На правах рукописи

Маулешова Гульнара Сайновна

АЛГЕБРО–ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОДНОТОЧЕЧНЫЕ КОММУТИРУЮЩИЕ РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ РАНГА 1 И РАНГА 2.

01.01.04 — геометрия и топология

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Новосибирск–2018

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет».

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, член–корр. РАН
Миронов Андрей Евгеньевич.

Официальные оппоненты:

Вьюгин Илья Владимирович, кандидат физико–математических наук, ФГБУН Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Добрушинская математическая лаборатория, старший научный сотрудник.

Мохов Олег Иванович, доктор физико–математических наук, старший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова», механико–математический факультет, кафедра высшей геометрии и топологии, профессор.

Ведущая организация: ФГБУН Санкт–Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится «18» октября 2018 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 на базе ФГБУН Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан «_____ »____________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, к. ф.–м. н. Егоров Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Диссертация посвящена исследованию алгебро–геометрических одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга 1 и ранга 2, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым произвольного рода.

Напомним необходимые нам определения. Пусть L_k, L_s — разностные операторы порядков $k = N_- + N_+$ и $s = M_- + M_+$

$$L_k = \sum_{j=-N_-}^{N_+} u_j(n)T^j, \quad L_s = \sum_{j=-M_-}^{M_+} v_j(n)T^j, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$N_+ \geq N_- \geq 0$, $M_+ \geq M_- \geq 0$, T — оператор сдвига, условие их коммутируемости эквивалентно сложной системе нелинейных разностных уравнений на их коэффициенты. Эти уравнения изучаются, начиная с начала 20–го века (см. [1]). Для коммутирующих разностных операторов справедлив аналог леммы Бурхналла–Чаунди. А именно, если $L_kL_s = L_sL_k$, то существует ненулевой полином $F(z,w)$ такой, что $F(L_k, L_s) = 0$ [2]. Полином F задает *спектральную кривую* пары L_k, L_s

$$\Gamma = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 | F(z,w) = 0\}.$$

Спектральная кривая параметризует совместные собственные числа, если

$$L_k\psi = z\psi, \qquad L_s\psi = w\psi,$$

то $(z,w) \in \Gamma$. *Рангом* пары L_k, L_s называется размерность пространства совместных собственных функций при фиксированных собственных числах

$$l = \dim\{\psi : L_k\psi = z\psi, \quad L_s\psi = w\psi\},$$

при этом предполагается, что точка $(z,w) \in \Gamma$ находится в общем положении. Таким образом, спектральная кривая и ранг определяются точно также, как и в случае коммутирующих дифференциальных операторов. В целом, между теориями коммутирующих дифференциальных и разностных операторов существует много общего, но есть и существенные различия, которые мы упомянем ниже.

Коммутирующие разностные и дифференциальные операторы имеют важные приложения в солитонных уравнениях. В частности, И.М. Кричевером и С.П. Новиковым [3,4] открыт замечательный класс точных решений солитонных уравнений — алгебро–геометрических решений ранга $l > 1$. Этот класс выделяется следующим условием. Совместные собственные функции вспомогательных коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов или их разностных аналогов образуют векторное расслоение ранга l над спектральной кривой Г. В случае спектральной кривой рода $g = 1$ в [3, 4] найдены решения ранга два уравнения Кадомцева–Петвиашвили и $2D$–цепочки Тоды. Основной трудностью при построении таких решений является задача построения коммутирующих операторов высокого ранга и их деформаций. Задача классификации коммутирующих дифференциальных операторов ранга $l > 1$ решена в [5], а задача классификация коммутирующих разностных операторов существенно развита в работах [3, 4, 6]. Нахождение операторов ранга $l > 1$ в общем случае является открытой проблемой. Отметим, что в случае эллиптической спектральной кривой коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 найдены И.М. Кричевером и С.П. Новиковым [4], а операторы ранга 3 найдены О.И. Моховым [7] (см. также [8]).

