На правах рукописи

Меновщиков Александр Викторович

Операторы композиции в пространствах Соболева — Орлича

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Водопьянов Сергей Константинович

Официальные оппоненты:
Насыров Семён Рафаилович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», заведующий кафедрой математического анализа отделения математики института математики и механики им. Н. И. Лобачевского;

Шлапунов Александр Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», профессор кафедры теории функций института математики и фундаментальной информатики.

Ведущая организация:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный университет».

Защита состоится 18 октября 2018 г. в 15:30 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.03, созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, расположенного по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, http://math.nsc.ru/.

Автореферат разослан «   » ____________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф.-м. н. Егоров Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В данном диссертационном исследовании проводится изучение ограниченных операторов композиции в пространствах Соболева — Орлича, а также отображений, порождающих такие операторы (отображение $\varphi : D \to D'$ порождает оператор композиции φ^* по правилу $\varphi^* f = f \circ \varphi$ для любой $f : D' \to \mathbb{R}$).

Для получения описания исследуемых объектов решается несколько задач.

1) Нахождение необходимых и достаточных условий, при которых гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, где D, D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$. Заметим, что если N-функции M, M_1, определяющие пространства Соболева — Орлича, задаются равенством $M(u) = u^q$, $M_1(u) = u^p$, где $1 \leq q \leq p < \infty$, то задача сводится к случаю пространств Соболева L^1_p.

2) Описание свойств регулярности обратного отображения к гомеоморфизму класса Соболева — Орлича W^1_M (порождающего ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$) по известным свойствам регулярности прямого отображения. В качестве следствия доказывается теорема об условиях, при выполнении которых обратный гомеоморфизм порождает ограниченный оператор композиции другой пары пространств Соболева — Орлича, определяемой по первой.

3) Изучение вопроса о полунепрерывности снизу коэффициента искажения класса отображений, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича. Установление данного свойства для класса отображений играет важную роль в исследовании вариационных задач, в частности задач теории упругости. В настоящей работе оно применяется для доказательства существования решения задачи минимизации функционала энергии.

В истории изучения операторов композиции можно выделить три основных направления, которые возникли при решении прикладных задач в различных областях. Первое направление стало развиваться после публикации Е. Шредером в 1871 году одной из наиболее ранних работ по теории операторов композиции [1], в которой он изучает следующую задачу: *определить функцию f и константу α такие, что $(f \circ T)(z) = \alpha f(z)$ для всех z из соответствующей области, в которой определена функция T*. Решение этой задачи было предложено в статье [2] в 1884 году. В дальнейшем изучение операторов композиции в случае, когда порождающее его отображение является голоморфной функцией и действует между областями в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{C}^n$, стало классическим для данной теории. Первое систематическое исследование по данному направлению приведено в работе Г. Шварца 1969 года [3]. В последние годы изучение оператора композиции, порожденного голоморфным отображением, проводилось в различных функциональных пространствах (пространства H_p, пространства Бергмана и общие пространства Харди). В качестве современных работ в данном направлении можно привести статьи С. Стевича [4–6], в которых изучается ограниченность и компактность оператора, действующего из смешанного пространства в пространство типа Блоха и Бергмана, а также рассмотрен случай весового оператора композиции. Необходимость изучения оператора композиции в указанных выше пространствах возникает при решении задач теории дифференцируемых динамических систем, статистической механики и теории обобщенных функций (см., например, [7, 8]).

Следующее крупное направление связано с задачами топологической динамики, теории групп преобразований и изучением непрерывных функций. Объектом исследования в нем является оператор на топологических пространствах, порожденный непрерывным отображением. В качестве примера приведем работы [9–11].

Третьим направлением в изучении операторов композиции является рассмотрение операторов, действующих на пространствах с мерой и порожденных измеримым отображением. Вопросы о свойствах таких операторов возникают в теории энтропии, эргодической теории и классической механике (см. [12, 13]). В первую очередь такие операторы рассматривались на пространствах L_p (одно из наиболее ранних систематических изложений исследований в этом направлении — работы Нордгрена и Риджа [14, 15]). Естественным развитием данной тематики является варьирование исходных функциональных пространств.

