На правах рукописи

Маслова Наталья Владимировна

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И НОРМАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Екатеринбург
2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук», г. Екатеринбург.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Кондратьев Анатолий Семенович
Официальные оппоненты:	Ведерников Виктор Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Государственное автономное образовательное учреждение высшего образования г. Москвы «Московский городской педагогический университет», г. Москва, профессор кафедры высшей математики и методики преподавания математики
	Казарин Лев Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова», г. Ярославль, заведующий кафедрой алгебры и математической логики
	Кораблева Вера Владимировна, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Челябинский государственный университет», г. Челябинск, профессор кафедры компьютерной безопасности и прикладной алгебры
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», г. Красноярск

Защита диссертации состоится 21 февраля 2019 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук» по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук» и на сайте http://math.nsc.ru

Автореферат разослан «____» __________ 201__ г.

Ученый секретарь диссертационного совета,

кандидат физ.-мат. наук А. И. Стукачев

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Теория групп возникла как эффективный инструмент решения проблемы разрешимости алгебраических уравнений от одного переменного. Понятие группы широко обобщает фундаментальные свойства симметрии, роль которой в науке общеизвестна. Это понятие оказалось очень плодотворным благодаря, с одной стороны, формальной простоте, а с другой — универсальности: с любым реальным или мыслимым объектом можно связать группу его "симметрий", т. е. некоторых обратимых преобразований, оставляющих данный объект инвариантным или, по крайней мере, сохраняющих какие-либо его свойства. Методы теории групп востребованы в самых различных областях: теории элементарных частиц, кристаллографии, теории решения дифференциальных уравнений в квадратурах, теории кодирования, теории защиты информации и т.д. Многие разделы математики и естествознания используют язык теории групп в качестве рабочего, а некоторые важные и сложные проблемы даже получили исчерпывающее решение только благодаря переходу на этот язык (например, теория Галуа алгебраических уравнений, классификация кристаллографических групп Федорова). Начиная с середины XX века, в связи с расцветом дискретной математики и компьютерных наук, все более весомую роль в современной науке играют конечные группы.

Всюду мы будем употреблять термин "группа" в значении "конечная группа".

В теории групп "арифметическими" принято называть свойства группы, которые определяются ее числовыми параметрами такими, как порядок группы и наборы его простых делителей, порядки элементов, порядки подгрупп, степени неприводимых представлений и т.д. Термин "нормальное строение группы" характеризует такие инварианты группы, как набор ее композиционных и главных факторов с учетом особенностей действия группы на этих факторах. Хорошо известно глубокое взаимное влияние, которое оказывают друг на друга арифметические свойства группы и ее нормальное строение.

Одной из фундаментальных задач современной теории групп является изучение арифметических свойств конечных групп и получение различных характеризаций конечных групп с помощью их арифметических параметров. В этой области исторически первым значимым результатом стала теорема Лагранжа, утверждающая, что порядок любой конечной группы делится на порядок любой ее подгруппы. Эта теорема демонстрирует, насколько сильно порядок группы определяет ее подгрупповое строение. Например, ввиду теоремы Лагранжа группа простого порядка циклическая и не содержит собственных нетривиальных подгрупп. Обращение теоремы Лагранжа неверно: если m — некоторый делитель порядка группы G, то в общем случае в группе G может не быть подгруппы порядка m.

Изучение связи между арифметическими свойствами группы и ее нормальным строением стало возможно после появления в 1872 г. работы норвежского алгебраиста Л. Силова [48], ставшей, по мнению многих специалистов, краеугольным камнем в теории конечных групп. Как было указано выше, если m — некоторый делитель порядка группы G, то в общем случае в группе G может не быть подгруппы порядка m. В работе [48] было доказано, что если m — степень простого числа p, то в группе G обязательно найдется подгруппа порядка m. Более того, если p^k — наибольшая степень числа p, делящая порядок G, то любые две подгруппы порядка p^k сопряжены в G (позднее такие подгруппы стали называть силовскими p-подгруппами), а любая подгруппа порядка p^s, где $0 \leq s \leq k$, содержится в некоторой подгруппе порядка p^k. Теоремы Силова в современной формулировке включены во многие учебники по алгебре и по теории групп.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Подгруппа H группы G называется *π-холловой*, если любой простой делитель числа $|H|$ принадлежит π, а индекс $|G : H|$ не делится на числа из π. Подгруппа H группы G называется *холловой*, если числа $|H|$ и $|G : H|$ взаимно просты. В 1928 г. Ф. Холлом [23] была доказана теорема, устанавливающая существование, сопряженность и другие свойства холловых подгрупп в разрешимой группе и являющаяся широким обобщением теорем Силова. Кроме того, в 1937-1938 гг. Ф. Холлом [24] и независимо С.А. Чунихиным [9] было доказано некоторое обращение теоремы Холла, а именно, было доказано, что если G — группа, для любого простого числа p содержащая холлову подгруппу индекса p^α, где p^α — наибольшая степень числа p, делящая порядок G, то G разрешима.

Для исследования холловых подгрупп неразрешимой группы С.А. Чунихин предложил искать связь между подгрупповой структурой этой группы и подгрупповой структурой ее главных или композиционных факторов. Начиная с 1950-х годов результаты и идеи Чунихина получили распространение и признание во всем мире. В разные годы изучением холловых подгрупп неразрешимых групп, помимо Ф. Холла и С.А. Чунихина, занимались такие алгебраисты как Л.С. Казарин, В.Д. Мазуров, Л.А. Шеметков, Р. Бэр, Ф. Гросс, Н. Ито, Б. Хартли, Дж. Томпсон, Х. Виланд, Г. Цаппа и многие другие. Классификация конечных простых групп открыла на этом пути новые возможности. Наиболее сильные и впечатляющие результаты в этом направлении получены в последнее время Е.П. Вдовиным и Д.О. Ревиным: ими, в частности, была получена классификация холловых подгрупп в неабелевых простых группах (см. обзорную статью [52]). Эта классификация открыла новые возможности в исследовании нормального строения групп с арифметическими ограничениями, налагаемыми на их подгруппы.

Одним из экстремальных классов является класс групп, все максимальные подгруппы которых холловы. Такие группы будем называть группами с холловыми максимальными подгруппами. Группа с дополнямыми максимальными подгруппами— это группа, в которой каждая максимальная подгруппа дополняема. Как объект исследования группы из этих двух классов впервые возникли в работах В.М. Левчука и А.Г. Лихарева [35] и В.Н. Тютянова [8], где было установлено, что неабелева простая группа с дополняемыми максимальными подгруппами изоморфна $PSL_2(7) \cong PSL_3(2)$, $PSL_2(11)$ или $PSL_5(2)$. Во всех этих группах каждая максимальная подгруппа является холловой. Т.В. Тихоненко и В.Н. Тютянов [7] показали, что верно и обратное, а именно, что группами $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ и $PSL_5(2)$ с точностью до изоморфизма исчерпываются все неабелевы простые группы с холловыми максимальными подгруппами.

В.С. Монахов в [41] начал изучение групп G со следующим свойством:

(*) *для фиксированного множества π простых чисел все максимальные подгруппы в G, все простые делители которых лежат в π, холловы.*

Основной результат [41] полностью описывает π-разрешимые группы со свойством $(*)$: это в точности группы, в которых главные π-факторы изоморфны силовским подгруппам. В [41] особенно был выделен случай, когда π совпадает с множеством всех простых чисел, т. е. случай разрешимых групп с холловыми максимальными подгруппами. В [41] было доказано, что для разрешимой группы G следующие утверждения эквивалентны:

(1) все максимальные подгруппы группы G холловы;

(2) любая максимальная подгруппа в G дополняема некоторой силовской подгруппой;

(3) все главные факторы группы G изоморфны силовским подгруппам группы G.

В той же работе [41] В.С. Монахов сформулировал следующую проблему, записанную им впоследствии в "Коуровскую тетрадь" [50, проблема 17.92].

Проблема А.1. *Каковы неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы, у которой все максимальные подгруппы холловы*[1]*?*

Кроме того, представляет интерес получение для групп с холловыми максимальными подгруппами результатов, аналогичных результатам В.С. Монахова [41] для π-разрешимых групп. Как естественное обобщение проблемы А.1 возникает следующая проблема.

Проблема А.2. *Получить описание нормального строения групп с холловыми максимальными подгруппами.*

Кроме того, Тихоненко и Тютянов в [7] высказали гипотезу о справедливости включения класса групп с холловыми максимальными подгруппами в класс групп с дополняемыми максимальными подгруппами. Эта гипотеза справедлива не только для неабелевых простых, но и для разрешимых групп, поскольку в разрешимых группах максимальные подгруппы имеют примарные индексы и, следовательно, дополняемы силовскими подгруппами. Поэтому представляет интерес следующая

Проблема А.3. *Верно ли, что в группе с холловыми максимальными подгруппами каждая максимальная подгруппа дополняема?*

Простым спектром $\pi(G)$ группы G называется множество всех простых делителей ее порядка. Ввиду теоремы Лагранжа, простой спектр любой подгруппы группы G содержится в $\pi(G)$. Группу G естественно называть *минимальной относительно простого спектра*, если $\pi(G) \neq \pi(H)$ для любой собственной подгруппы H из G. Легко понять, что класс групп с холловыми максимальными подгруппами является собственным подклассом класса минимальных относительно простого спектра групп.