Максимальное коммутативное кольцо разностных операторов, содержащее L_k и L_s, изоморфно кольцу мероморфных функций на некоторой алгебраической кривой с полюсами в выделенных точках $q_1, \dots, q_m$ (см. [3]). Такие операторы называются m–точечными. Отметим, что любое кольцо коммутирующих дифференциальных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на спектральной кривой с единственным полюсом. В этом заключается одно из основных отличий коммутирующих дифференциальных и разностных операторов. Совместные собственные функции (функции Бейкера–Ахиезера) строятся по спектральным данным. Спектральные данные для двухточечных разностных коммутирующих операторов ранга 1 найдены И.М. Кричевером [2]. Собственные функции таких операторов явно находятся через тэта–функции спектральных кривых. Классификация m–точечных операторов ранга l существенно развита в [3]. В частности, в этой работе найдены спектральные данные для одноточечных операторов ранга $l > 1$. При этом, в случае ранга $l > 1$ собственные функции не могут быть найдены явно и нахождение таких операторов — открытая проблема. Одноточечные операторы ранга два, отвечающие эллиптической спектральной кривой, найдены в [3], операторы с полиномиальными коэффициентами среди этих операторов найдены в [9]. В случае спектральных кривых рода $g > 1$ и ранга l ранее не было известно примеров одноточечных коммутирующих разностных операторов до работы [1*].

Целью диссертации является изучение алгебро–геометрических одноточеченых коммутирующих разностных операторов ранга 1 и ранга 2, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым произвольного рода.

Основные результаты диссертации.

1. В случае ранга 2 получены уравнения, эквивалентные уравнениям Кричевера–Новикова на дискретную динамику параметров Тюрина. С помощью этих уравнений построены примеры операторов, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым произвольного рода.

2. Рассмотрен и изучен новый класс операторов, а именно алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один, где оператор сдвига входит в эти операторы только с положительными степенями. Найдены примеры таких операторов в случае гиперэллиптических спектральных кривых.

3. Установлена связь алгебро–геометрических одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга один с одномерными конечнозонными операторами Шредингера, в частности, получена дискретизация конечнозонных операторов Ламе для спектральных кривых рода 1.

Научная новизна и значимость работы. Работа носит теоретический характер. Все результаты диссертации являются новыми. Результаты работы могут быть использованы при дальнейших исследованиях коммутирующих разностных операторов ранга 1 и ранга 2, а также при построении решений рангов 1 и 2 солитонных уравнений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» под руководством академика И. А. Тайманова (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2015, 2017); семинаре «Интегрируемые системы» под руководством д.ф.–м.н., чл.–корр. РАН А. Е. Миронова (ИМ СО РАН, Новосибирск, 2016, 2018);

Результаты диссертации были представлены на Международной конференции «Современная математика: проблемы и приложения» (Казахстан, Кызылорда, 2013); Международной молодежной конференции «Геометрия и управление» (Москва, 2014); Конференции «Динамика в Сибири» (Новосибирск, 2016); Международной конференции «Таймановские чтения — 2017» (Казахстан, Уральск, 2017).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в семи печатных и электронных изданиях [1*]– [7*], три из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1*]– [3*], четыре — в тезисах докладов и материалах конференций [4*]– [7*]. Все результаты получены в неразделимом соавторстве с А. Е. Мироновым.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Список литературы насчитывает 48 наименования. Общий объем диссертации составляет 76 страниц.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д. ф.–м. н., чл.–корр. РАН Андрею Евгеньевичу Миронову за постановку задач, полезные обсуждения и всестороннюю поддержку.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяется на параграфы. Все теоремы имеют двойную нумерацию: первое число — номер главы, второе — номер утверждения в текущей главе.

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования; изложены основные результаты диссертации; отражены данные об апробации. Также приведены сведения о публикации результатов диссертации.