Особый интерес при обзоре темы диссертационного исследования представляют работы С.К. Водопьянова и А.Д. Ухлова [16–21], которые также можно отнести к третьему направлению. В них были получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие ограниченность оператора композиции $\varphi^* : L^1_p \to L^1_q$ пространств Соболева, действующих по правилу $\varphi^* f = f \circ \varphi$.

Отображения, порождающие такие операторы, называются отображениями с ограниченным (p,q)-искажением, а при $p = q = n$ этот класс совпадает с классом квазиконформных отображений (см. [18]). История установления такой связи между теорией операторов композиции на пространствах Соболева и квазиконформным анализом берет начало в работах, направленных на решение задачи, сформулированной Ю.Г. Решетняком в 1968 году: требовалось описать все изоморфизмы φ^* однородных пространств Соболева L^1_n, порожденных квазиконформными отображениями φ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

Естественным продолжением приведенных исследований является изучение свойств отображений, порождающих операторы композиции в других функциональных пространствах «соболевского типа». В данной диссертации проводится изучение таких операторов в пространствах Соболева — Орлича.

Пространства Орлича обобщают L_p пространства и более тонко учитывают характер функций, их составляющих.

Одним из фундаментальных результатов в теории L_p-пространств является доказанная в 1910 году Ф. Риссом (см. [22]) теорема о том, что $(L_p)^* = L_{p'}$, где p' — двойственный к p индекс, то есть $1/p+1/p' = 1$. Для доказательства этого факта используется неравенство $uv \leq u^p/p + v^{p'}/p'$, $u,v \geq 0$. В 1912 г. в работе [23] это неравенство было обобщено У. Юнгом на случай выпуклых функций ($uv \leq M(u) + M^*(v)$). На основании этих результатов в 1931 г. З. Бирнбаум и В. Орлич опубликовали работу [24], заложившую основу теории двойственных функций и в дальнейшем приведшую к введению пространств Орлича.

В 1932 году В. Орлич в статье [25], используя понятие двойственной функции, дает определение пространств L_M, снабжая их следующей нормой

$$\|u\| = \sup_{\substack{v \in \tilde{L}_M(D) \\ \mathcal{I}(v;M^*) \leq 1}} \left| \int_D u(x)v(x)dx \right|.$$

В изначальных предположениях Орлича функция M должна была удовлетворять Δ_2-условию (распространение на более широкий класс было получено в 1936 году в работе [26]). Впервые термин «пространство Орлича» был использован в 1949 году в работе [27] А. Заанена. В 1950 Х. Накано, а в 1955 В. Люксембург (см. [28, 29]) предложили второй метод введения нормы в пространстве L_M, основанный на использовании функционала Минковского и позволяющий проводить ее фактическое вычисление. Несмотря на то, что в работах Х. Накано такая норма была введена на 5 лет раньше, ее принято называть «нормой Люксембурга».

В качестве одних из наиболее ранних работ, в которых возникают пространства Соболева — Орлича, можно привести монографию Ю. Дубинского [30], статьи Т.К. Дональдсона и Н.С. Трюденгера [31, 32], а также работы Р. Адамса [33, 34]. Рассмотрение пространств Соболева — Орлича вместо классических соболевских пространств позволило получить более точные теоремы вложения [32] (окончательный результат получен в терминах пространств Орлича — Лоренца, см. [35]). Другой важной изначальной мотивировкой рассмотрения такого обобщения было решение задачи Дирихле для эллиптических операторных уравнений (см., например, [36]).

Изучение приведенных выше работ позволяет сделать вывод о том, какого рода улучшения и уточнения по сравнению со случаем L_p возможно получить при использовании пространств Орлича. В рамках данной диссертационной работы мы описываем необходимые и достаточные условия, при которых отображение φ порождает ограниченный оператор композиции пространств Орлича и Соболева — Орлича. Полученные результаты используются для изучения регулярности отображений, обратных к гомеоморфизмам класса Соболева — Орлича. Далее исследуется свойство замкнутости относительно локально равномерной сходимости отображений, порождающих оператор φ^*, необходимое для решения вариационных задач теории упругости. Обобщение полученных в работах [37, 38] результатов в этом направлении даст возможность изучить аналогичные проблемы теории упругости для более широкого класса отображений.