П. Шумяцкий записал в “Коуровскую тетрадь” следующую гипотезу ([50, проблема 17.125]):

Гипотеза А.1. *В группе G найдется пара сопряженных элементов a и b таких, что $\pi(G) = \pi(\langle a, b\rangle)$.*

Отметим, что существование в любой группе G двупорожденной (не обязательно сопряженными элементами) подгруппы H с условием $\pi(G) = \pi(H)$ следует из [39, теорема А], что является частичным подтверждением гипотезы А.1. В параграфе 2.7 настоящей диссертации показано, что гипотеза А.1 эквивалентна следующей гипотезе.

Гипотеза А.2. *Любая минимальная относительно простого спектра группа порождается двумя сопряженными элементами.*

[1]Хотя все простые группы с холловыми максимальными подгруппами известны, у произвольной группы с холловыми максимальными подгруппами композиционные факторы a priori не обязаны сами быть группами с холловыми максимальными подгруппами.

В связи с исследованием гипотез А.1 и А.2 представляют интерес две следующие проблемы, которые являются обобщениями проблем А.1 и А.2 соответственно:

Проблема А.4. *Какими могут быть неабелевы композиционные факторы неразрешимой минимальной относительно простого спектра группы?*

Проблема А.5. *Каково нормальное строение неразрешимой минимальной относительно простого спектра группы?*

Легко понять, что разрешимые минимальные относительно простого спектра группы — это в точности разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами.

В соответствии с определением Ф. Холла [49], подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. Примерами пронормальных подгрупп являются нормальные подгруппы, максимальные подгруппы, силовские подгруппы, а также силовские подгруппы нормальных подгрупп, холловы подгруппы разрешимых групп.

Эквивалентное определение пронормальной подгруппы можно сформулировать в терминах групп подстановок: *подгруппа H пронормальна в группе G тогда и только тогда, когда при любом транзитивном подстановочном представлении группы G подгруппа $N_G(H)$ транзитивно действует на множестве неподвижных относительно H точек.* Понятие пронормальной подгруппы использовалось для исследования свойств разрешимых групп (см., например, [49]). Также некоторые проблемы в теории групп подстановок (см., например, [45]) и в комбинаторике (см., например, [10, 44]) были решены в терминах пронормальности. Естественным образом возникает следующая проблема: *Пусть G — группа и $H \leq G$, пронормальна ли H в G?*

Ш. Прэгер [45] исследовала пронормальные группы в группах подстановок. Она показала, что нетривиальная пронормальная подгруппа H группы G в любом транзитивном подстановочном представлении G не может фиксировать более половины точек. Таким образом, если в некотором подстановочном представлении группы G мощность множества неподвижных относительно H точек достаточно большая, то H заведомо не пронормальна в G. Поэтому представляет интерес вопрос пронормальности подгрупп группы G, содержащих пронормальную в G подгруппу, в частности, вопрос пронормальности надгрупп силовских подгрупп простых групп.

Ввиду классической теоремы Холла [23] холловы подгруппы пронормальны в разрешимых группах. Е. П. Вдовиным и Д.О. Ревиным [53] было доказано, что холловы подгруппы пронормальны также в неабелевых простых группах, и на основании анализа доказательства была высказана

Гипотеза В.1. *В простых группах подгруппы нечетных индексов пронормальны.*

Гипотеза В.1 появилась в связи со следующим наблюдением: в группе G подгруппа H, содержащая силовскую p-подгруппу S группы G, пронормальна, если, и только если условие сопряженности подгрупп H и H^g в $\langle H, H^g \rangle$ выполнено для любого элемента $g \in N_G(S)$ (см. [53, лемма 5]).

Г. Глауберман, Дж. Томпсон, Р. Гуральник, Г. Малле и Г. Наварро (см. [21]) показали, что силовские подгруппы нечетных порядков не могут быть самонормализуемы в неабелевых простых группах. Более того, группа, содержащая самонормализуемую силовскую подгруппу нечетного порядка, как правило, разрешима [21]. Построить примеры непронормальных надгрупп силовских p-подгрупп нечетных порядков в простых группах не составляет труда, такие примеры были построены для всех нечетных простых чисел p в работе А.С. Кондратьева, автора диссертации и Д.О. Ревина [62].

Подгруппы нечетных индексов в группе — это в точности надгруппы ее силовских 2-подгрупп. А.С. Кондратьевым [32, следствие теорем 1–3] было показано, что в неабелевых простых группах силовская 2-подгруппа часто самонормализуема. Таким образом, подгруппы нечетных индексов пронормальны во многих простых группах. Заметим, что гипотеза В.1 была опровергнута А.С. Кондратьевым, автором диссертации и Д.О. Ревиным [66]. Представляет интерес следующая открытая

Проблема В.1. *Описать неабелевы простые группы, в которых подгруппы нечетных индексов пронормальны.*

Решение проблемы В.1 позволило бы, в частности, достичь прогресса в изучении пронормальности максимальных и субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп, которое, в свою очередь, является важной частью программы Х. Виланда, предложенной в 1979 г. на знаменитом Летнем институте по конечным группам в Санта-Крузе (см. [56, 4.7, 5.4, вопрос g], а также обзорную работу [20]).

Спектром группы называется множество всех порядков ее элементов. Две группы называются *изоспектральными*, если их спектры совпадают. Вопросы о строении группы, на спектр которой наложено некоторое ограничение, естественным образом возникают в теории конечных групп, начиная с конца XIX-го века. В 1900 г. У. Бернсайд [13] доказал, что группа, спектр которой состоит из числа 2 и нескольких нечетных чисел, либо является группой Фробениуса, либо изоморфна группе

$PSL_2(2^k)$ для некоторого k. Группы, в спектре которых есть число 2, но нет чисел вида $2n$, где n нечетно, были классифицированы М. Сузуки [46,47]. Позднее была доказана знаменитая теорема Фейта–Томпсона, утверждающая, что группа, в спектре которой нет четных чисел, является разрешимой [15].

Графом Грюнберга–Кегеля или *графом простых чисел* группы G называется обыкновенный граф, множеством вершин которого является простой спектр группы G, и две вершины в этом графе смежны тогда и только тогда, когда их произведение является порядком некоторого элемента группы G. Очевидно, что понятие графа Грюнберга–Кегеля обобщает понятие спектра группы.

В 1937 г. Б. Нойман [42] описал строение групп со спектром $\{1, 2, 3\}$, чем было положено начало изучению групп, не являющихся примарными группами, но имеющих элементы только примарных порядков. Последнее условие равносильно тому, что граф Грюнберга–Кегеля группы является кокликой. Г. Хигмэн [27] показал, что группа с этим свойством либо разрешима, и ее простой спектр содержит не более двух различных простых чисел, либо имеет единственный неабелев композиционный фактор. Позднее М. Сузуки [47] нашел все простые группы с таким свойством.

Само понятие графа Грюнберга–Кегеля возникло в связи с изучением некоторых когомологических вопросов теории целочисленных групповых колец: было установлено, что разностный идеал целочисленного группового кольца разложим как модуль тогда и только тогда, когда граф Грюнберга–Кегеля группы несвязен (см. [19]). Позже К. Грюнберг и О. Кегель описали общее строение произвольной группы с несвязным графом Грюнберга–Кегеля, а все простые группы с таким условием были классифицированы Дж. Уильямсом [55] и А.С. Кондратьевым [5].

Группа G называется *распознаваемой по спектру*, если она определяется своим спектром с точностью до изоморфизма. Проблема распознаваемости групп по спектру исследуется с 80-х годов XX века. Она тесно связана с важным вопросом об изменении множества порядков элементов данной группы при переходе к собственному накрытию этой группы, который возникал, например, в связи с ослабленной проблемой Бернсайда еще в классической работе Ф. Холла и Г. Хигмана [25]. Определение параметров группы по порядкам ее элементов также применяется в вычислительной теории групп, а именно, при разработке так называемых black-box алгоритмов (см., например, обзорную работу [43]).

В. Ши и В. Д. Мазуровым [40] было показано, что количество групп, изоспектральных заданной группе G, бесконечно тогда и только тогда, когда одна из групп, изоспектральных G, содержит нетривиальную разрешимую нормальную подгруппу. Поэтому особенный интерес вызывает вопрос распознаваемости по спектру почти простых групп. Распознаваемостью группы по спектру занимались на протяжении трех десятков лет многие алгебраисты: В. Ши, Р. Брандль, Ш. Прэгер, В.Д. Мазуров, А.С. Кондратьев, А.В. Васильев, А.В. Заварницын, М.Р. Зиновьева (Алеева), О.А. Алексеева, М.А. Гречкосеева, А.А. Бутурлакин, И.Б. Горшков, А.М. Старолетов, М.А. Звездина и многие другие. В последнее время в этом направлении были достигнуты серьезные успехи. Например, А.В. Васильевым, М.А. Гречкосеевой и В.Д. Мазуровым [51] показано, что любая неабелева простая группа распознаваема по порядку и спектру. Более того, многие неабелевы простые группы распознаваемы по спектру (см., например, [17]).