Первая глава посвящена изучению алгебро–геометрических одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга 2 L_4, L_{4g+2}, отвечающих гиперэллиптическим спектральным кривым Γ рода g, заданным уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + c_{2g-1}z^{2g-1} + \ldots + c_0, \qquad (1)$$

при этом

$$L_4 = \sum_{i=-2}^{2} u_i(n)T^i, \quad L_{4g+2} = \sum_{i=-(2g+1)}^{2g+1} v_i(n)T^i, \quad u_2 = v_{2g+1} = 1,$$

$$L_4\psi = z\psi, \quad L_{4g+2}\psi = w\psi, \quad \psi = \psi(n,P), \quad P = (z,w) \in \Gamma.$$

Совместные собственные функции L_4 и L_{4g+2} удовлетворяют уравнению (см. [3])

$$\psi(n+1,P) = \chi_1(n,P)\psi(n-1,P) + \chi_2(n,P)\psi(n,P),$$

функции $\chi_1(n,P)$ и $\chi_2(n,P)$ рациональны на Γ и имеют $2g$ простых полюсов, зависящих от n. Функция $\chi_2(n,P)$ дополнительно имеет простой полюс в бесконечно удаленной точке q. Для того, чтобы найти L_4 и L_{4g+2} достаточно найти χ_1 и χ_2. Пусть σ — инволюция на Γ, $\sigma(z,w)=(z,-w)$. Основные результаты этой главы — теоремы 1.1–1.5.

Теорема 1.1 ([1*]). *Если*

$$\chi_1(n,P)=\chi_1(n,\sigma(P)),$$

то L_4 имеет вид

$$L_4=(T+U_n+V_nT^{-1})^2+W_n,$$

при этом

$$\chi_1=-V_n\frac{Q_{n+1}}{Q_n},\qquad \chi_2=\frac{w}{Q_n}+\frac{S_n}{Q_n},$$

где

$$S_n(z)=-U_nz^g+\beta_{g-1}(n)z^{g-1}+\ldots+\beta_0(n),\quad Q_n=-\frac{S_{n-1}+S_n}{U_{n-1}+U_n}.$$

Функции U_n,V_n,W_n,S_n удовлетворяют уравнению

$$F_g(z)=S_n^2+Q_{n-1}Q_{n+1}V_n+Q_n(Q_{n+2}V_{n+1}+ \tag{2}$$

$$+Q_{n+1}(z-U_n^2-V_n-V_{n+1}-W_n)).$$

В теореме 1.1 и далее мы используем обозначение U_n,V_n,W_n вместо $U(n),V(n),W(n)$. Замечательно, что уравнение (2) линеаризуется (см. следствие 1.1, § 1.2, стр. 9). Теорема 1.1 позволяет найти коммутирующие операторы при $g=1$ (см. следствие 1.2, § 1.2, стр. 9).

Теорема 1.2 ([1*]). *Если*

$$\chi_1(n,P)=\chi_1(n,\sigma(P)),\qquad \chi_2(n,P)=-\chi_2(n,\sigma(P)),$$

то L_4 имеет вид

$$L_4=(T+V_nT^{-1})^2+W_n,$$

при этом

$$\chi_1 = -V_n \frac{Q_{n+1}}{Q_n}, \qquad \chi_2 = \frac{w}{Q_n},$$

где

$$Q_n(z) = z^g + \alpha_{g-1}(n) z^{g-1} + \ldots + \alpha_0(n).$$

Функции V_n, W_n, Q_n *удовлетворяют уравнению*

$$F_g(z) = Q_{n-1}Q_{n+1}V_n + Q_n(Q_{n+2}V_{n+1} + Q_{n+1}(z - V_n - V_{n+1} - W_n)). \quad (3)$$

Уравнение (3) линеаризуется. А именно, если в (3) заменить n на $n+1$ и от полученного уравнения отнять (3), то результат делится на $Q_{n+1}(z)$. В итоге приходим к линейному уравнению на $Q_n(z)$.

Следствие 1.3 ([1*]). *Функции* $Q_n(z), V_n, W_n$ *удовлетворяют уравнению*

$$Q_{n-1}V_n + Q_n(z - V_n - V_{n+1} - W_n) -$$
$$- Q_{n+2}(z - V_{n+1} - V_{n+2} - W_{n+1}) - Q_{n+3}V_{n+2} = 0. \quad (4)$$

Если $Q_n(z)$ удовлетворяет уравнению (4), то $Q_n(z)$ удовлетворяет уравнению (3) для некоторого $F_g(z)$.

В случае эллиптической спектральной кривой уравнение (3) позволяет выразить V_n, W_n через произвольный функциональный параметр γ_n.