Цели и задачи. Цель диссертационной работы — изучение свойств отображений, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Установлены необходимые и достаточные условия, при которых гомеоморфизм евклидовых областей порождает ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича.
- Определены свойства регулярности отображения, обратного к гомеоморфизму класса Соболева — Орлича, по известным свойствам регулярности прямого отображения.
- Доказана полунепрерывность снизу коэффициентов искажения отображений из рассмотренных классов.
- Используя полученные результаты, доказана теорема существования задачи минимизации функционала энергии для специальных классов отображений в условиях поливыпуклости и коэрцитивности функции запасенной энергии.

Научная новизна. Все основные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами, работающими в различных областях анализа, геометрии, уравнений в частных производных и теории упругости. Результаты диссертационного исследования могут быть применены в образовательном процессе при организации спецкурсов по теории функциональных пространств и квазиконформному анализу, предназначенных для студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений

Апробация работы. Основные положения и результаты работы прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

• Международная научная конференция «Метрические структуры и управляемые системы». Новосибирск, 2015.

• Международная научная конференция «Геометрический анализ и теория управления». Новосибирск, 2016.

• Семинар по геометрическому анализу, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск. Руководитель: д. ф.-м. н., профессор С. К. Водопьянов.

• Семинар лаборатории геометрической теории управления, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск. Руководитель: д. ф.-м. н., профессор А. А. Аграчев.

Публикации. Полученные результаты опубликованы в пяти печатных изданиях [A1–A5], из которых три изданы в журналах, рекомендованных ВАК [A1–A3], и два — в тезисах докладов и материалах конференций [A4,A5]. Все сформулированные результаты являются новыми и получены автором самостоятельно. Научному руководителю С. К. Водопьянову принадлежат формулировки задач и общее руководство работой.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 124 наименования и приведен в порядке цитирования. Общий объем диссертации составляет 98 страниц.

Содержание работы

Для удобства читателя используется та же нумерация утверждений и определений, что и в тексте диссертации.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, и приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме.

В **главе 1** диссертационного исследования вводятся основные понятия и доказываются вспомогательные утверждения. В **параграфе 1.1** приводятся основные сведения из теории выпуклых функций и вводятся используемые в работе обозначения. Далее определяются пространства Орлича L_M, приводятся их свойства, используемые в диссертации, а также доказываются оценки на норму Люксембурга для специальных классов N-функций, определяющих пространство L_M. **Параграф 1.2** посвящен описанию пространств Соболева — Орлича W^1_M и L^1_M и формулировке их основных свойств. Приводится теорема вложения, аналогичная классической теореме Соболева. Кроме того, доказывается один из вариантов неравенства Пуанкаре, применяемый в дальнейшем. В **параграфе 1.3** приводится определение класса ACL и аппроксимативной дифференцируемости. Для аппроксимативно дифференцируемых функций приводится формула замены переменной. Также вводится определение, играющее важную роль во всем дальнейшем изложении:

Определение 1.10. *Отображение $\varphi : D \to D'$ имеет конечное искажение (коискажение), если $D\varphi(x) = 0$ ($\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$) почти всюду на множестве*

$$Z = \{x \in D \mid J(x, \varphi) = 0\}.$$

Условие конечности искажения означает, что частные производные отображения обращаются в ноль почти всюду на множестве нулей Якобиана $J(x,\varphi)$.

В **параграфе 1.4** дается определение и формулируются основные свойства квазиаддитивных функций множеств, определяются их верхняя и нижняя производные, а также приводятся две леммы о покрытии, связанные с определяемыми функциями. Сведения, приводимые в **параграфе 1.5**, необходимы для формулировки и доказательства утверждений главы 4 и главы 5. В нем вводится понятие кусочной (biting) сходимости и отмечаются ее некоторые важные свойства. Кроме того, для удобства читателя в **параграфе 1.5** приводится формулировка теоремы Мазура о слабой сходимости.

В **главе 2** определяются необходимые и достаточные условия, при которых гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, где D, D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, порождает ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D), \quad \varphi^* f = f \circ \varphi.$$

На первом шаге, в **параграфе 2.1**, исследуется задача об ограниченности оператора композиции в пространствах Орлича. Вводятся обозначения, используемые в дальнейшем:

$$\alpha = \ln C_M / \ln 2, \quad \beta = \ln C_{M_1} / \ln 2, \quad \gamma = \alpha\beta/(\beta - \alpha), \tag{1}$$

где C_M, C_{M_1} — константы из Δ_2-условия для функций M и M_1 соответственно.