С уже устоявшимся направлением распознавания группы по спектру связано новое направление распознавания группы по графу Грюнберга–Кегеля. Легко понять, что группа, распознаваемая по графу Грюнберга–Кегеля, будет распознаваемой по спектру, и что обратное не верно. В 2003 г. М. Хаги [22] доказала распознаваемость по графу Грюнберга–Кегеля некоторых простых спорадических групп. В 2006 г. А.В. Заварнициным [57] была установлена распознаваемость по графу Грюнберга–Кегеля группы $G_2(7)$ и групп Ри ${}^2G_2(q)$. Позднее в работах трех математиков Хосрави [30] и Заварницина [58] была доказана распознаваемость по графу Грюнберга–Кегеля группы $PSL_{16}(2)$, что явилось первым примером распознаваемой по графу группы со связным графом Грюнберга–Кегеля.

В связи с исследованием распознаваемости группы по графу Грюнберга–Кегеля возникло общее направление исследования свойств группы по свойствам ее графа Грюнберга–Кегеля (см. обзорные работы [6, 33]). В частности, возник вопрос совпадения графов Грюнберга–Кегеля неизоморфных групп. Этот вопрос решался ранее в работах различных авторов. Так, А.В. Заварницин [57] показал, что единственная группа, граф Грюнберга–Кегеля которой имеет шесть компонент связности — это простая спорадическая группа J_4. Таким образом, группа J_4 однозначно определяется изоморфным типом своего графа Грюнберга–Кегеля. Естественным образом встает вопрос существования других групп, которые однозначно определяются изоморфным типом своего графа Грюнберга–Кегеля.

М. Хаги [22] описала простые группы с графом Грюнберга–Кегеля как у простых спорадических групп. А.В. Васильевым в "Коуровскую тетрадь" [50] был записан вопрос под номером 16.26: *Существует ли такое натуральное число k, что никакие k попарно неизоморфных неабелевых простых групп не могут иметь один и тот же граф Грюнберга–*

Кегеля? В рамках решения этого вопроса М.А. Звездиной [1] было получено описание случаев совпадения графов Грюнберга–Кегеля простой группы и знакопеременной группы. М.Р. Зиновьевой [2] описаны случаи совпадения графов Грюнберга–Кегеля простых групп лиева типа над полями одной характеристики, затем в серии работ [3, 4] получено продвижение в решении того же вопроса для групп лиева типа над полями разных характеристик.

На Международной конференции по теории групп, посвященной 70-летию В.Д. Мазурова (г. Новосибирск, июль 2013 г.), К. Паркер сформулировал следующую проблему.

Проблема C.1. *Исследовать случаи совпадения графов Грюнберга–Кегеля неабелевой простой группы и ее собственной подгруппы.*

В работе [40] было показано, что для любого конечного множества ω натуральных чисел существует натуральное число $k = k(\omega)$ такое, что любая группа G со свойством $\omega(G) = \omega$, содержит подгруппу H такую, $\omega(H) = \omega$ и $|H| < k$. В связи с этим результатом в [40] было введено понятие ω-критической группы, а также было показано, что для любого конечного множества ω натуральных чисел количество ω-критических групп конечно.

Для данного множества ω натуральных чисел группа G называется *ω-критической*, если $\omega(G) = \omega$ и для любых подгрупп K и L группы G таких, что K — нормальная подгруппа в L, из равенства $\omega(L/K) = \omega$ следует, что $L = G$ и $K = 1$. Группу G, которая является ω-критической для некоторого множества ω (или, что то же самое, является $\omega(G)$-критической), естественно назвать *критической по спектру.*

По аналогии, группу G будем называть *критической по простому спектру*, если для любых подгрупп K и L группы G таких, что K — нормальная подгруппа в L, из равенства $\pi(L/K) = \pi$ следует, что $L = G$ и $K = 1$. Легко понять, что группа, критическая по простому спектру, будет также критической по спектру и минимальной относительно простого спектра. Естественным образом возникает вопрос: *при каких дополнительных условиях группа, минимальная относительно простого спектра, будет критической по простому спектру?*

В [40] была поставлена проблема описания всех ω-критических групп для заданного множества чисел ω, а также сформулирована

Проблема C.2. *Верно ли, что простая группа G, не изоморфная $P\Omega_8^+(2)$ и $P\Omega_8^+(3)$, является $\omega(G)$-критической?*

Заметим, что тот факт, что группы $P\Omega_8^+(2)$ и $P\Omega_8^+(3)$ не являются критическими по спектру, следует, например, из основного результата работы [14].

М.С. Лучидо [38, теорема 1][2] было замечено, что графы Грюнберга–Кегеля разрешимых групп не содержат 3-коклик в качестве индуцированных подграфов. В [18] было показано, что граф изоморфен графу Грюнберга–Кегеля разрешимой группы тогда и только тогда, когда он не содержит 3-коклик в качестве индуцированных подграфов, и его дополнение 3-раскрашиваемо. Таким образом, класс графов Грюнберга–Кегеля разрешимых групп имеет комбинаторную характеризацию.

В 2012 г. М.Р. Зиновьевой и В.Д. Мазуровым [59, теоремы 1, 3] описаны неабелевы простые группы с графом Грюнберга–Кегеля как у разрешимой группы Фробениуса или 2-фробениусовой группы. Несложно показать, что этими группами исчерпываются все простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых равны графам Грюнберга–Кегеля разрешимых групп (граф Грюнберга–Кегеля любой такой группы будет объединением двух непересекающихся клик). Естественным образом возникает следующая

Проблема C.3. *Существует ли граф, не содержащий 3-коклик в качестве индуцированных подграфов, который изоморфен графу Грюнберга–Кегеля некоторой неразрешимой группы, и не изоморфен графу Грюнберга–Кегеля никакой разрешимой группы*?

Эта проблема была записана автором диссертации в "Коуровскую тетрадь" [50] под номером 19.52. Отрицательное решение проблемы C.3 продемонстрировало бы, что класс графов Грюнберга–Кегеля неразрешимых групп также имеет некоторую комбинаторную характеризацию.

Цели и задачи диссертации Основная цель диссертации — получение новой информации о строении конечных групп в зависимости от их арифметических свойств.

Для достижения этой цели планируется решить следующие задачи:

1. Получить исчерпывающее решение проблем A.1, A.2 и A.3.

2. Исследовать гипотезу A.2 для групп с холловыми максимальными подгруппами. Исследовать свойства минимального контрпримера к гипотезе A.2. Получить критерий того, что минимальная относительно простого спектра группа является критической по простому спектру.

3. Разработать методы для решения проблем A.4 и A.5.

4. Разработать методы проверки пронормальности подгруппы нечетного индекса в конечной группе и получить полное решение проблемы B.1 в классе конечных простых групп, силовские 2-подгруппы которых содержат свои централизаторы в группе.

5. Получить исчерпывающее решение проблемы C.1.

---

[2] Этот результат был получен М.С. Лучидо в 1999 г., однако он непосредственно следует из более ранних результатов Г. Хигмана [27, теорема 1] и теоремы Холла [23].

6. Получить (отрицательное) решение проблемы С.2. Получить исчерпывающее описание конечных простых групп, не являющихся критическими по спектру.

7. Получить решение проблемы С.3 в классе конечных почти простых групп.

Методы исследования. В работе используются методы теории конечных групп, теории групп лиева типа, теории групп подстановок, теории представлений конечных групп, а также элементы теории чисел. Большинство основных результатов диссертации получены с использованием классификации конечных простых групп.

Важным инструментом исследования в диссертации является классификация максимальных подгрупп нечетных индексов в простых группах, полученная независимо в работах М. Либека и Я. Саксла [37] и У. Кантора [28] и завершенная автором диссертации. В работах [37] и [28] были представлены списки подгрупп почти простых групп, которые могут являться максимальными подгруппами нечетных индексов. Однако, если цоколь почти простой группы является знакопеременной группой или классической группой над полем нечетной характеристики, то ни в работе [37], ни в работе [28] нет описания того, какие из указанных подгрупп в точности являются максимальными подгруппами нечетных индексов. Таким образом, проблема полной классификации максимальных подгрупп нечетных индексов почти простых групп оставалась открытой. Классификация максимальных подгрупп нечетных индексов в почти простых группах со знакопеременным цоколем и с простым классическим цоколем степени не менее 13 над полем нечетной характеристики стала основным результатом кандидатской диссертации автора [82]. На самом деле, автором диссертации в [86] для всех простых классических групп над полями нечетных характеристик была получена полная классификация их максимальных подгрупп нечетных индексов, однако для доказательства этого результата использовались результаты диссертации П. Клейдмана [31] о максимальных подгруппах простых классических групп степени не более 12. К сожалению, работа [31] содержит ряд неточностей, которые были исправлены в [11] Дж. Браем, Д. Холтом и К. Рони-Дугал. С учетом этих результатов автором диссертации в [71] была проведена ревизия результатов работы [86], и результаты ревизии включены в настоящую диссертацию.

Также по итогам ревизионной работы автором диссертации и ее студентом К.А. Якуниным была создана программа для ЭВМ [79], которая по задаваемой конечной неабелевой простой классической группе над полем нечетной характеристики вычисляет изоморфные типы ее максимальных подгрупп нечетных индексов.

Основные результаты диссертации. В диссертации основными считаются следующие результаты.