Следствие 1.4 ([1*]). *Оператор*

$$L_4 = (T + V_n T^{-1})^2 + W_n,$$

где

$$V_n = \frac{F_1(\gamma_n)}{(\gamma_n - \gamma_{n-1})(\gamma_n - \gamma_{n+1})}, \quad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1},$$
$$F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0,$$

коммутирует с оператором

$$L_6 = T^3 + (V_n + V_{n+1} + V_{n+2} + W_n - \gamma_{n+2})T +$$
$$+ V_n(V_{n-1} + V_n + V_{n+1} + W_n - \gamma_{n-1})T^{-1} + V_{n-2}V_{n-1}V_n T^{-3}.$$

Спектральная кривая пары $L_4,\ L_6$ *задается уравнением* $w^2 = F_1(z)$.

Теорема 1.2 позволяет эффективно строить примеры коммутирующих разностных операторов.

Теорема 1.3 ([1*]). *Оператор*

$$L_4 = (T + (r_3 n^3 + r_2 n^2 + r_1 n + r_0)T^{-1})^2 + g(g+1)r_3 n, \quad r_3 \neq 0$$

коммутирует с разностным оператором L_{4g+2}.

Теорема 1.4 ([1*]). *Оператор*

$$L_4 = (T + (r_1 a^n + r_0)T^{-1})^2 + r_1(a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1)a^{n-g}, \quad r_1 \neq 0, a \neq 0,$$

где $a^{2g+1} - a^{g+1} - a^g + 1 \neq 0$, *коммутирует с разностным оператором* L_{4g+2}.

Теорема 1.5 ([1*]). *Оператор*

$$L_4 = (T + (r_1 \cos(n) + r_0)T^{-1})^2 - 4r_1 \sin(\frac{g}{2}) \sin(\frac{g+1}{2}) \cos(n + \frac{1}{2}), \quad r_1 \neq 0$$

коммутирует с разностным оператором L_{4g+2}.

В параграфе 1.2 изучаются эволюционные уравнения на функции $V_n(t), W_n(t)$

$$\partial_t V_n = V_n(W_{n-1} - W_n + V_{n-1} - V_{n+1}),$$

$$\partial_t W_n = (W_n - W_{n-1})V_n + (W_{n+1} - W_n)V_{n+1}$$

при условии, что $L_4 = (T + V_n(t)T^{-1})^2 + W_n(t)$ коммутирует с оператором L_{4g+2}.

Во **второй главе** изучаются алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга 1. Коэффициенты таких операторов зависят от одного функционального параметра, а операторы сдвига входят в разностные операторы только с положительными степенями. Мы изучаем эти операторы в случае гиперэллиптических спектральных кривых, когда выделенная точка совпадает с точкой ветвления. Отметим, что все другие классы коммутативных колец разностных операторов, исследованные ранее (см. [2], [3], [9], [1*]), содержат операторы, в которые оператор сдвига входит как с положительными, так и с отрицательными степенями.

Рассмотрим следующие спектральные данные

$$S = \{\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_g, q, k^{-1}, P_n\},$$

где Γ — риманова поверхность рода g, $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ — неспециальный дивизор на Γ ($\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ — в общем положении), $q \in \Gamma$ — выделенная точка, k^{-1} — локальный параметр около q, $P_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{Z}$, — набор точек в общем положении (т.е. если $n > 0$, то точка $(P_1, \ldots, P_n)$ принадлежит некоторому открытому всюду плотному подмножеству в $\Gamma^n = \Gamma \times \ldots \times \Gamma$ и аналогично при $n < 0$).

Теорема 2.1 ([2*]). *Существует единственная функция $\psi(n, P)$, $n \in \mathbb{Z}$, $P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами.*
1. *Дивизор нулей и полюсов ψ имеет вид*

$$\gamma_1(n) + \ldots + \gamma_g(n) + P_1 + \ldots + P_n - \gamma_1 - \ldots - \gamma_g - nq,$$

если $n \geq 0$, и имеет вид

$$\gamma_1(n) + \ldots + \gamma_g(n) - P_{-1} - \ldots - P_n - \gamma_1 - \ldots - \gamma_g - nq,$$

если $n < 0$.
2. *В окрестности q функция ψ имеет разложение*

$$\psi = k^n + O(k^{n-1}).$$

3. $\psi(0, P) = 1$.