Устанавливается справедливость следующих утверждений:

Теорема 2.4. *Пусть измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L_{M_1}(D') \to L_M(D)$ и N-функции M, M_1 удовлетворяют Δ_2-условию. Тогда*

$$J^{\frac{1}{\alpha}}(y, \varphi^{-1}) \in L_\gamma(D').$$

Достаточные условия, выраженные через объемную производную обратного отображения, могут быть получены без наложения дополнительных ограничений на N-функции.

Теорема 2.5. *Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L_{M_1}(D') \to L_M(D)$, если*

$$J(y, \varphi^{-1}) \in L_{F^*}(D'),$$

где $F^*(u)$ — функция, дополнительная к функции $F(u) = M_1(M^{-1}(u))$.

Полученные результаты сравниваются с теоремой, полученной ранее группой авторов в статье [39]. Утверждения, доказанные в **параграфе 2.1**, являются отправной точкой в решении основной задачи **главы 2** в случае пространств Соболева — Орлича. Они позволяют выявить базовые ограничения на N-функции, определяющие исследуемые пространства, связанные только с особенностями пространств Орлича.

В **параграфе 2.2** формулируются основные положения **главы 2**. Нам потребуется следующее определение:

Определение 2.1. *Для гомеоморфизма $\varphi : D \to D'$ будем рассматривать операторные функции искажения:*

$$K_M(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi|(x)}{M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|)}, & \text{если } J(x,\varphi) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$K_\alpha(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{(M(|D\varphi|(x)))^{1/\alpha}}{|J(x,\varphi)|^{1/\beta}}, & \text{если } J(x,\varphi) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В первую очередь доказывается следующая вспомогательная теорема:

Теорема 2.6. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$, функции M и M_1 удовлетворяют Δ_2-условию. Тогда*

$$\Phi(A') = \sup_{f \in \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A')} \left(C \frac{\|\varphi^* f \mid L^1_M(\varphi^{-1}(A'))\|}{\|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_{M_1}(A')\|} \right)^\gamma,$$

где C — некоторая постоянная, является ограниченной монотонной счетно аддитивной функцией, определенной на открытых множествах из области D'.

Используя приведенную теорему, устанавливаем следующий результат:

Теорема 2.7. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ и N-функции M, M_1 удовлетворяют Δ_2-условию. Тогда верны следующие утверждения:*

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$*;*

2) *отображение φ имеет конечное искажение;*

4) *конечна величина $K_{\varphi,\alpha} = \|K_\alpha(\cdot,\varphi) \mid L_\gamma(D)\|$ ($K_{\varphi,\alpha} = \|K_\alpha(\cdot,\varphi) \mid L_\infty(D)\|$ при $M = M_1$).*

Достаточные условия удается получить для N-функций несколько иного класса.

Теорема 2.8. *Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$, если функция M_1 удовлетворяет Δ'-условию и выполнены следующие требования:*

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$*;*

2) *отображение φ имеет конечное искажение;*

3) *конечна величина $K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_{M_2}(D)\|$ ($K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_\infty(D)\|$ при $M = M_1$).*

Далее, оператор φ^* теорем 2.7 и 2.8 распространяется на все пространство $L^1_{M_1}$. Для этого доказывается несколько утверждений, имеющих независимый интерес. В результате формулируется следующее предложение:

Предложение 2.1. *Пусть отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$. Тогда распространение этого оператора по непрерывности совпадает с оператором композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$.*

Параграф 2.2 завершается сравнением полученных результатов с результатами работы [40].

В **параграфе 2.3** рассмотрены случаи более строгих ограничений на N-функции, определяющие пространства Соболева — Орлича, а именно функции вида

$$\text{гл. часть } M(u) = Q(u) = Cu^{\alpha}(\ln u)^{a_1}(\ln\ln u)^{a_2}...(\ln ... \ln u)^{a_n},$$

и N-функции, удовлетворяющие Δ'-условию. Это позволяет приблизить необходимые условия к достаточным. Особый интерес представляет теорема 2.12.