1. Доказано, что неабелевы композиционные факторы конечной группы с холловыми максимальными подгруппами с точностью до изоморфизма исчерпываются группами $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ и $PSL_5(2)$, тем самым получено исчерпывающее решение проблемы 17.92 из "Коуровской тетради", получено полное описание нормального строения конечных групп с холловыми максимальными подгруппами, доказаны дополняемость максимальных подгрупп в таких группах и порождаемость таких групп парой сопряженных элементов. Получено описание неабелевых композиционных факторов конечной группы, в которой все максимальные подгруппы нечетных индексов холловы.

2. Разработаны методы исследования нормального строения конечной минимальной относительно простого спектра группы. Исследованы неабелевы композиционные факторы минимальных относительно простого спектра групп и свойства нормальных рядов в таких группах. Получена характеризация конечных групп, критических по простому спектру.

3. Построен пример конечной неабелевой простой группы, содержащей непронормальную подгруппу нечетного индекса. Получен критерий пронормальности добавлений к абелевой подгруппе в конечной группе. Получены критерии пронормальности подгрупп нечетных индексов в некоторых расширениях конечных групп. Исследована пронормальность подгрупп нечетных индексов в прямом произведении сплетений абелевой группы с помощью симметрических групп и в прямом произведении симплектических групп размерностей, равных степеням числа 2. С помощью классификации максимальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых группах получена классификация конечных неабелевых простых групп, в которых все подгруппы нечетных индексов пронормальны и силовская 2-подгруппа содержит свой централизатор в группе.

4. Получено описание всех случаев совпадения графов Грюнберга–Кегеля и всех случаев совпадения спектров конечной неабелевой простой группы и ее собственной подгруппы и, как следствие, получено описание всех конечных неабелевых простых групп, которые не являются критическими по спектру.

5. Построен новый пример конечной группы, которая однозначно характеризуется изоморфным типом своего графа Грюнберга–Кегеля. Получен критерий изоморфизма графа Грюнберга–Кегеля конечной почти простой группы графу Грюнберга–Кегеля некоторой разрешимой группы. Описаны конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля

которых не содержат 3-коклик в качестве индуцированных подграфов.

Научная новизна и значимость работы. Работа носит теоретический характер. Все основные результаты являются новыми.

В работе получено решение проблемы 17.92 из "Коуровской тетради" [50], широко обобщены результаты В.С. Монахова [41] о нормальном строении π-разрешимых групп с холловыми максимальными подгруппами на случай неразрешимых групп с холловыми максимальными подгруппами, подтверждена гипотеза о дополняемости максимальных подгрупп в группах с холловыми максимальными подгруппами, сформулированная Т.В. Тихоненко и В.Н. Тютяновым в [7], и получено частичное подтверждение гипотезы 17.125 из "Коуровской тетради" [50], сформулированной П. Шумяцким. Методы исследования нормального строения минимальной относительно простого спектра группы, разработанные в параграфе 2.2 диссертации, и результаты о нормальном строении минимальных относительно простого спектра групп из главы 2, а также полученная характеризация критических по простому спектру групп будут полезны для дальнейшего изучения этой гипотезы. Кроме того, методы, разработанные в параграфе 2.2, могут быть перенесены на другие классы групп с арифметическими ограничениями на максимальные подгруппы. Например, результаты о неабелевых композиционных факторах, подобные результатам для групп с холловыми максимальными подгруппами, были получены В.А. Ведерниковым [54] для класса групп, в которых каждая неразрешимая максимальная подгруппа холлова, а также Е.Н. Бажановой (Деминой) и автором диссертации [83] для класса групп, в которых каждая неразрешимая максимальная подгруппа имеет примарный индекс.

В настоящей диссертации получено существенное продвижение на пути получения классификации неабелевых простых групп, в которых все подгруппы нечетных индексов пронормальны. Полное решение этой проблемы позволило бы, как уже упоминалось выше, достичь прогресса в изучении пронормальности максимальных и субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп, которое является важной частью программы Х. Виланда [56, 4.7, 5.4, вопрос g]. Кроме того, в настоящей диссертации разработаны подходы для проверки пронормальности подгруппы нечетного индекса в непростой группе.

Описание всех случаев совпадения графов Грюнберга–Кегеля простой группы и ее собственной подгруппы дает исчерпывающий ответ на вопрос К. Паркера и будет полезно для продолжения исследования распознаваемости групп по графу Грюнберга–Кегеля. Аналогичный результат был получен независимо Т. Бернессом и Э. Ковато [12] из Великобритании на несколько месяцев позднее. Описание всех простых групп, которые не являются критическими по спектру, дает исчерпывающий ответ на вопрос, сформулированный В.Д. Мазуровым и В. Ши [40]. Критерий изоморфизма графа Грюнберга–Кегеля почти простой группы графу Грюнберга–Кегеля некоторой разрешимой группы дает решение в классе почти простых групп и инструменты для продолжения исследования проблемы 19.52 из "Коуровской тетради" [50].

Кроме того, результаты о максимальных подгруппах нечетных индексов в простых классических группах, ревизия которых была проведена в связи с исследованиями, проводимыми в настоящей диссертации, стали полезным инструментом исследований, например, вопроса получения факторизаций конечных групп [29].

Таким образом, результаты диссертации и разработанные в ней методы могут быть использованы для дальнейших исследований строения конечных групп в зависимости от их арифметических свойств. Они могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Апробация результатов работы. Результаты докладывались более чем на пятидесяти конференциях и семинарах, в том числе: Международной конференции по алгебре и геометрии, посвященная 80-летию со дня рождения А.И. Старостина (Екатеринбург, 22–27 августа 2011 г.), Международной конференции "Finite Groups and Their Automorphisms" (Турция, Стамбул, 6–11 июня 2011 г.), Международной конференции по теории групп, посвященной 70-летию В.Д. Мазурова (Новосибирск, 16–20 июля 2013 г.), Международной конференции "Groups St Andrews 2013" (Великобритания, Сент-Эндрюс, 3–11 августа 2013 г.), Международной конференции "Groups and Graphs, Algorithms and Automata" (Екатеринбург, 9–15 августа 2015 г.), 5-м объединенном семинаре Университета Науки и Технологий Китая и Университета Анхоя "5th USTC-AHU Joint seminar" (Китай, Хефей, 26 марта 2016 г.), Семинаре "Теория групп" (Новосибирск, 11 апреля 2016 г.), Семинаре "Алгебра и логика" (Новосибирск, 12 апреля 2016 г. и 11 сентября 2018 г.), Международной конференции "Graphs and Groups, Spectra and Symmetries" (Новосибирск, 15–28 августа 2016 г.), Международной конференции "International Workshop on Algebraic Combinatorics At Anhui University" (Китай, Хефей, 28–31 октября 2016 г.), Исследовательском семинаре "Raziskovalni matematicni seminar FAMNIT UP" (Словения, Копер, 16 апреля 2015 г. и 7 ноября 2016 г.), Международной конференции "Conference on Geometric and Combinatorial Methods in Group Theory in honor of Mark Sapir's 60th birthday" (США, Урбана, 16–18 мая 2017 г.), Международной конференции "Groups and Graphs, Metrics and Manifolds" (Екатеринбург, 22–30 июля 2017 г.) Международной конференции "Groups St Andrews 2017" (Великобритания, Бирмингем, 5–13 августа 2017 г.), Международной конференции "Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics" (Южная Корея, Пусан, 8–10 февраля 2018 г.), Международной конференции "Ischia Group Theory 2018" (Италия, Искья, 19–23 марта 2018 г.), XII школе-конференции по теории групп, посвященной 65-летию А.А. Махнева (Геленджик, 13–20 мая 2018 г.), Международной конференции "International Workshop on Groups, Representations and Related Topics (2018 IWGRR)" (Китай, Чунцин, 17–20 мая 2018 г.), Международных конференциях "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016 и 2017 гг.), Международных (всероссийских) молодежных школах-конференциях "Современные проблемы математики" (Екатеринбург, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015 и 2016 гг.), Алгебраическом семинаре ИММ УрО РАН "Алгебра и алгебраическая комбинаторика" (Екатеринбург, 2011–2017 гг.), Семинаре УрФУ "Алгебраические системы" (Екатеринбург, 2011–2017 гг.), Научно-исследовательском семинаре по алгебре Кафедры высшей алгебры МГУ (29 октября 2018 г.).

Публикации. Результаты работы и их доказательства, а также разработанные в диссертации методы опубликованы в рецензируемых научных изданиях [60–79], удовлетворяющих требованиям, предъявляемым Положением о присуждении ученых степеней.

Работы [64, 65, 68–72] написаны автором диссертации без соавторов. Работы [74–78] написаны в нераздельном соавторстве с Д.О. Ревиным. Работы [62, 63, 66, 67] написаны в нераздельном соавторстве с А.С. Кондратьевым и Д.О. Ревиным. Работа [61] написана в нераздельном соавторстве с В. Го и Д.О. Ревиным. Работа [73] написана в нераздельном соавторстве с Д. Пагоном. Ключевые идеи доказательства лемм 11–14 из этой работы, результаты из которых вошли в доказательство теоремы 22 настоящей диссертации, принадлежат автору диссертации. Работа [60] написана в соавторстве с И.Б. Горшковым. В этой работе постановка задачи, гипотеза об ответе и ключевые идеи доказательств теорем принадлежат автору диссертации, а детальная проработка доказательств получена автором диссертации в нераздельном соавторстве с И.Б. Горшковым. Программа для ЭВМ [79] была создана автором диссертации и К.А. Якуниным. При этом автором диссертации был разработан алгоритм поиска списка изоморфных типов максимальных подгрупп нечетных индексов в простых классических группах над полями нечетных характеристик, а К. А. Якунин под руководством автора диссертации получил программную реализацию разработанного алгоритма на языках программирования C# и C++.

