5 (2011), 595–614.

[95] Е. Н. Порошенко, Централизаторы в частично коммутативных алгебрах Ли, Алгебра и логика, **51**, 4 (2012), 524–554.

[96] E. Poroshenko, Gröbner–Shirshov Basis for the Onsager and Tetrahedron Algebras, Comm. in Algebra, **41**, 2 (2013), 435–450.

[97] E. N. Poroshenko, E. I. Timoshenko, Universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras, J. Algebra, **384** (2013), 143–168.

[98] Е. Н. Порошенко, Коммутаторная ширина элементов свободной метабелевой алгебры Ли, Алгебра и логика, **53**, 5 (2014), 587–613.

[99] E. N. Poroshenko, On universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras, Comm. in Algebra, **43**, 2 (2015), 746–762.

[100] E. N. Poroshenko, E. I. Timoshenko, Uniformly distributed elements on metabelian Lie rings, Comm. in Algebra, **44**, 4 (2016), 1531–1547.

[101] E. N. Poroshenko, Commutator Length of Elements in Metabelian Multi-Homogeneous Lie Algebras, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, **41**, 6 (2017), 887–897.

[102] Е. Н. Порошенко, Об универсальной эквивалентности частично коммутативных алгебр Ли, Алгебра и логика, **56**, 2 (2017), 202–225.

[103] Е. Н. Порошенко, Об универсальной эквивалентности некоторых счетно порожденных частично коммутативных структур, Сиб. мат. ж., **58**, 2 (2017), 386–398.

[104] Е. Н. Порошенко, Об элементарной эквивалентности частично коммутативных колец и алгебр Ли, Алгебра и логика, **56**, 4 (2017), 522–528.

[105] Е. Н. Порошенко, Базис Гребнера — Ширшова алгебры Онсагера, Algebra and Model Theory 7, Новосибирск, 2009, 104–106.

[106] E. N. Poroshenko, Bases for Partially Commutative Nilpotent Lie Algebras Algebra and Model Theory 8, Новосибирск, 2011, 71–74.

[107] E. N. Poroshenko, E. I. Timoshenko, Universal Equivalence of Partially Commutative Metabelian Lie Algebras, Международная конференция по теории колец, посвященная 90-летию со дня рождения А. И. Ширшова, тезисы докладов, Новосибирск, 2011, 41–42.

[108] Е. Н. Порошенко, Централизаторы в частично коммутативных алгебрах Ли, Международная конференция “Мальцевские чтения”, Новосибирск, Россия, тезисы докладов (в электронном виде), 2012, 116.

[109] Е. Н. Порошенко, Об универсальной эквивалентности частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, Algebra and Model Theory 9, Новосибирск, 2013, 40–44.

[110] Е. Н. Порошенко, Е. И. Тимошенко, Сохраняющие меру элементы на многообразиях метабелевых колец Ли, Четвертая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", тезисы докладов, Москва: Изд-во Мос. ун-та, 2014, 45–47.

[111] Е. Н. Порошенко, Об универсальной эквивалентности частично коммутативных метабелевых алгебр Ли, Международная научная конференция "Алгебра и математическая логика: теория и приложения", тезисы докладов, Казань, 2014, 122–123.

[112] Е. Н. Порошенко, Коммутаторная ширина элементов свободной метабелевой алгебры Ли, Международная конференция "Мальцевские чтения", Новосибирск, Россия, тезисы докладов (в электронном виде), 2014, 117.

[113] Е. Н. Порошенко, Коммутаторная ширина элементов однородных метабелевых алгебр Ли, Международная конференция "Мальцевские чтения", Новосибирск, Россия, тезисы докладов (в электронном виде), 2015, 168.

[114] Е. Н. Порошенко, Универсальная эквивалентность в некоторых классах частично коммутативных алгебр Ли, Algebra and Model Theory 10, Новосибирск, 2015, 160–162.

[115] Е. Н. Порошенко, Об универсальной эквивалентности некоторых счетно порожденных частично коммутативных структур, Международная конференция "Алгебра и логика: теория и приложения", посвященная 70-летию В. М. Левчука, тез. докл., Красноярск, Сиб. федер. ун-т, 2016, 62–63.

[116] Е. Н. Порошенко, Об элементарной эквивалентности в частично коммутативных кольцах и алгебрах Ли, Международная конференция "Мальцевские чтения", Новосибирск, Россия, тезисы докладов (в электронном виде), 2016, 156.

Порошенко Евгений Николаевич

СТРОЕНИЕ И ТЕОРИИ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ И БЛИЗКИХ К НИМ АЛГЕБР ЛИ

Автореферат диссертации на соискание
ученой степени доктора физико-математических наук

Подписано в печать дд.мм.2018	Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная	Усл. печ. л. 1,8.
Заказ № хххх.	Тираж ххх экз.

Отпечатано в типографии ...