Теорема 2.12. *Пусть функции M и M_1 удовлетворяют Δ'-условию и выбраны так, что функция M_2 из равенств*

$$M_1(u) = M(2M_3(u)), \quad M_2(u) = M(2M_3^*(u)) \tag{2}$$

также удовлетворяет Δ'-условию. Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$;

2) *отображение φ имеет конечное искажение;*

3) *конечна величина $K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_{M_2}\|$ ($K_{\varphi,M} = \|K_M(\cdot,\varphi) \mid L_\infty\|$ при $M = M_1$).*

Норма оператора $\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_M(D)$ эквивалентна величине $K_{\varphi,M}$, а именно $\alpha K_{\varphi,M} \le \|\varphi^*\| \le K_{\varphi,M}$, где α — положительная постоянная.

Основной задачей **главы 3** является определение условий для гомеоморфизма $\varphi \in W^1_M$, обеспечивающих регулярность обратного отображения. В **параграфе 3.1** проведен анализ направлений изучения свойств обратного отображения по известным свойствам прямого. Определены основные подходы к решению таких задач и сформулированы основные результаты по каждому направлению.

В **параграфе 3.2** формулируются основные результаты **главы 3**.

Введем следующую функцию искажения для отображения $\varphi : D \to D'$:

$$\mathcal{K}_M(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{|\operatorname{adj} D\varphi|(x)}{(M_1^{-1}(|J(x,\varphi)|))^{n-1}}, & \text{если } J(x,\varphi) \ne 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Также рассмотрим следующее условие на N-функции (оно обоспечивает некоторые свойства для пространства Соболева — Орлича, ей определяемые).

$$\int\limits_1^\infty \left(\frac{t}{M(t)}\right)^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{3}$$

Доказывается следующая теорема:

Теорема 3.5. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) $\varphi \in W^1_{M,\,\mathrm{loc}}(D)$, *где N-функция M удовлетворяет условию* (3)*;*

2) φ *имеет конечное коискажение;*

3) $\mathcal{K}_{\varphi,M} = \|\mathcal{K}_M(\cdot,\varphi) \mid L_{F_2}(D)\| < \infty$.

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

4) $\varphi^{-1} \in W^1_{F_1,\,\mathrm{loc}}(D')$*;*

5) φ^{-1} *имеет конечное искажение;*

6) $K_{\varphi^{-1},F_1} = \left\|\frac{|D\varphi^{-1}|}{F^{-1}(|J(x,\varphi^{-1})|)} \mid L_{F_2}(D')\right\| < \infty$.

Здесь N-функции F, F_2 определяются равенствами:

$$F^{-1}(u) = u(M^{-1}(1/u))^{n-1}, \quad F_2(u) = M_2(u^{\frac{1}{n-1}}),$$

а функция F_1 определяется из равенств:

$$F(u) = F_1(2F_3(u)), \quad F_2(u) = F_1(2F_3^*(u)).$$

Приводится пример, в котором в явном виде определяются функции F, F_1, F_2 по известным функциям M и M_1.

С помощью установленных результатов **параграфа 3.2** в **параграфе 3.3** доказываются теоремы об обратимости оператора композиции для разных классов N-функций. Приведем один из них.

Теорема 3.7. *Пусть функции M и M_1 удовлетворяют Δ'-условию. Пусть, кроме того, N-функция M удовлетворяет условию* (3)*. Если гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$$

и имеет конечное коискажение, то обратное отображение $\varphi^{-1} : D' \to D$ порождает ограниченный оператор композиции

$$(\varphi^{-1})^* : L^1_F(D) \to L^1_{F_1}(D')$$

и имеет конечное искажение.

На следующем этапе диссертационного исследования, в **главе 4**, рассматривается вопрос о полунепрерывности коэффициентов искажения изученных ранее отображений. Приведен краткий обзор результатов, связанных с доказательством свойства замкнутости для различных классов отображений. Данное свойство играет важную роль при решении задач теории упругости. В частности, такие результаты для различных классов отображений необходимы для доказательства существования решения задачи минимизации функционала энергии. В настоящей работе мы получаем подобные свойства для некоторого класса гомеоморфизмов, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича. В формулируемом ниже результате предполагаем, что N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, а функция $M_1(u)$ удовлетворяет Δ'-условию. Кроме того, функция $M_2(u)$, определяемая равенствами (2), также должна удовлетворять Δ_2-условию.