Также автором диссертации опубликовано около пятидесяти тезисов докладов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 210 страниц. Библиографический список содержит 155 наименований.

Краткое содержание работы

Во **Введении** приводится обзор исследований по проблематике, которой посвящена диссертация, и формулируются ее основные проблемы и результаты.

Первая глава, в основном, носит вспомогательный характер. В ней приводятся используемые понятия и обозначения, или же даются соответствующие ссылки. Также в первой главе приводятся вспомогательные результаты из теории чисел, теории конечных полей и линейной алгебры и предварительные результаты из теории групп, которые будут использоваться в доказательствах основных результатов диссертации. Кроме того, в этой главе приводится ревизия классификации максимальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых классических группах (**Теорема 1**), которая является важным инструментом исследований для параграфа 2.4 второй главы и для третьей главы.

Вторая глава посвящена исследованию нормального строения групп с холловыми максимальными подгруппами и минимальных относительно простого спектра групп.

Решение проблемы А.1 (см. [50, проблема 17.92]) дает

Теорема 2. *Неабелевы композиционные факторы группы с холловыми максимальными подгруппами исчерпываются группами* $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ *и* $PSL_5(2)$.

Теорему 2 удалось доказать, во многом, за счет рассмотрения с использованием теоремы 1 "больших" подгрупп четного порядка и четного индекса в простых группах. В **Теореме 3** получен ответ на вопрос (*) в случае, когда множество π совпадает со множеством всех нечетных простых чисел. Решение проблемы А.2 дает

Теорема 4. В группе G все максимальные подгруппы холловы тогда и только тогда, когда G обладает нормальным рядом[3]

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_n = 1$$

таким, что:

(1) при $i > 1$ группа $V_i = G_{i-1}/G_i$ является элементарной абелевой, изоморфной некоторой силовской подгруппе группы G (в частности, все подгруппы G_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, являются холловыми), и действие сопряжениями группы G/G_i на V_i как на векторном пространстве неприводимо;

(2) для факторгруппы $\bar{G} = G_0/G_1 = G/G_1$ справедливо одно из следующих утверждений:

(а) $\bar{G}$ имеет простой порядок;
(б) $\bar{G} \simeq PSL_5(2)$;
(в) $\bar{G} \simeq PSL_2(11)$;
(г) $\Phi(\bar{G})$ — 3-группа и $\bar{G}/\Phi(\bar{G}) \cong PSL_2(7)$.

В параграфе 2.2 были разработаны общие методы исследования нормального строения минимальной относительно простого спектра группы, а затем теорема 4 была доказана с помощью применения этих методов к подклассу групп с холловыми максимальными подгруппами.

С помощью теоремы 4 в **Теореме 5** получено положительное решение проблемы A.3, а именно, доказано, что максимальные подгруппы дополняемы в группах с холловыми максимальными подгруппами; тем самым была подтверждена гипотеза, высказанная в [7]. Утверждение, обратное к теореме 5, не верно, поэтому представляет интерес проблема изучения неабелевых композиционных факторов группы с дополняемыми максимальными подгруппами, записанная автором диссертации и Д.О. Ревиным в "Коуровскую тетрадь" [50] под номером 18.68.

Эквивалентность гипотез A.1 и A.2 была доказана в лемме 2.7.1, более того, было показано, что контрпример наименьшего порядка к любой из гипотез A.1 или A.2 является также минимальным контрпримером и к другой. В предложении 2.1.6 показано, что контрпример наименьшего порядка к гипотезе A.2 является группой, критической по простому спектру. В **Теореме 6** показано, что любая минимальная относительно простого спектра группа, неабелевы композиционные факторы которой исчерпываются группами $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ и $PSL_5(2)$, порождается двумя сопряженными элементами, в частности, любая группа с холловыми максимальными подгруппами порождается двумя сопряженными элементами.

[3]Отметим, что, хотя факторы G_{i-1}/G_i являются главными при $i > 1$, сам этот ряд не является, вообще говоря, главным, поскольку факторгруппа G_0/G_1 может оказаться непростой группой.

В **Теореме 7** показано, что минимальная относительно простого спектра группа G является группой, критической по простому спектру, если, и только если ее подгруппа Фиттинга $F(G)$ является холловой подгруппой в G.

Большой массив простых групп входит в класс групп, минимальных относительно простого спектра, как это вытекает из результата М. Либека, Ш. Прэгер и Я. Саксла [36]. Однако *a priori* для оставшихся простых групп не исключена ситуация, когда данная группа может быть изоморфна композиционному фактору некоторой минимальной относительно простого спектра группы. В **Теореме 8** показано, что среди неабелевых композиционных факторов минимальных относительно простого спектра групп нет групп, изоморфных следующим простым группам: спорадические группы M_{11}, M_{12}, M_{24}, HS, Co_3, Co_2 и группа Титса ${}^2F_4(2)'$; знакопеременные групп A_n при непростом n; группы $PSp_4(q)$, где q нечетно; группы $PSp_{2m}(q)$, где $m \geq 4$ и q четны; группы $P\Omega_{2m+1}(q)$, где $m \geq 4$ четно и q нечетно; простые группы лиева типа $PSU_3(3)$, $PSU_4(2)$, $PSU_5(2)$, $PSp_6(2)$, $PSL_6(2)$, $G_2(3)$.

Заметим, что простая группа S изоморфна композиционному фактору некоторой группы с холловыми максимальными подгруппами тогда и только тогда, когда все максимальные подгруппы S холловы. Соответствующее утверждение для класса групп, минимальных относительно простого спектра, не верно: **в Теореме 9** показано, что спорадическая группа Маклафлина McL не является минимальной относительно простого спектра, но изоморфна композиционному фактору подходящей минимальной относительно простого спектра группы. Кроме того, в теореме 9 исследовано нормальное строение минимальной относительно простого спектра группы, имеющей композиционный фактор, изоморфный группе McL.

Проблема изоморфизма неабелеву композиционному фактору некоторой минимальной относительно простого спектра группы пока остается открытой для следующих простых групп: $P\Omega^+_{4k}(q)$, $PSp_4(2^w)$, $PSU_3(5)$, $PSU_4(3)$ и $PSU_6(2)$. Следует отметить также, что класс групп, минимальных относительно простого спектра, богаче, чем класс групп с холловыми максимальными подгруппами. Например, группа с холловыми максимальными подгруппами не может быть почти простой, но не простой, а неразрешимая группа с холловыми максимальными подгруппами имеет ровно один неабелев композиционный фактор. Однако, легко показать, что группы $PSL_2(13) \times PSL_2(19)$ и $Aut(PSL_2(32))$ минимальны относительно простого спектра.

Тем не менее, свойства одного из композиционных факторов могут строго определить структуру минимальной относительно простого спектра группы. В **Теореме 10** было исследовано нормальное строение минимальной относительно простого спектра группы, имеющей неабелев композиционный фактор, порядок которого делится ровно на 3 различные простые числа. Заметим, что большинство результатов второй главы получено с помощью классификации конечных простых групп, однако доказательство теоремы 10 от нее не зависит.

Во второй главе теоремы 1, 7 и 10 получены автором диссертации лично, все остальные результаты — в нераздельном соавторстве с Д.О. Ревиным.

Третья глава посвящена исследованию пронормальности подгрупп нечетных индексов в конечных группах.

В **Теореме 11** было показано, что все подгруппы нечетных индексов пронормальны в любой простой группе, изоморфной одной из следующих групп: знакопеременной группе A_n, $n \geq 5$; одной из 26 спорадических групп; группе лиева типа на полем характеристики 2; $PSL_{2^n}(q)$; $PSU_{2^n}(q)$; $PSp_{2n}(q)$, где $q \not\equiv \pm 3 \pmod 8$; ортогональной группе; исключительной группе лиева типа, отличной от $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$. Таким образом, гипотеза B.1 была подтверждена для всех неабелевых простых групп, за исключением $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$, где q во всех случаях нечетно и n не является степенью числа 2, а также $PSp_{2n}(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$.

В **Теореме 12** показывается, что простая группа $PSp_{6n}(q)$ для любого $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса. Таким образом, гипотеза B.1 опровергается. Важным инструментом в доказательстве теоремы 12 является следующая теорема, дающая критерий пронормальности добавлений к абелевым нормальным подгруппам и представляющая самостоятельный интерес.

Теорема 13. *Пусть H и V — подгруппы группы G такие, что V — абелева нормальная подгруппа в G и $G = HV$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) *подгруппа H пронормальна в G;*

(2) *$U = N_U(H)[H, U]$ для любой H-инвариантной подгруппы $U \leq V$.*

С помощью классификации максимальных подгрупп нечетных индексов в простых классических группах из теоремы 1 в **Теореме 14** показано, что любая группа $PSp_{2n}(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и n не является числом вида 2^w или $2^w(2^{2k} + 1)$, содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса; более того, в **Теореме 15** показано, что подгруппы нечетных индексов пронормальны в группах $PSp_{2n}(q)$, где $n = 2^w$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$.