Функцию $\psi(n, P)$ назовем функцией Бейкера–Ахиезера. Для мероморфной функции $f(P)$ на Γ с единственным полюсом порядка m в q с разложением $f = k^m + O(k^{m-1})$ существует единственный оператор вида

$$L_m = T^m + u_{m-1}(n)T^{m-1} + \ldots + u_0(n),$$

такой, что $L_m\psi(n, P) = f(P)\psi(n, P)$. Оператор L_m лежит в коммутативном кольце разностных операторов, изоморфном кольцу мероморфных функций на Γ с полюсом в q.

Замечание 1. *Спектральные данные, в которых появляется дополнительный набор точек P_n (аналогично нашей конструкции), рассматривались И.М. Кричевером [10] в случае двумерного дискретного оператора Шрёдингера.*

Отметим, что дивизор $\gamma_1(n)+\ldots+\gamma_g(n)$ определяется по спектральным данным однозначно. Отметим также, что в частном случае, когда все точки P_n совпадают, мы получаем двухточечные операторы И.М. Кричевера [2] ранга один.

Двухточечные операторы ранга один, в которые операторы сдвига входят только с отрицательными степенями, рассматривались в работе [11].

Рассмотрим гиперэллиптическую спектральную кривую Γ, заданную уравнением (1), в качестве выделенной точки выберем $q=\infty$. Пусть $\psi(n,P)$ — соответствующая функция Бейкера–Ахиезера. Тогда существуют коммутирующие операторы L_2, L_{2g+1} такие, что

$$L_2\psi = ((T+U_n)^2+W_n)\psi = z\psi, \quad L_{2g+1}\psi = w\psi.$$

Теорема 2.2 ([2*]). *Имеет место равенство*

$$L_2 - z = (T+U_n+U_{n+1}+\chi(n,P))(T-\chi(n,P)),$$

где

$$\chi = \frac{\psi(n+1,P)}{\psi(n,P)} = \frac{S_n}{Q_n} + \frac{w}{Q_n},$$

$$S_n(z) = -U_n z^g + \delta_{g-1}(n)z^{g-1}+\ldots+\delta_0(n), \quad Q_n = -\frac{S_{n-1}+S_n}{U_{n-1}+U_n}.$$

Функции U_n, W_n, S_n удовлетворяют уравнению

$$F_g(z) = S_n^2 + (z-U_n^2-W_n)Q_nQ_{n+1}. \tag{5}$$

Уравнение (5) так же, как и уравнение (3) может быть линеаризовано.

Следствие 2.1 ([2*]). *Функции $S_n(z), U_n, W_n$ удовлетворяют уравнению*

$$(S_n-S_{n+1})(U_n+U_{n+1}) - (z-U_n^2-W_n)Q_n +$$
$$(z-U_{n+1}^2-W_{n+1})Q_{n+2} = 0.$$

Следствие 2.2 ([2*]). *В случае эллиптической спектральной кривой Γ, заданной уравнением*

$$w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0,$$

оператор

$$L_2 = (T + U_n)^2 + W_n,$$

где

$$U_n = -\frac{\mu_1\sqrt{F_1(\gamma_n)} + \mu_2\sqrt{F_1(\gamma_{n+1})}}{\gamma_n - \gamma_{n+1}}, \quad W_n = -c_2 - \gamma_n - \gamma_{n+1},$$

$\mu_1, \mu_2 = \pm 1$, γ_n *— произвольный функциональный параметр, коммутирует с некоторым оператором* L_3.

Теорема 2.2 позволяет строить явные примеры.

Теорема 2.3 ([2*]). *Оператор*

$$L_2 = (T + r_1\cos(n))^2 + \frac{1}{2}r_1^2\sec^2(g + \frac{1}{2})\sin(g)\sin(g+1)\cos(2n),$$

$r_1 \neq 0$, *коммутирует с оператором* L_{2g+1} *порядка* $2g+1$.

