На правах рукописи

Паненко Роман Анатольевич

Пространства Орлича на группах, многообразиях и графах

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2018

Работа выполнена в ФГБУН Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН)

Научный руководитель:
Копылов Ярослав Анатольевич, кандидат физико-математических наук.

Официальные оппоненты:
Файзиев Валерий Авганович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Тверская государственная сельскохозяйственная академия», кафедра физико-математических дисциплин и информационных технологий, профессор;

Федченко Дмитрий Петрович, кандидат физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет», кафедра высшей и прикладной математики, доцент.

Ведущая организация:
ФГАОУ ВО «Волгоградский государственный университет».

Защита состоится 18 октября 2018 г. в 14 часов 20 минут на заседании диссертационного совета Д 003.015.03, созданного на базе ФГБУН Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, расположенного по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, http://math.nsc.ru/.

Автореферат разослан «   »____________2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к. ф.–м. н. Егоров Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Предметом исследования данной работы являются N-функции и пространства Орлича в приложении к объектам различной природы: как дискретным, так и некоторым вопросам, связанным с многообразиями.

В последние десятилетия достаточное распространение получили аналитические методы изучения дискретных структур, в значительной степени в связи с прорывными работами Михаила Громова и других авторов по геометрической теории групп. В частности, одним из примеров подобной деятельности может служить применение гармонического анализа для изучения аменабельности и свойства (T) Каждана[1]. Также вопросы роста дискретных групп «на бесконечности» и наличие неподвижных точек при непрерывном изометрическом аффинном действии группы на банаховом пространстве тесно связаны в контексте гармонического анализа с одномерными когомологиями группы с коэффициентами в соответствующем банаховом модуле[2].

Таким образом, гармонический (в нашем случае Ф-гармонический) анализ на дискретных структурах, помимо своей собственной проблематики, представляет интерес в силу близкого родства между данными структурами и традиционно геометрическими объектами и методами.

В частности, дискретный аналог оператора Лапласа–де Рама связан с комбинаторной структурой симплициального комплекса, соответствующего графу Кэли группы. В том смысле, что первые групповые когомологии в действительности могут рассматриваться как элементы из

[1] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette, *Kazhdan's Property (T)*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.

[2] M. Puls, *The first L^p-cohomology of some finitely generated groups and p-harmonic functions*, J. Funct. Anal. **237** (2006), no. 2, 391–401.

пространства сопряженного симплициальному комплексу графа Кэли.

В связи с анализом на многообразиях также имеются важные приложения. Де Рамом была предложена операция, позволяющая сглаживать дифференциальные формы и элементы сопряженного формам пространства — потоки. Оказывается, что данная процедура имеет вполне прозрачный категорный смысл: операторы регуляризации задают морфизмы комплексов де Рама и удовлетворяют формуле гомотопии. На практике это дает нам возможность ограничиться подсчетом когомологий подкомплекса гладких форм.

Цель работы — развитие методов дискретного гармонического анализа в пространствах Орлича. А так же изучение операторов регуляризации де Рама для дифференциальных форм в пространстве Орлича.

Основные результаты:

1. Распространяя утверждения, ранее установленные для лебеговых пространств, на пространства Орлича, получено описание первых ℓ^{Φ}-когомологий групп с помощью пространства Φ-гармонических функций. Доказана теорема о разложении функции с конечной Φ-энергией Дирихле и ряд утверждений о занулении первых ℓ^{Φ}-когомологий.

2. Введено понятие Φ-лапласиана и Φ-гармонических функций для бесконечных графов ограниченной степени и получены дискретные аналоги классических утверждений гармонического анализа, в частности: неравенство Гарнака, теорема единственности, теорема Гарнака о пределе монотонной последовательности гармонических функций и другие.

3. Установлена справедливость теоремы о свойствах операторов регуляризации де Рама для случая пространств Орлича дифферен-

циальных форм. В частности, показано, что операция регуляризации позволяет установить изоморфизм когомологий L^{Φ}-комплекса де Рама и когомологий его подкомплекса гладких форм.

Научная новизна. В диссертации получены результаты, распространяющие теорию, построенную для лебеговых пространств, на случай пространств Орлича.

В главе посвященной вопросам Ф-гармонического анализа и представлению первых групповых когомологий с помощью пространства функций с конечной Ф-энергией Дирихле развиваютсят идеи предложенные в работах М. Пулса[1], а также Ф. Мартена и А. Валлета[2].