При попытках использовать индукцию в изучении проблемы B.1 для классических групп возникает вопрос, при каких условиях все подгруппы нечетных индексов пронормальны в группе, у которой этим свойством обладают факторы некоторого субнормального ряда? Типичной оказывается следующая ситуация: в простой классической группе G подгруппа H нечетного индекса и элемент g из нормализатора в G силовской 2-подгруппы S из H одновременно содержатся в некоторой максимальной в G подгруппе M, поэтому для доказательства пронормальности подгруппы H достаточно установить, что подгруппы нечетных индексов пронормальны в M. Классификация максимальных подгрупп нечетных индексов в простых классических группах из теоремы 1, вместе с индукционным предположением гарантируют, как правило, что во всех композиционных факторах группы M их подгруппы нечетных индексов пронормальны. Более того, сама группа M часто оказывается прямым или центральным произведением групп, в которых их подгруппы нечетных индексов пронормальны, или же сплетением некоторой такой группы с помощью симметрической группы, в которой подгруппы нечетных индексов также пронормальны. Однако, сложность состоит в том, что свойство "все подгруппы нечетных индексов пронормальны" не переносится ни на нормальные подгруппы, ни даже на такой простейший случай расширений, как прямые произведения, такие примеры построены в предложении 3.1.4.

Следующие два утверждения дают критерии пронормальности надгрупп силовских p-подгрупп в расширениях конечных групп и представляют независимый интерес.

Теорема 16. *Пусть p — простое число, и группа G обладает нормальной подгруппой A такой, что надгруппы силовских p-подгрупп пронормальны в A, а силовские p-подгруппы самонормализуемы в G/A. Пусть T — силовская p-подгруппа в A. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *все надгруппы силовских p-подгрупп пронормальны в G*;

(2) *все надгруппы силовских p-подгрупп пронормальны в $N_G(T)/T$.*

Теорема 17. *Пусть p — простое число, и группа G обладает нормальной подгруппой A такой, что надгруппы силовских p-подгрупп пронормальны в A и в G/A. Пусть T — силовская p-подгруппа в A и*

$$\overline{} : G \to G/A \text{ — естественный эпиморфизм.}$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) *все надгруппы силовских p-подгрупп пронормальны в G*;

(2) *все надгруппы силовских p-подгрупп пронормальны в $N_G(T)/T$, и для любой подгруппы $H \leq G$, содержащей некоторую силовскую p-подгруппу группы G, верно равенство $\overline{N_G(H)} = N_{\overline{G}}(\overline{H})$.*

Отметим, что теорема 16 является важным частным случаем теоремы 17. С помощью теоремы 16 и теоремы 1 в **Теореме 18** рассматривается последний неразобранный случай симплектических групп, а именно, показывается, что подгруппы нечетных индексов пронормальны в группах $PSp_{2n}(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и $n = 2^m(2^{2k}+1)$ для целого неотрицательного числа m и натурального числа k. Таким образом, из теорем 11, 14, 15 и 18 и из [34, теорема 7] следует

Теорема 19. *Пусть G — простая группа, силовская 2-подгруппа которой содержит свой централизатор в группе. Тогда выполняется в точности одно из следующих утверждений*:

(1) *все подгруппы нечетных индексов пронормальны в G*;

(2) *$G \cong PSp_{2n}(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и n не является числом вида 2^m или $2^m(2^{2k}+1)$ для целых неотрицательных чисел m и k.*

Важными инструментами в доказательстве теоремы 18 стали два следующих результата, представляющие независимый интерес. В **Теореме 20** получен критерий пронормальности всех подгрупп нечетных индексов в группе $G = \prod\limits_{i=1}^{t}(A \wr S_{n_i})$, где A — абелева группа и все сплетения являются естественными подстановочными. В **Теореме 21** показана пронормальность всех подгрупп нечетных индексов в группе $G = \prod\limits_{i=1}^{t} PSp_{n_i}(q_i)$, где все n_i — степени числа 2 и все q_i нечетны.

Пусть A — нормальная подгруппа группы G и $H \leq A$. Хорошо известно, что если H пронормальна в G, то выполняется равенство $G = AN_G(H)$. В предложении 3.1.2 доказано, что верно и обратное, а именно, подгруппа H пронормальна в G тогда и только тогда, когда H пронормальна в A и $G = AN_G(H)$.

Если предположить, что A — минимальная нормальная подгруппа в непростой группе G, и все подгруппы нечетных индексов пронормальны в A, то предложение 3.1.2, теоремы 13 и 17 позволяют провести редукцию проблемы проверки пронормальности подгруппы нечетного индекса в G к проблеме проверки пронормальности некоторой подгруппы нечетного индекса в меньшей группе. Алгоритм такой редукции приведен в конце параграфа 3.1 настоящей диссертации. Поэтому представляет интерес проблема описания прямых произведений неабелевых простых групп, в которых все подгруппы нечетных индексов пронормальны, которая в силу предложения 3.1.4 не эквивалентна проблеме В.1. Теорема 21 является первым шагом на пути исследования этой проблемы.

В третьей главе теоремы 16, 17, 20 и 21 получены автором диссертации в нераздельном соавторстве с В. Го и Д.О. Ревиным, все остальные результаты — в нераздельном соавторстве с А.С. Кондратьевым и Д.О. Ревиным. Важным методом исследования в третьей главе является завершенная автором диссертации классификация максимальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых группах, полученная в теореме 1.

Четвертая глава посвящена исследованию строения группы по свойствам ее графа Грюнберга–Кегеля.

В **Теореме 22** доказывается, что если граф Грюнберга–Кегеля группы G изоморфен как абстрактный граф графу Грюнберга–Кегеля группы ${}^2G_2(27)$, то $G \cong {}^2G_2(27)$; более того, показывается, что если G — группа такая, что ее граф Грюнберга–Кегеля является двудольным графом с долями мощностей 1 и 5, то $\pi(G) = \{2, 3, 7, 13, 19, 37\}$ и $G/O_2(G) \cong {}^2G_2(27)$. Таким образом, построен новый пример группы, однозначно характеризующейся изоморфным типом своего графа Грюнберга–Кегеля.

В **Теореме 23** получено описание всех случаев совпадения графов Грюнберга–Кегеля неабелевой простой группы G и ее собственной подгруппы, что дает исчерпывающее решение проблемы С.1. В случае, если G — знакопеременная группа, результат получен по модулю расширенной бинарной гипотезы Гольдбаха [26, с. 32, гипотеза А, с. 38], для других простых групп результат не зависит от справедливости этой гипотезы.

Проблема С.2 решена отрицательно, а именно, доказана следующая

Теорема 24. *Пусть G — конечная простая группа, K и L — подгруппы в G такие, что K — нормальная подгруппа в L. Тогда $\omega(L/K) = \omega(G)$, если, и только если $K = 1$ и либо $L = G$, либо выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $G = PSp_4(q)$ *и* $L \cong PSL_2(q^2)\langle t\rangle$, *где q четно и t — внешний автоморфизм порядка 2 группы* $PSL_2(q^2)$;

(2) $G = PSp_8(q)$ *и* $L \cong SO_8^-(q)$, *где q четно*;

(3) $G \cong P\Omega_8^+(2)$ *и* $L \cong P\Omega_7(2)$;

(4) $G \cong P\Omega_8^+(3)$ *и* $L \cong P\Omega_7(3)$.

Заметим, что хотя результаты, полученные в теореме 23, используются в доказательстве теоремы 24, доказательство теоремы 24 не зависит от справедливости расширенной бинарной гипотезы Гольдбаха ввиду распознаваемости по спектру простых знакопеременных групп A_n при $n \notin \{6, 10\}$, доказанной в [16].

Решение проблемы С.3 в классе почти простых групп дает

Теорема 25. *Пусть G — почти простая группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *граф Грюнберга–Кегеля группы G не содержит* 3*-коклик в качестве индуцированных подграфов*;

(2) *граф Грюнберга–Кегеля группы G изоморфен графу Грюнберга–Кегеля некоторой разрешимой группы*;

(3) *граф Грюнберга–Кегеля группы G равен графу Грюнберга–Кегеля некоторой разрешимой группы.*

Ключевым инструментом доказательства теоремы 25 является полученное в **Теореме 26** описание всех почти простых групп, графы Грюнберга–Кегеля которых не содержат 3-коклик в качестве индуцированных подграфов, которое представляет независимый интерес.

В четвертой главе теоремы 23 и 24 получены автором диссертации лично. Результат, аналогичный теореме 23, был позднее независимо получен Т. Бернессом и Э. Ковато [12]. Теорема 22 получена в соавторстве с Д. Пагоном, ключевые идеи доказательства этой теоремы принадлежат автору диссертации. В теоремах 25 и 26 постановка задачи, гипотеза об ответе и ключевые идеи доказательств теорем принадлежат автору диссертации, а детальная проработка доказательств получена автором диссертации в нераздельном соавторстве с И.Б. Горшковым.

В **Заключении** сформулированы основные результаты работы, а также приведены предполагаемые направления дальнейшего применения этих результатов.

В **Приложении А** приведено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [79].