Теорема 2.4 ([2*]). *Оператор*

$$L_2 = (T + \alpha_2 n^2 + \alpha_0)^2 - g(g+1)\alpha_2^2 n^2, \quad \alpha_2 \neq 0,$$

коммутирует с оператором L_{2g+1} *порядка* $2g+1$.

В **третьей главе** рассматриваются алгебро–геометрические одноточечные коммутирующие ε–разностные операторы ранга 1 вида

$$L_m = \frac{T_\varepsilon^m}{\varepsilon^m} + u_{m-1}(x,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-1}} + \ldots + u_0(x,\varepsilon),$$

где T_ε — оператор сдвига на ε, $T_\varepsilon\varphi(x) = \varphi(x+\varepsilon)$. Пусть Γ — гиперэллиптическая спектральная кривая, удовлетворяющая уравнению (1) и $q = \infty$. Предположим, что оператор

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + A(x,\varepsilon)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + B(x,\varepsilon)$$

коммутирует с оператором L_{2g+1}. Аналогами теоремы 2.2 и следствия 2.2 из [2*] являются следующие теорема и следствие.

Теорема 3.1 ([3*]). *Имеет место равенство*

$$L_2 - z = \big(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + A(x,\varepsilon) + \chi(x+\varepsilon,\varepsilon,z)\big)\big(\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} - \chi(x,\varepsilon,z)\big),$$

где

$$\chi = \frac{S(x,\varepsilon,z)}{Q(x,\varepsilon,z)} + \frac{w}{Q(x,\varepsilon,z)},$$

$$S(x,\varepsilon,z) = -\delta_g(x,\varepsilon)z^g + \delta_{g-1}(x,\varepsilon)z^{g-1} + \ldots + \delta_0(x,\varepsilon),$$

$$A(x,\varepsilon) = \delta_g(x,\varepsilon) + \delta_g(x+\varepsilon,\varepsilon),$$

$$Q(x,\varepsilon,z) = -\frac{S(x-\varepsilon,\varepsilon,z) + S(x,\varepsilon,z)}{A(x-\varepsilon,\varepsilon)}.$$

Функции A, B, S, Q *удовлетворяют уравнению*

$$F_g(z) = S^2(x,\varepsilon,z) + Q(x,\varepsilon,z)Q(x+\varepsilon,\varepsilon,z)(z - B(x,\varepsilon)). \tag{6}$$

Отметим, что уравнение (6) может быть линеаризовано. Функции A, B, S, Q удовлетворяют уравнению

$$(S(x,\varepsilon,z) - S(x+\varepsilon,\varepsilon,z))A(x,\varepsilon) - Q(x,\varepsilon,z)(z - B(x,\varepsilon)) +$$

$$+ Q(x+2\varepsilon,\varepsilon,z)(z - B(x+\varepsilon,\varepsilon)) = 0. \tag{7}$$

Если $S(x,\varepsilon,z)$ удовлетворяет уравнению (7), то $S(x,\varepsilon,z)$ удовлетворяет уравнению (6) для некоторого $F_g(z)$.

Теорема 3.1 позволяет построить явный пример алгебро–геометрических коммутирующих одноточечных ε–разностных операторов в случае эллиптической спектральной кривой.

Следствие 3.1 ([3*]). *Оператор*

$$L_2 = (\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \delta_1(x,\varepsilon))^2 + W(x,\varepsilon),$$

где

$$\delta_1(x,\varepsilon) = -\frac{\mu_1\sqrt{F_1(\gamma(x,\varepsilon))} + \mu_2\sqrt{F_1(\gamma(x+\varepsilon,\varepsilon))}}{\tilde\gamma(x,\varepsilon) - \tilde\gamma(x+\varepsilon,\varepsilon)},$$

$$W(x,\varepsilon) = -c_2 - \gamma(x,\varepsilon) - \gamma(x+\varepsilon,\varepsilon),$$