Теорема 4.4. *Пусть сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы последовательности $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\varphi_k : D \to D'$, удовлетворяют условиям теоремы 2.8. Пусть также $\{\varphi_k\}$ локально равномерно сходится к гомеоморфизму $\varphi_0 : D \to D'$, а $\{D\varphi_k\}$ сходится слабо к некоторой вектор-функции $u \in L^1_M(D)$ и, кроме этого,*

1) *существует ограниченная в $L_{M_2}(D)$ последовательность функций $G_k \in L_{M_2}(D)$ такая, что*

$$K_M(x,\varphi_k) \leq G_k(x)$$

для почти всех $x \in D$, если $M < M_1$;

2) *существует ограниченная последовательность $G_k > 0$ такая, что*

$$K_{\varphi_k,M}(D) \leq G_k,$$

если $M = M_1$.

Тогда существует функция $G \in L_{M_2}$ такая, что некоторая подпоследовательность функций $M_2(G_k)$ сходится в кусочном смысле к $M_2(G)$. Кроме того, предельное отображение φ_0 сохраняет ориентацию и порождает ограниченный оператор композиции $\varphi_0^* : L^1_{M_1}(D') \to L^1_M(D)$, причем

1) $K_\alpha(x,\varphi_0) \leq (M_2(G(x)))^{1/\gamma}$ *для почти всех $x \in D$, если $M < M_1$;*

2) $K_{\varphi_0,\alpha}(D) \leq \varliminf\limits_{k\to\infty} K_{\varphi_k,\alpha}(D)$, *если $M = M_1$.*

Далее приводится следствие из этой теоремы, которое будет использовано в **главе 5**.

Глава 5 посвящена доказательству теоремы существования смешанной краевой задачи для стационарной теории упругости. В **параграфе 5.1** дается математическая модель нелинейной теории упругости и описываются существующие подходы к решению поставленной задачи. Для класса гиперупругих материалов в случае когда нагрузки, приложенные к телу, являются замороженными, она сводится (см., например, [41]) к задаче минимизации функционала полной энергии

$$I(\varphi) = \int\limits_D W(x, D\varphi(x))\,dx$$

на множестве допустимых деформаций. Функция $W(x, F)$ удовлетворяет двум важным условиям: поливыпуклости и коэрцитивности (определения приведены в **параграфе 5.1**).

Опираясь на результаты [38], в **параграфе 5.2** для N-функции M_2 и постоянной $L > 0$ вводим следующие классы допустимых деформаций, совпадающих на границе с некоторым гомеоморфизмом:

$$\mathcal{H}(M_2, L) = \{\varphi : D \to D' - \text{ гомеоморфизм с конечным искажением,}$$
$$\varphi \in W_1^1(D), I(\varphi) < \infty, J(x, \varphi) \geq 0 \text{ для п.в. } x \in D, \|K_{M,n}(\cdot, \varphi) \mid L_{M_2}\| \leq L,$$
$$\varphi|_{\partial D} = \overline{\varphi}|_{\partial D} \text{ п. в. на } \partial D\},$$

$$\mathcal{H}_\alpha(\gamma, L) = \{\varphi : D \to D' - \text{ гомеоморфизм с конечным искажением,}$$
$$\varphi \in W_1^1(D), I(\varphi) < \infty, J(x, \varphi) \geq 0 \text{ для п.в. } x \in D, \|K_{\alpha,n}(\cdot, \varphi) \mid L_\gamma\| \leq L,$$
$$\varphi|_{\partial D} = \overline{\varphi}|_{\partial D} \text{ п. в. на } \partial D\}.$$

Функции искажения $K_{M,n}(x, \varphi)$ и $K_{\alpha,n}(x, \varphi)$ — частный случай функций $K_M(x, \varphi)$ и $K_\alpha(x, \varphi)$, определенных ранее, N-функция $M_1(u)$ в которых имеет вид u^n.