Благодарности

Я благодарю своего научного консультанта д. ф.-м. н. А.С. Кондратьева за сотрудничество и поддержку. Также я благодарна своему соавтору д. ф.-м. н. Д.О. Ревину за неизменную поддержку и научное сотрудничество. Я благодарю д. ф.-м. н. В.В. Кабанова за ценные замечания, позволившие улучшить текст диссертации. Я благодарна всем сотрудникам и аспирантам отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН, всем сотрудникам и аспирантам кафедры алгебры и фундаментальной информатики УрФУ, всем сотрудникам и аспирантам лаборатории теории групп ИМ СО РАН, и особенно к. ф.-м. н. А.А. Бутурлакину, д. ф.-м. н. А.В. Васильеву, д. ф.-м. н. Е.П. Вдовину, д. ф.-м. н. М.А. Гречкосеевой, д. ф.-м. н. А.В. Заварницину и чл.-корр. РАН В.Д. Мазурову за их профессионализм, ценные научные консультации и за ту атмосферу, в которой была выполнена эта диссертация. Также я выражаю благодарность к. ф.-м. н. А.М. Старолетову за помощь в работе с системой "LaTex" во время оформления текста диссертации и к. ф.-м. н. Н.Ю. Одинцовой за полезные замечания к тексту автореферата.

Список литературы

[1] *Звездина М. А.* О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы // *Сиб. мат. журн.* — 2013. — Т. 54, N 1. — С. 54–76.

[2] *Зиновьева М. Р.* Конечные простые группы лиева типа над полем одной характеристики с одинаковым графом простых чисел // *Тр. ИММ УрО РАН.* — 2014. — Т. 20, N 2. — С. 168–182.

[3] *Зиновьева М. Р.* О конечных простых классических группах над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают // *Тр. ИММ УрО РАН.* — 2016. — Т. 22, N 3. — С. 101–116.

[4] *Зиновьева М. Р.* О конечных простых линейных и унитарных группах над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают. I // *Тр. ИММ УрО РАН.* — 2017. — Т. 23, N 4. — С. 136–151.

[5] *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // *Матем. сб.* — 1989. м Т.180, N 6. — С. 787–797.

[6] *Кондратьев А. С.* Граф Грюнберга–Кегеля конечной группы и его применения, Алгебра и линейная оптимизация. — ИММ УрО РАН, 2002. — *Тр. межд. семинара, посвящ. 90-летию со дня рожд. С.Н. Черникова.* — С. 141–158.

[7] *Тихоненко Т. В., Тютянов В. Н.* Конечные группы с максимальными холловыми подгруппами // *Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины.* — 2008. — Т. 5(50). — С. 198–206.

[8] *Тютянов В. Н.* Конечные группы с дополняемыми подгруппами // *Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины.* — 2006. — Т. 6. — С. 178–183.

[9] *Чунихин С. А.* О разрешимых группах // *Изв. НИИММ Том. унив.* — 1938. — Т. 2, N 2. — С. 220–223.

[10] *Babai L.* Isomorphism Problem for a Class of Point-Symmetric Structures // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* — 1977. — Vol. 29. — P. 329–336.

[11] *Bray J., Holt D., Roney-Dougal C.* The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2013. — Vol. 407 of *London Math. Soc. Lect. Note Ser.*

[12] *Burness T. C., Covato E.* On the prime graph of simple groups // *Bull. Australian Math. Soc.* — 2015. — Vol. 91, no. 2. — P. 227–240.

[13] *Burnside W.* On a class of groups of finite order // *Trans. Cambridge Phil. Soc.* — 1900. — Vol. 18. — P. 269–276.

[14] *Buturlakin A. A.* Isospectral finite simple groups // *Siberian Electron. Math. Reports.* — 2010. — Vol. 7. — P. 111–114.

[15] *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd order // *Pacific. J. Math.* — 1963. — Vol. 13. — P. 775–1029.

[16] *Gorshkov I. B.* Recognizability of alternating groups by spectrum // *Algebra and Logic.* — 2013. — Vol. 52, no. 1. — P. 41–45.

[17] *Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V.* On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups // *J. Group Theory.* — 2015. — Vol. 18, no. 5. — P. 741–759.

[18] *Gruber A. e. a.* A characterization of the prime graphs of solvable groups // *J. Algebra.* — 2015. — Vol. 422. — P. 397–422.

[19] *Gruenberg K. W., Roggenkamp K. W.* Decomposition of the augmentation ideal and of the relation modules of a finite group // *Proc. London Math. Soc.* (3). — 1975. — Vol. 31, no. 2. — P. 149–166.

[20] *Guo W., Revin D. O.* Pronormality and submaximal $\mathfrak{X}$-subgroups on finite groups // *Commun. in Math. and Statistics* — 2018. — P. 1–29.

[21] *Guralnick R. M., Malle G., Navarro G.* Self-normalizing Sylow subgroups // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 2003. — Vol. 132, no. 4. — P. 973–979.

[22] *Hagie M.* The prime graph of a sporadic simple group // *Comm. Algebra.* — 2003. — Vol. 31, no. 9. — P. 4405–4424.

[23] *Hall P.* A note on soluble groups // *J. London Math. Soc.* — 1928. — Vol. 3, no. 2. — P. 98–105.

[24] *Hall P.* A characteristic property of soluble groups // *J. London Math. Soc.* — 1937. — Vol. 12, no. 3. — P. 198–200.

[25] *Hall P., Higman G.* On the p-lenght of p-soluble groups and reduction theorem for Burnside's problem // *Proc. London Math. Soc. Ser. III.* — 1956. — Vol. 6, no. 21. — P. 286–304.

[26] *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some problems of 'partitio numerorum'; III: on the expression of a number as a sum of primes // *Acta Mathematica.* — 1922. — Vol. 44. — P. 1–70.

[27] *Higman G.* Finite groups in which every element has prime power order // *J. London Math. Soc.* (2). — 1957. — Vol. 32. — P. 335–342.

[28] *Kantor W. M.* Primitive permutation groups of odd degree, and an application to the finite projective planes // *J. Algebra.* — 1987. — Vol. 106, no. 1. — P. 15–45.

[29] *Kazarin L. S.* Group factorizations, graphs and characters of groups, Graphs and Groups, Spectra and Symmetries, 2016. Abstr. Int. Conf. and PhD-Master Sum. School on Graphs and Groups, Spectra and Symmetries. — Novosibirsk : Sobolev Inst. of Math., 2016. — P. 25–27.

[30] *Khosravi B., Khosravi B., Khosravi B.* A characterization of the finite simple group $L_{16}(2)$ by its prime graph // *Manuscripta math.* — 2008. — Vol. 126. — P. 49–58.

[31] *Kleidman P.* The subgroup structure of some finite simple groups. — Cambridge : Ph.D. thesis, Cambridge Univ., 1986.

[32] *Kondrat'ev A. S.* Normalizers of the Sylow 2-subgroups in finite simple groups // *Math. Notes.* — 2005. — Vol. 78, no. 3. — P. 338–346.

[33] *Kondrat'ev A. S.* Finite groups with given properties of their prime graphs // *Algebra and Logic.* — 2016. — Vol. 55, no. 1. — P. 77–82.

[34] *Kondrat'ev A. S., Mazurov V. D.* 2-Signalizers of finite simple groups // *Algebra and Logic.* — 2003. — Vol. 42, no. 5. — P. 333–348.

[35] *Levchuk V. M., Likharev A. G.* Finite simple groups with complemented maximal subgroups // *Siberian Math. J.* — 2006. — Vol. 47, no. 4. — P. 659–668.

[36] *Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.* Transitive subgroups of primitive permutation groups // *J. Algebra.* — 2000. — Vol. 234. — P. 291–361.

[37] *Liebeck M. W., Saxl J.* The primitive permutation groups of odd degree // *J. London Math. Soc.* — 1985. — Vol. 31, no. 2. — P. 250–264.

[38] *Lucido M. C.* The diameter of the prime graph of finite groups // *J. Group Theory.* — 1999. — Vol. 32, no. 2. — P. 157–172.

[39] *Lucchini A., Morigi M., Shumyatsky P.* Boundedly generated subgroups of finite groups // *Forum Mathematicum.* — 2012. — Vol. 24. — P. 875–887.

[40] *Mazurov V. D., Shi W. J.* A criterion of unrecognizability by spectrum for finite groups // *Algebra and Logic.* — 2012. — Vol. 51, no. 2. — P. 160–162.

[41] *Monakhov V. S.* Finite π-solvable groups whose maximal subgroups have the Hall property // *Math. Notes.* — 2008. — Vol. 84, no. 3. — P. 363–366.

[42] *Neumann B. H.* Groups whose elements have bounded orders // http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-12.2.195*J. Lond. Math. Soc.* — 1937. — Vol. 12. — P. 195–198.

[43] *O'Brien E.* Towards effective algorithms for linear groups // *Finite Geometries, Groups and Computation,* (*Colorado*) *September 2004.* — 2006. — P. 163–190.

[44] *Palfy P. P.* Isomorphism problem for relational structures with a cyclic automorphism // *Europ. J. Combinatorics.* — 1987. — Vol. 8. — P. 35–43.

[45] *Praeger C. E.* On transitive permutation groups with a subgroup satisfying a certain conjugacy condition // *J. Austral. Math. Soc.* — 1984. — Vol. 36. — P. 69–866.

[46] *Suzuki M.* Finite groups with nilpotent centralizers // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1961. — Vol. 99. — P. 425–470.

[47] *Suzuki M.* On a class of doubly transitive groups // *Ann. of Math.* (2). — 1962. — Vol. 75. — P. 105–145.