Теорема о свойствах операторов регуляризации распространяет результаты В. М. Гольдштейна, В. И. Кузьминова и И. А. Шведова, опубликованные в 1984 году[3].

Так же вводится понятие Ф-лапласиана для бесконечных графов и устанавливаются основные свойства Ф-гармонических функций. Для случая p-гармонических функций аналогичные результаты содержатся в работе Холопайнена и Соарди[4].

Теоретическая и практическая ценность. В диссертационной работе развиваются методы дискретного гармонического анализа в пространствах Орлича, что является логичным обобщением теории гармонического и p-гармонического анализа. Описание первых когомоло-

---

[1] M. Puls, *The first L^p-cohomology of some finitely generated groups and p-harmonic functions*, J. Funct. Anal. **237** (2006), no. 2, 391–401.

[2] F. Martin and A. Valette, *On the first L^p-cohomology of discrete groups*, Groups Geom. Dyn. **1** (2007), no. 1, 81–100.

[3] V. M. Gol′dshtein, V. I. Kuz′minov, and I. A. Shvedov, *A property of de Rham regularization operators*, Sibirsk. Mat. Zh. **25** (1984), no. 2, 104–111;

[4] I. Holopainen and P. M. Soardi, *p-harmonic functions on graphs and manifolds*, Manuscripta mathematica 94.1 (1997), 95–110.

гий групп с помощью гармонических функций развивает идеи теории Ходжа и позволяет с большой наглядностью проиллюстрировать связь первых групповых когомологий с комбинаторно-геометрическими свойствами графа Кэли, соответствующего группе.

Теорема о свойствах операторов регуляризации показывает, что данные операторы задают гомотопию L^{Φ}-комплекса де Рама и его подкомплекса, состоящего из гладких форм, что позволяет установить изоморфизм L^{Φ}-когомологий и L^{Φ}-когомологий, взятых по гладким формам.

Личный вклад соискателя. Результаты работ [1,3], включенные в диссертацию, получены автором единолично. Результаты статьи [2], касающиеся свойств операторов регуляризации де Рама, получены в неделимом соавторстве с научным руководителем Копыловым Я.А.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены автором в ходе выступления на нескольких локальных и международных научных конференциях. В частности:

– Мальцевские чтения (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2013 г.), *Φ-Harmonic Functions on Discrete Groups and First ℓ^{Φ}-Cohomology.*

– Knots, braids and automorphism groups (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2014 г.), *Orlicz Spaces and First Cohomology of Discrete Groups.*

– Дни геометрии в Новосибирске (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2015 г.), *Операторы регуляризации де Рама в пространствах Орлича дифференциальных форм на римановых многообразиях.*

– Graphs and Groups, Spectra and Symmetries (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2016 г.), *Φ-Harmonic Functions on Graphs.*

Также данные результаты докладывались на научных семинарах ИМ СО РАН: семинар отдела анализа и геометрии под руководством акад.

Ю.Г. Решетняка; семинар лаборатории теории функций под руководством чл.-корр. РАН А.Ю.Веснина, д.ф.-м.н. проф. А.Д.Медных и д.ф.-м.н, проф. В.В.Асеева; семинар лаборатории прикладного анализа под руководством чл.-корр. РАН А.Ю.Веснина.

Публикации. По теме диссертации соискателем опубликовано 3 статьи в научных журналах, соответствующих требованиям ВАК для публикации научных результатов кандидатских диссертаций.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из четырех глав, а также введения и заключения. Таким образом, диссертация включает в себя главу, содержащую предварительные понятия теории пространств Орлича, и три главы, посвященные изучению групп, графов и дифференциальных форм на многообразии. Так же работа снабжена списком литературы.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность работы, приведено краткое содержание работы, сформулированы основные результаты.

В **первой** главе мы приводим все необходимые сведения из теории N-функции и пространств Орлича.

Во **второй** главе мы обращаемся к гармоническому анализу на группах в его связи с первыми групповыми когомологиями. Подобного рода идеи хорошо известны из анализа на многообразиях, в теории Ходжа. При определении комплекса де Рама на римановом многообразии возникают пары сопряженных операторов: дифференциал d^k и кодифференциал δ_{k+1}.

Таким образом, определена пара операторов $\delta_{k+1}d^k$, $d^{k-1}\delta_k$ из $\mathrm{End}(\Omega^k(M))$. Далее, можем ввести оператор Лапласа:

$$\Delta^k = \delta_{k+1}d^k + d^{k-1}\delta_k.$$

Элементы ядра данного оператора, как обычно, называют гармоническими формами. Теорема Ходжа показывает, что гармонические формы однозначно представляют классы когомологий де Рама.