Используя приводимые в **параграфе 5.2** результаты для отображений с конечным искажением, мы устанавливаем справедливость следующей теоремы:

Теорема 5.3. *Пусть функция $W(x, F)$ удовлетворяет условиям поливыпуклости и коэрцитивности $W(x,F) \geq d|F|^n + g(x)$, а класс допустимых деформаций $\mathcal{H}(M_2, L)$ не пуст, $L > 0$. Тогда существует хотя бы одно отображение $\varphi_0 \in \mathcal{H}_\alpha(\gamma, L)$ (γ из равенств (1)) такое, что*

$$I(\varphi_0) = \inf I(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{H}(M_2, L).$$

В **заключении** диссертации приведены итоговые результаты и перспективы дальнейшего развития.

Список литературы

1. *Shröeder E.* Über iteratierte funcktionen // *Math. Anal.* — 1871. — Vol. 3. — Pp. 296–322.

2. *Köenigs G.* Recherches sur le integrales de Certcuns equations fontionalles // *Anneles Sci. de L'Eco Normale Superieur.* — 1884. — Vol. 1. — Pp. 3–41.

3. *Schwartz H. J.* Composition operators on H^p. — University of Toledo, 1969.

4. *Стевич С.* Произведения операторов интегрального типа и операторов композиции из пространства со смешанной нормой в пространства типа Блоха // *Сиб. матем. журн.* — 2009. — Т. 50, № 4. — С. 915–927.

5. *Стевич С.* Weighted differentiation composition operators from mixed-norm spaces to weighted-type spaces // *Appl. Math. Comput.* — 2009. — Vol. 211, no. 1. — Pp. 222–233.

6. *Стевич С., Чен Р., Чжоу З.* Взвешенные композиционные операторы, действующие из одного пространства Блоха в полидиске в другое // *Матем. сб.* — 2010. — Т. 201, № 2. — С. 131–160.

7. *Mayer D. H.* Spectral properties of certain composition operators arising in statistical mechanics // *Commun. Math. Phys.* — 1979. — Vol. 68. — Pp. 1–8.

8. *Mayer D. H.* On composition operators on Banach spaces of holomorphic functions // *J . Funct. Anal.* — 1980. — Vol. 35. — Pp. 191–206.

9. *Kamowitz H.* Compact weighted endomorphisms of $C(X)$ // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1981. — Vol. 83. — Pp. 517–521.

10. *Jamison J. E., Rajagopalan M.* Weighted composition operators on $C(X,E)$ // *J . Operator Theory.* — 1988. — Vol. 19. — Pp. 307–317.

11. *Takagi H.* Compact weighted composition operators on certain subspaces of $C(X,E)$ // *Tokyo J . Math.* — 1991. — Vol. 14. — Pp. 121–127.

12. *Halmos P. R.* Lectures on ergodic theory. — New York: Chelsea Publishing Co., 1965.

13. *Petersen K.* Ergodic theory. — New York: Cambridge University Press, 1983.

14. *Nordgren E. A.* Composition operators // *Canad. J . Math.* — 1968. — Vol. 20. — Pp. 442–449.

15. *Ridge W. C.* Composition operators. — Indiana University, 1969.

16. *Водопьянов С. К.* Формула Тейлора и функциональные пространства: Учеб. пос. — Новосибирск: НГУ, 1988. — 96 с.

17. *Ухлов А. Д.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // *Сиб. мат. журн.* — 1993. — Т. 34, № 1. — С. 185–192.

18. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно // *Сиб. мат. журн.* — 1998. — Т. 39, № 4. — С. 776–795.

19. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // *Известия вузов. Математика.* — 2002. — № 10. — С. 11–33.

20. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I // *Матем. тр.* — 2003. — Т. 6, № 2. — С. 14–65.

21. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. II // *Матем. тр.* — 2004. — Т. 7, № 1. — С. 13–49.

22. *Riesz F.* Untersuchungen uber Systeme integrierbarer Funktionen // *Mathematische Annalen.* — 1910. — Vol. 69. — Pp. 449–497.

23. *Young W. H.* On Classes of Summable Functions and their Fourier Series // *Proc. Royal Soc.* — 1912. — Vol. 87. — Pp. 225–229.