[48] *Sylow L.* Theoremes sur les groupes de substitutions // *Math. Ann.* — 1872. — Vol. 5, no. 4. — P. 584–594.

[49] University of Cambridge. — Phillip Hall lecture notes on group theory - Part 6, 1951-1967. — Access mode: http://omeka.wustl.edu/omeka/items/show/10788.

[50] Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook / Ed. by V. D. Mazurov, E.I. Khukhro. — 19 edition. — Novosibirsk : Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, Siberian Div., 2018. — arXiv:1401.0300v13 [math.GR].

[51] *Vasil'ev A. V., Grechkoseeva M. A., Mazurov V. D.* Characterization of the finite simple groups by spectrum and order // *Algebra and Logic.* — 2009. — Vol. 48, no. 6. — P. 385–409.

[52] *Vdovin E. P., Revin D. O.* Theorems of Sylow type // *Russian Math. Surveys.* — 2011. — Vol. 66, no. 5. — P. 829–870.

[53] *Vdovin E. P., Revin D. O.* Pronormality of Hall subgroups in finite simple groups // *Siberian Math. J.* — 2012. — Vol. 53, no. 3. — P. 419–430.

[54] *Vedernikov V. A.* Finite groups in which every nonsolvable maximal subgroup is a Hall subgroup // *Proc. Steklov Institute Math.* (*Suppl. issues*). — 2015. — Vol. 285, Suppl. 1. — P. 191–202.

[55] *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // *J. Algebra.* — 1981. — Vol. 69, no. 2. — P. 487–513.

[56] *Wielandt H.* Zusammengesetzte Gruppen: Hölder Programm heute, The Santa Cruz conf. on finite groups. — Providence RI : Amer. Math. Soc., 1980. — Vol. 422 of *Santa Cruz, 1979. Proc. Sympos. Pure Math. 37.* — P. 161–173.

[57] *Zavarnitsine A. V.* Recognition of the simple groups $U_3(q)$ by element orders // *Algebra and Logic.* — 2006. — Vol. 45, no. 2. — P. 106–116.

[58] *Zavarnitsine A. V.* Uniqueness of the prime graph of $L_{16}(2)$ // *Siberian Electron. Math. Reports.* — 2010. — Vol. 7. — P. 119–121.

[59] *Zinov'eva M. R., Mazurov V. D.* On finite groups with disconnected prime graph // *Proc. Steklov Institute Math.* (*Suppl. issues*). — 2013. — Vol. 283, Suppl. 1. — P. 139–145.

Работы автора в рецензируемых научных изданиях, в которых опубликованы результаты диссертации и их доказательства:

[60] *Горшков И. Б., Маслова Н. В.* Конечные почти простые группы с графами Грюнберга–Кегеля как у разрешимых групп // *Алгебра и логика.* — 2018. — Т. 57, N 2. — С. 175–196.

[61] *Го В., Маслова Н. В., Ревин Д. О.* О пронормальности подгрупп нечетных индексов в некоторых расширениях конечных групп // *Сиб. мат. журн.* — 2018. — Т. 59, N 4. — С. 773–790.

[62] *Кондратьев А. С., Маслова Н. В., Ревин Д. О.* О пронормальности подгрупп нечетного индекса в конечных простых группах // *Сиб. мат. журн.* — 2015. — Т. 56, N 6. — С. 1375–1383.

[63] *Кондратьев А. С., Маслова Н. В., Ревин Д. О.* О пронормальности подгрупп нечетных индексов в конечных простых симплектических группах // *Сиб. мат. журн.* — 2017. — Т. 58, N 3. — С. 599–610.

[64] *Маслова Н. В.* Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // *Сиб. мат. журн.* — 2012. — Т. 53, N 5. — С. 1065–1076.

[65] *Маслова Н. В.* Конечные группы с арифметическими ограничениями на максимальные подгруппы // *Алгебра и логика.* — 2015. — Т. 54, N 1. — С. 95–102.

[66] *Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O.* A pronormality criterion for supplements to abelian normal subgroups // *Proc. Steklov Institute Math.* (*Suppl. issues*). — 2017. — Vol. 296, Suppl. 1. — P. 145–150.

[67] *Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O.* On pronormal subgroups in finite simple groups // *Doklady Mathematics.* — 2018. — Vol. 98, no. 2. — P. 405–408.

[68] *Maslova N. V.* On the coincidence of Gruenberg–Kegel graphs of a finite simple group and its proper subgroup // *Proc. Steklov Institute Math.* (*Suppl. issues*). — 2015. — Vol. 288, Suppl. 1. — P. 129–141.

[69] *Maslova N. V.* Finite simple groups that are not spectrum critical // *Proc. Steklov Institute Math.* (*Suppl. issues*). — 2016. — Vol. 292, Suppl. 1. — P. S211–S215.

[70] *Maslova N. V.* On the finite prime spectrum minimal groups // *Proc. Steklov Institute Math.* (*Suppl. issues*). — 2016. — Vol. 295, Suppl. 1. — P. 109–119.

[71] *Maslova N. V.* Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups: Addendum // *Siberian Electron. Math. Reports.* — 2018. — Vol. 15. — P. 707–718.

[72] *Maslova N. V.* On the Gruenberg-Kegel graphs of finite groups. — Source of the Document CEUR Workshop Proceedings, 2016. — Vol. 1662. — P. 26–31.

[73] *Maslova N. V., Pagon D.* On the realizability of a graph as the Gruenberg–Kegel graph of a finite group // *Siberian Electron. Math. Reports.* — 2016. — Vol. 13. — P. 89–100.

[74] *Maslova N. V., Revin D. O.* Finite groups whose maximal subgroups have the Hall property // *Siberian Advances Math.* — 2013. — Vol. 23, no. 3. — P. 196–209.

[75] *Maslova N. V., Revin D. O.* Generation of a finite group with Hall maximal subgroups by a pair of conjugate elements // *Proc. Steklov Institute Math.* (*Suppl. issues*). — 2014. — Vol. 285, Suppl. 1. — P. 145–149.

[76] *Maslova N. V., Revin D. O.* On nonabelian composition factors of a finite group that is prime spectrum minimal // *Proc. Steklov Institute Math.* (*Suppl. issues*). — 2014. — Vol. 287, Suppl. 1. — P. 116–127.

[77] *Maslova N. V., Revin D. O.* Nonabelian composition factors of a finite group whose maximal subgroups of odd indices are Hall subgroups // *Proc. Steklov Institute Math.* (*Suppl. issues*). — 2017. — Vol. 299, Suppl. 1. — P. 148–157.

[78] *Maslova N. V., Revin D. O.* On the normal structure of a finite group with restrictions on the maximal subgroups, Groups St Andrews 2013. — Cambridge : Cambridge University Press, 2015. — Vol. 422 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* — P. 428–435.

Свидетельства о регистрация объектов интеллектуальной собственности

[79] *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ N 2017662127.* Программа для ЭВМ "Максимальные подгруппы нечетных индексов в конечных простых классических группах над полями нечетных характеристик", реализующая классификацию максимальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых классических группах над полями нечетных характеристик./ *Маслова Н. В., Якунин К. А.* // *Федеральная служба по интеллектуальной собственности.* — 27.10.2017.

Другие работы автора по теме диссертации

[80] *Маслова Н. В.* Максимальные подгруппы нечетного индекса в конечных группах с простым ортогональным цоколем // *Тр. ИММ УрО РАН.* — 2010. — Т. 16, N 4. — С. 237–245.

[81] *Маслова Н. В.* Максимальные подгруппы нечетного индекса в конечных группах с простым линейным, унитарным или симплектическим цоколем // *Алгебра и логика.* — 2011. — Т. 50, N 2. — С. 189–208.

[82] *Маслова Н. В.* Максимальные подгруппы нечетного индекса в конечных почти простых группах. — Екатеринбург : Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, ИММ УрО РАН, 2011.

[83] *Demina E. N., Maslova N. V.* Nonabelian composition factors of a finite group with arithmetic constraints to nonsolvable maximal subgroups // *Proc. Steklov Institute Math.* (*Suppl. issues*). — 2015. — Vol. 289, Suppl. 1. — P. 64–76.

[84] *Gavrilyuk A. L., Khramtsov I. V., Kondrat'ev A. S., Maslova N. V.* On realizability of a graph as the prime graph of a finite group // *Siberian Electron. Math. Reports.* — 2014. — Vol. 11. — P. 246–257.

[85] *Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O.* On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple groups, Groups St Andrews 2017 in Birmingham. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, to appear. — *London Math. Society Lect. Note Ser.*

[86] *Maslova N. V.* Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups // *Proc. Steklov Institute Math.* (*Suppl. issues*). — 2009. — Vol. 267, Suppl. 1. — P. 164–183.

[87] *Maslova N. V.* Classification of maximal subgroups of odd index in finite groups with alternating socle // *Proc. Steklov Institute Math.* (*Suppl. issues*). — 2014. — Vol. 285, Suppl. 1. P. 136–138.

[88] *Maslova N. V.* Maximal subgroups of odd index in finite groups with simple classical socle, Groups St Andrews 2009. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2011. — Vol. 387, no. 2 of *London Math. Soc. Lect. Note Ser.* — P. 473–479.

[89] *Zang C., Guo W., Maslova N. V., Revin D. O.* On prime spectrum of maximal subgroups in finite groups // *Algebra Colloquium.* — 2018. — Vol. 25, no. 4. P. 579–584.