Нам важен тот факт, что оператор Лапласа детерминирован лишь структурой цепного комплекса и может быть определен не только в случае комплекса де Рама. Рассматривая некоторый граф как 1-мерный конечный симплициальный комплекс и построив соответствующий ему коцепной комплекс, мы естественным образом можем определить оператор Лапласа, как это делается выше. В частности для пространства функций, заданных на вершинах графа, он примет вид:

$$\Delta f(v) = \sum_{v \sim w} (f(v) - f(w)).$$

Гармонические элементы, как уже было сказано, однозначно представляют классы когомологий, при этом они могут быть выделены в когомологическом классе в соответствии с некоторым критерием минимальности. Например, как минимизирующие функционал энергии Дирихле, определяемом в непрерывном случае соотношением

$$J(f) = \int \Phi(|\nabla f|) dx,$$

или же, следуя геометрической интуиции, как элемент ортогонального дополнения $\operatorname{Im} d$, иначе как точка минимизирующая расстояние от $\operatorname{Im} d$ до соответствующего класса когомологий, что опять же согласуется с теоремой о разложении Ходжа.

Переходя к дискретным группам, мы можем естественным образом распространить на них приведенное выше определение оператора Лапласа:

$$\Delta f(g) = \sum_{s \in S} (f(s^{-1}g) - f(g)),$$

где S — порождающее множество группы.

Особенность данной ситуации состоит в том, что обычно рассматриваемые когомологии групп имеют несколько иную природу, нежели симплициальные когомологии, упомянутые выше. Исследуемые в данной работе когомологии группы G с коэффициентами в топологическом G-модуле возникают в связи с тем, каким образом группа действует на этом модуле. В частности, в качестве 0-когомологий мы берем множество G-инвариантных элементов.

В нашей работе мы рассматриваем когомологии с коэффициентами в пространстве Орлича вещественнозначных функций, определенных на элементах группы. Нам требуется некоторым образом модифицировать определение лапласиана так, чтобы согласовать его с вводимой топологией пространств Орлича:

$$(\Delta_\Phi f)(x) := \sum_{s \in S} \Phi'(f(s^{-1}x) - f(x)).$$

Следующая теорема показывает, что первые когомологии в действительности могут рассматриваться как элементы из пространства сопряженного симплициальному комплексу графа Кэли:

Теорема 1. *Предположим, что конечно порожденная группа G действует свободно на счетном множестве X. Тогда*

1. $H^1(G, \ell^\Phi(X)) \cong \mathscr{D}^\Phi(X)/\ell^\Phi_G(X)$;
2. $\overline{H}^1(G, \ell^\Phi(X)) \cong \mathscr{D}^\Phi(X)/\overline{\ell^\Phi_G(X)}$.

Это дает нам возможность действовать по аналогии со случаем симплициальных когомологий. В частности может быть установлен некоторый аналог разложения Ходжа:

Теорема 2. *Предположим, что* Φ — *непрерывно дифференцируемая строго выпуклая* N*-функция, лежащая в* $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$*. Пусть* G — *конечно порожденная группа, действующая на счетном множестве* X*. Тогда для любой функции* $f \in D^{\Phi}(X)$ *существует разложение* $f = u + h$*, где* $u \in (\overline{\ell^{\Phi}(X)})_{D^{\Phi}(X)}$ *и* $h \in HD^{\Phi}(X)$*. Такое разложение единственно с точностью до элемента из* $D^{\Phi}(X)^G$*.*

И как следствие получаем, что гармонические функции также уникальным образом представляют когомологические классы:

Следствие 3. *Если действие группы* G *на* X *свободно, то пространство* $\overline{H}^1(G, \ell^{\Phi}(X))$ *может быть естественным образом отождествлено с пространством* $HD^{\Phi}(X)/D^{\Phi}(X)^G$*.*

Также в работе доказано следующее утверждение

Теорема 4. *Пусть* Φ — N*-функция из* $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$*, и пусть* Γ*,* G — *бесконечные конечно порожденные группы, причем* G *неаменабельна. Если* G — *нормальная подгруппа* Γ *с бесконечным централизатором* $Z_{\Gamma}(G)$*, то* $\overline{H}^1(\Gamma, \ell^{\Phi}(\Gamma)) = 0$*.*