$\mu_1, \mu_2 = \pm 1$, $\gamma(x,\varepsilon)$ — *произвольный функциональный параметр, коммутирует с оператором*

$$L_3 = \frac{T_\varepsilon^3}{\varepsilon^3} + \big(\delta_1(x,\varepsilon) + \delta_1(x+\varepsilon,\varepsilon) + \delta_1(x+2\varepsilon,\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} +$$

$$+\big(\delta_1^2(x,\varepsilon) + \delta_1^2(x+\varepsilon,\varepsilon) + \delta_1(x,\varepsilon)\delta_1(x+\varepsilon,\varepsilon) + W(x,\varepsilon) - \gamma(x+2\varepsilon,\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} +$$

$$+\big(- \mu_1\sqrt{F_1(\gamma(x,\varepsilon))} + \delta_1(x,\varepsilon)(\delta_1^2(x,\varepsilon) + W(x,\varepsilon) - \gamma(x,\varepsilon))\big).$$

Спектральная кривая пары $L_2,\ L_3$ *задается уравнением*

$$w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0.$$

При $g > 1$ найти решения уравнения (6) очень трудно, более того, даже нахождение примеров является сложной задачей.

Положим в следствии 3.1 функциональный параметр равным

$$\gamma(x,\varepsilon) = \wp(x-\varepsilon),$$

тогда

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + \big(- 2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x-\varepsilon) + \zeta(x+\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon),$$

где $\zeta(x)$ — функция Вейерштрасса.

Основной результат этой главы — следующая теорема.

Теорема 3.2 ([3*]). *Оператор*

$$L_2 = \frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + \big(- 2\zeta(\varepsilon) - \zeta(x-\varepsilon) + \zeta(x+\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \wp(\varepsilon),$$

коммутирует с оператором

$$L_3 = \frac{T_\varepsilon^3}{\varepsilon^3} + \big(- 3\zeta(\varepsilon) - \zeta(x-\varepsilon) + \zeta(x+2\varepsilon)\big)\frac{T_\varepsilon^2}{\varepsilon^2} +$$

$$+\big((\zeta(\varepsilon) + \zeta(x-\varepsilon) - \zeta(x))(\zeta(\varepsilon) + \zeta(x) - \zeta(x+\varepsilon)) +$$

$$+2\wp(\varepsilon) + \wp(x)\big)\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\wp'(\varepsilon).$$

При этом

$$L_2 = \partial_x^2 - 2\wp(x) + O(\varepsilon), \quad L_3 = \partial_x^3 - 3\wp(x)\partial_x - \frac{3}{2}\wp'(x) + O(\varepsilon).$$

Отметим, что спектральная кривая пары коммутирующих дифференциальных операторов (т.е. кривая, заданная уравнением $w^2 = F_1(z)$)

$$\partial_x^2 - 2\wp(x), \qquad \partial_x^3 - 3\wp(x)\partial_x - \frac{3}{2}\wp'(x)$$

такая же как и для ε–разностных операторов L_2, L_3. Таким образом, теорема 3.2 дает замечательную дискретизацию оператора Ламе в случае спектральной кривой рода 1.

Более того, в работе [3*] мы нашли дискретизацию оператора Ламе для произвольного рода g. Но, поскольку доказательство достаточно длинное, данный результат мы не включили в диссертационную работу.

Отметим, что другая дискретизация оператора Ламе в рамках двухточечной конструкции рассматривалась в работе [12].

В **заключении** излагаются результаты работы и перспективы дальнейшей разработки темы.

Литература

[1] Wallenberg, G. *Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differenzenausdrücke.* / G. Wallenberg // Arch. Math. Phys. bd. — 1909. — V. 15. P. 151 – 157.

[2] Кричевер, И. М. *Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения.* /И. М. Кричевер // Успехи математических наук. — 1978. — Т. 33, № 4. С. 215 – 216.

[3] Кричевер, И. М., Новиков, С. П. *Двумеризованная цепочка тоды, коммутирующие разностные операторы и голоморфные расслоения.* / И. М. Кричевер, С. П. Новиков // Успехи математических наук. — 2003. — Т. 58, № 3. — С. 51 – 88.

[4] Кричевер, И. М., Новиков, С. П. *Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.* / И. М. Кричевер, С. П. Новиков // Успехи математических наук. — 1980. — Т. 35, № 6(216). — С. 47 – 68.

[5] Кричевер, И. М. *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов.* / И. М. Кричевер // Функц. анализ и его прил. — 1978. — Т. 12, № 3. С. 20 – 31.