24. *Birnbaum Z. W., Orlicz W..* Uber die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander Konjugierten Potenzen // *Studia Math.* — 1931. — Vol. 3. — Pp. 1–67.

25. *Orlicz W.* Uber eine gewisse Klasse von Raumen vom Typus B // *Bull. Int. Acad. Polon. Sci.* — 1932. — Pp. 207–220.

26. *Orlicz W.* Uber Raume (L_M) // *Bull. Int. Acad. Polon. Sci.* — 1932. — Pp. 93–107.

27. *Zaanen A. C.* Note on a certain class of Banach spaces // *Indag. Math.* — 1949. — Vol. 11. — Pp. 148–158.

28. *Nacano H.* Modulared semi-ordered linear spases. V.1. — Tokyo: Mathem. Book-series, 1950.

29. *Luxemburg W. A. J.* Banach function spaces. — Delft: Technische Hogeschool te Delft, 1955.

30. *Dubinskij Ju. A.* Sobolev spaces of infinite order and differential equations. — Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1986.

31. *Donaldson T. K.* Nonlinear elliptic boundary value problems in Orlicz—-Sobolev spaces // *Journal of differential equations.* — 1971. — Vol. 10. — Pp. 507–528.

32. *Donaldson T. K., Trudinger N. S.* Orlicz—Sobolev spaces and imbedding theorems // *Journal of functional analysis.* — 1971. — Vol. 8. — Pp. 52–75.

33. *Adams A. R.* Sobolev spaces. — New York: Academic Press, 1975.

34. *Adams A. R.* On the Orlicz—Sobolev imbedding theorem // *J. functional Anal.* — 1977. — Vol. 24. — Pp. 241–257.

35. *Cianchi. A.* Optimal Orlicz-Sobolev embeddings // *Rev. Mat. Iberoamericana.* — 2004. — Vol. 20. — Pp. 427–474.

36. *Rao M. M., Ren Z. D.* Theory of Orlicz Spaces. — Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, 1991.

37. *Водопьянов С. К., Молчанова А. О.* Полунепрерывность снизу коэффициента искажения отображения с ограниченным (θ,1)-весовым (p,q)-искажением // *Сиб. матем. журн.* — 2016. — Т. 57, № 5. — С. 999–1011.

38. *Водопьянов С. К., Молчанова А. О.* Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity [Электронный ресурс] // *arxiv.org.* — 2017. — Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1704.08022.

39. *Cui Y., Hudzik H., Kumar R., Maligranda L.* Composition operators in Orlicz spaces // *J.Aust. Math. Soc.* — 2004. — Vol. 76. — Pp. 189–206.

40. *Hencl S., Kleprlik L.* Composition of q-quasiconformal mappings and functions in Orlicz–Sobolev spaces // *Illinois J. Math.* — 2012. — Vol. 56, no. 3. — Pp. 931–955.

41. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1977. — Vol. 63, no. 4. — Pp. 337–403.

Публикации автора по теме диссертации

[A1] *Меновщиков А. В.* Операторы композиции в пространствах Соболева — Орлича // *Сибирский математический журнал.* — 2016. — Т. 57, № 5. — С. 1088–1101.

[A2] *Меновщиков А. В.* О регулярности отображений, обратных к гомеоморфизмам классов Соболева — Орлича // *Сибирский математический журнал.* — 2017. — Т. 58, № 4. — С. 834–850.

[A3] *Меновщиков А. В.* Полунепрерывность снизу коэффициентов искажения гомеоморфизмов, порождающих ограниченный оператор композиции пространств Соболева — Орлича // *Сибирский математический журнал.* — 2018. — Т. 59, № 2. — С. 422–432.

[A4] *Меновщиков А. В.* Операторы композиции в пространствах Орлича — Соболева // Международная конференция «Метрические структуры и управляемые системы». Тезисы докладов. — Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2015. — С. 41–42.

[A5] *Menovschikov A.* Regularity of the inverse of Sobolev — Orlicz mappings // Международная конференция «Геометрический анализ и теория управления». Тезисы докладов. — Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2016. — С. 67–68.

Меновщиков Александр Викторович

Операторы композиции в пространствах
Соболева — Орлича

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 15.06.2018 г.
Офсетная печать. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ № 182

Издательско-полиграфический центр НГУ
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.