В **третьей** главе вводятся основные определения гармонического анализа на графах и устанавливаются их базовые свойства. Также доказываются дискретные аналоги теоремы единственности

Теорема 5. *Положим,* f *и* g — Φ*-гармонические функции на конечном множестве* S *такие, что* $f|_{\partial S} = g|_{\partial S}$*. Тогда* $f = g$ *на* S*;*

неравенство Гарнака

Теорема 6. *Пусть* Φ *и* Ψ *— пара двойственных* N*—функций, и* $h\colon U\cup\partial U\to\mathbb{R}^{\geq 0}$ *—* Φ*-супергармоническая на* U *функция. Тогда для каждого* $x\in U$ *имеет место оценка*

$$\max_{y\sim x} h(y)\leq[\Psi'(\Phi'(1)\deg(x))+1]h(x);$$

и теоремы Гарнака о пределе монотонной последовательности гармонических функций

Теорема 7. *Пусть* $\{S_i\}$ *— возрастающая последовательность конечных связных подмножеств* V*, и пусть* $U=\bigcup_i S_i$*. Пусть* $\{h_i\}$ *— возрастающая последовательность функций на* $U\cup\partial U$*. Тогда, если* h_i *—* Φ*-гармоническая (или* Φ*-супергармоническая) на каждом* S_i*, то или* $h_i(x)\to\infty$ *для всех* $x\in U$*, или* $h_i(x)\to h(x)$ *для всех* $x\in U$ *и* h*—* Φ*-гармоническая (соответственно* Φ*-супергармоническая) на* U*.*

В том случае, когда рассматриваемый граф является графом Кэли некоторой группы, введенные здесь определения очевидным образом согласуются с конструкциями гармонического анализа на группах.

Как уже было сказано выше, одним из подходов к определению гармонических функций является использования свойства минимальности таких объектов в некотором классе. Таким образом, под гармоническими функциями мы понимаем функции, минимизирующие следующее обобщение функционала энергии Дирихле:

$$\rho(f)=\sum_{x\in S}\sum_{y\sim x}\Phi(f(y)-f(x)).$$

Связь данного определения с введенным выше комбинаторным определением лапласиана

$$\Delta_\Phi f(x) = \sum_{x \sim y} \Phi'(f(y) - f(x))$$

выявляется в теореме

Теорема 8. *Пусть $S \subset V$ — конечное множество. Равенство $\Delta_\Phi f = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда f минимизирует $\rho(g)$ на множестве $M_f = \{g \colon S \cup \partial S \to \mathbb{R} \mid g|_{\partial S} = f|_{\partial S}\}$.*

В **четвертой** главе мы изучаем регуляризацию потоков на многообразии.

Понятие потока было введено де Рамом в его классической монографии[1], где он также определяет пару операторов R_ε и A_ε, зависящих от последовательности положительных параметров $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$ и обладающих следующими свойствами:

Теорема *(1) Если T — k-поток на M, то $R_\varepsilon T$ — k-поток, а $A_\varepsilon T$ — $(k-1)$-поток и выполняется соотношение*

$$R_\varepsilon T - T = dA_\varepsilon T + A_\varepsilon dT.$$

(2) Носители потоков $R_\varepsilon T$ and $A_\varepsilon T$ лежат в сколь угодно малой окрестности носителя $\operatorname{supp} T$ при достаточно малом значении параметров ε_i.

(3)$R_\varepsilon T \in C^\infty$, и если $T \in C^\infty$, то $A_\varepsilon T \in C^\infty$.

(4) Если все ε_i стремятся к нулю, то $R_\varepsilon T \to T$, а $A_\varepsilon T \to 0$ в $D'(M)$.

[1] де Рам Ж. *Дифференцируемые многообразия,* М.: Издательство иностранной литературы, 1956

(5) Если T обладает компактным носителем, лежащим в M, то $R_\varepsilon T \to T$ в пространстве форм с компактным носителем на M.

В анализе хорошо известна процедура сглаживания функций. Подбирая правильно определенную весовую функцию и усредняя с этими весами значения заданной функции в окрестности некоторой точки, мы можем добиться гладкости C^∞ в данной точке. В частности, таким образом можно сгладить любую локально суммируемую функцию f, выполнив её свертку с некоторой функцией $\varphi \in C^\infty$, обладающей компактным носителем:

$$\hat{f}(x) = \int \varphi(x-y) f(y) dy.$$

Де Рам использует данную идею для сглаживания дифференциальных форм и элементов сопряженного формам пространства — потоков. Вводимый им оператор

$$R^* \colon \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^k(\mathbb{R}^n)$$

сглаживает форму ω, выполняя свертку коэффициентов данной формы с некоторой четной функцией $f \in C^\infty$, обладающей компактным носителем.