[6] Кричевер, И. М. *Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.* / И. М. Кричевер // Функц. анализ и его прил. — 1977. — Т. 11, № 1. — С. 15 – 31.

[7] Мохов, О. И. *Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 3, отвечающие эллиптической кривой.* / О. И. Мохов // Успехи математических наук. — 1982. Т. 37, № 4(226). С. 169 – 170.

[8] Мохов, О. И. *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения.* / О. И. Мохов // Известия АН СССР, серия математическая. — 1989. Т. 53, № 6. С. 1291 – 1315.

[9] Миронов, А. Е. *Дискретные аналоги операторов Диксмье.* / А. Е. Миронов // Матем. сб. — 2007. — Т. 198, № 10. 57 – 66.

[10] Кричевер, И. М. *Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия* / И. М. Кричевер // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, №1. С. 31 – 36.

[11] Кричевер, И. М. *Коммутирующие разностные операторы и комбинаторное преобразование Гэйла* / И. М. Кричевер // Функц. анализ и его прил. — 2015. — Т. 49, № 3. С. 22 – 40.

[12] Кричевер, И. М., Забродин, А. Б. *Спиновое обобщение модели Рейсенарса–Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Тода и представления алгебры Склянина* / И. М. Кричевер, А. Б. Забродин // УМН. — 1995. — Т. 50, № 6(306). С. 3 – 56.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1*] Маулешова, Г. С., Миронов, А. Е. *О коммутирующих разностных операторах ранга 2.* / Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов // Успехи математических наук. — 2015. —Т. 70, № 3(423). — С. 181 – 182.

[2*] Маулешова, Г. С., Миронов, А. Е. *Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один.* / Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. С. 399 – 401.

[3*] Маулешова, Г. С., Миронов, А. Е. *Одноточечные коммутирующие разностные операторы ранга один и их связь с конечнозонными операторами Шрёдингера.* / Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов // Доклады академии наук. — 2018. — Т. 478, № 4. С. 392 – 394.

[4*] Маулешова, Г. С. *Коммутирующие разностные операторы, отвечающие гиперэллиптическим спектральным кривым* / Г. С. Маулешова // Сборник трудов международной научно–практической конференции, посвященной научно–педагогической деятельности академика А. Д. Тайманова «Современная математика: проблемы и приложения»:/ Кызылординский гос. ун–т имени Коркыт Ата. Алматы: «Гылым ордасы», 2013. — С. 218 – 222.

[5*] Mauleshova, G. S., Mironov, A. E. *Discrete Dynamics of the Tyurin Parameters and Commuting Difference Operators* [Электронный ресурс] / Gulnara S. Mauleshova, Andrey E. Mironov // International Youth Conference «Geometry and Control», Moscow, April 14–18, 2014: Abstracts. — Moscow: Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, 2014. — P. 34 – 35. — Режим доступа: http://gc2014.mi.ras.ru/Abstr_bookGC2014.pdf.

[6*] Mauleshova, G. S., Mironov, A. E. *On Commuting Difference Operators of Rank One* [Электронный ресурс] / Gulnara Mauleshova, Andrey Mironov // Международная конференция «Динамика в Сибири», Новосибирск. — 2016. — 1 с. — Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/ds/2016/pdfs/mauleshova.pdf

[7*] Маулешова, Г. С., Миронов, А. Е. *Дискретизация конечнозонных операторов Ламе* / Г. С. Маулешова, А. Е. Миронов // Сборник материалов международной научно–практической конференции, посвященной 100–летию доктора физико–математических наук, академика А. Д. Тайманова «Таймановские чтения — 2017»: Математика / Западно–Казахстанский гос. ун–т имени М. Утемисова, Уральск. — 2017. — С. 44.

Подписано в печать 15.06.2018 г. Печать офсетная.
Бумага офсетная. Формат 60 x 84 1/16 Усл. печ. л. 1
Тираж 65 экз. Заказ №

Отпечатано в типографии «Срочная полиграфия»
ИП Малыгин Алексей Михайлович
630090, Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 6/1, оф. 104
Тел.(383)217-43-46, 8-913-922-19-07