Естественным образом данный оператор индуцирует оператор регуляризации R на потоках T:

$$RT(\omega) = T(R^*\omega).$$

Данную операцию можно перенести на многообразия, локально определяя операторы регуляризации.

Вслед за де Рамом В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов и И. А. Шведов [1] рассматривали операторы де Рама R и A на пространствах дифференциальных форм $L^p(M, \Lambda^k)$, интегрируемых по модулю в степени p на римановом многообразии M. В нашей работе мы распространяем данные идеи на пространства Орлича:

Теорема 9. *Пусть M — риманово многообразие. Существует последовательность операторов $R_{(i)}$, $A_{(i)}$ на пространстве потоков $\mathcal{D}'(M)$ таких, что*

(1) Оператор $R_{(i)}$ отображает $L^\Phi(M, \Lambda^k)$ в $L^\Phi(M, \Lambda^k)$ таким образом, что
$$\|R_{(i)}\|_\Phi \leq 1 + \frac{1}{i};$$

(2) Оператор $A_{(i)}$ отображает $L^\Phi(M, \Lambda^k)$ в $L^\Phi(M, \Lambda^{k-1})$ таким образом, что
$$\|A_{(i)}\|_\Phi \leq \frac{1}{i};$$

(3) $R_{(i)}\omega$ — гладкая форма; если ω — гладкая форма, то $A_{(i)}\omega$ — гладкая;

(4) Если Φ — Δ_2-регулярная функция, то $R_{(i)}\omega \to \omega$ при $i \to \infty$ для всех $\omega \in L^\Phi(M, \Lambda^k)$;

Оператор A, о котором мы пока ничего не говорили, задает цепную гомотопию комплекса $\{\Omega^*_\Phi(M), d\}$ и его подкомплекса, состоящего из

[1] V. M. Gol′dshtein, V. I. Kuz′minov, and I. A. Shvedov, *A property of de Rham regularization operators*, Sibirsk. Mat. Zh. **25** (1984), no. 2, 104–111

гладких форм $\{\Omega^*_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M), d\}$:

$$
\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \Omega^{k-1}_{\Phi}(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "R_{(i)}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}"] & \Omega^{k}_{\Phi}(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "R_{(i)}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "A_{(i)}"'] & \Omega^{k+1}_{\Phi}(M) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "R_{(i)}"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "A_{(i)}"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \Omega^{k-1}_{\Phi}(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k}_{\Phi}(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}_{\Phi}(M) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

таким образом, что выполняется соотношение гомотопии:

$$R_{(i)} - \mathrm{id} = A_{(i)}d + dA_{(i)}.$$

Как следствие, построенные операторы имеют вполне прозрачный категорный смысл, что суммируется в данной теореме:

Теорема 10. *Если Φ — это Δ_2-регулярная N-функция, то операторы R определяют морфизм комплексов из $\{\Omega^*_{\Phi}(M), d\}$ в $\{\Omega^*_{\Phi,\,smooth}(M), d\}$, а также имеет место изоморфизм $H^k_{\Phi,\,\mathrm{smooth}}(M) \cong H^k_{\Phi}(M)$.*

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Я. А. Копылову, который познакомил его с тем кругом проблем, что составляют содержание данной работы, и благодарен за все усилия и время, вложенные в нашу совместную работу, а также всегда теплое и внимательное отношение.

Также автору хотелось бы поблагодарить профессора А. Д. Медных за внимание к данной работе и ценные замечания, способствовавшие улучшению текста.

Публикации автора по теме диссертации

1. Копылов Я.А., Паненко Р.А., Ф-*гармонические функции на дискретных группах и первые* ℓ^{Φ}-*когомологии* // Сибирский математический журнал. —2014. Том 55, № 5. —С. 1104–1117.

2. Паненко Р.А., Ф-*гармонические функции на графах* // Сибирские электронные математические известия. —2017. Том 14. —С. 1–9.

3. Kopylov Ya. A., Panenko R. A., *De Rham regularization operators in Orlicz spaces of differential forms on Riemannian manifolds* // Сибирские электронные математические известия. —2015. Том 12. —С. 361–371.