

На правах рукописи

Когабаев Нурлан Талгатович

**ВЫЧИСЛИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  
ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ**

01.01.06 — математическая логика,  
алгебра и теория чисел

**Автореферат**

диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Новосибирск — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

**Научный консультант:** доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН **Гончаров Сергей Савостьянович**.

**Официальные оппоненты:**

**Арсланов Марат Мирзаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Республики Татарстан, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», заведующий кафедрой алгебры и математической логики;

**Бадаев Серикжан Агыбаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, профессор кафедры фундаментальной математики;

**Добрица Вячеслав Порфирьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Юго-Западный государственный университет», профессор кафедры информационной безопасности.

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского»

Защита диссертации состоится 31 мая 2018 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, <http://math.nsc.ru>.

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Учёный секретарь диссертационного совета  
кандидат физико-математических наук,  
доцент

Стукачев Алексей Ильич

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** Диссертация посвящена исследованию классических вопросов теории вычислимых моделей в классе проективных плоскостей. Развитие теории вычислимых (конструктивных) моделей началось в 1950-е годы в работах А.И. Мальцева, М.О. Рабина, А. Фрѐлиха, Дж. Шефердсона и др. авторов. С тех пор теория вычислимых моделей стала одним из наиболее актуальных и активно развивающихся разделов математической логики. Количество публикаций в рамках данного раздела очень велико. Наиболее важную и современную информацию по теории вычислимых моделей можно найти в [12, 25, 32].

Напомним, что модель конечной сигнатуры называется *вычислимой*, если её носитель и основные предикаты являются вычислимыми множествами, а основные операции — частично вычислимыми функциями. Вычислимая модель, изоморфная данной абстрактной модели  $\mathcal{M}$ , называется *вычислимым представлением*  $\mathcal{M}$ .

Вполне естественным выглядит тот факт, что исследования по теории вычислимых моделей находят свои приложения в первую очередь в алгебре. Для таких классических категорий алгебраических систем как абелевы группы, линейные порядки, булевы алгебры, поля и др. разработан обширный спектр результатов и методов по изучению вычислимых представлений моделей из данных классов.

Одна из первых фундаментальных проблем теории вычислимых моделей — это проблема существования вычислимых представлений:

**Проблема 1.** *Получить описание структур из данного класса моделей, которые имеют вычислимое представление.*

Для широких классов структур редко удаётся получить полное решение проблемы 1. В подобных ситуациях решение проблемы в рассматриваемом классе сводят к изучению эффективных свойств производных структур или обращаются к изучению проблемы в подклассах. Например, известно, что булева алгебра имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда она порождается вычислимо перечислимым бинарным деревом (см. [9], § 3.3). Для более узких подклассов описание вычислимых представителей часто формулируется в терминах эффективности некоторых инвариантов. Так в [6] доказано, что суператомная булева алгебра вычислимо представима тогда и только тогда, когда её ординальный тип является конструктивным ординалом.

Ещё один подход к уточнению проблемы 1 — это переход к изучению автоматных представлений структур. Активное изучение автоматных структур в классических категориях алгебраических систем было инициировано в начале 1990-х годов А. Нероудом и Б.М. Хусаиновым, предложившими в [41] общее определение автоматной модели предикатной сигнатуры. Модель называется *автоматной*, если её носитель и основные предикаты распознаются конечными автоматами над некоторым алфавитом. Особенность предложенного определения состоит в том, что для распознавания  $n$ -местного предиката читающие головки  $n$ -ленточного автомата должны двигаться вдоль лент *синхронно*. Модель  $\mathfrak{A}$  *автоматно представима*, если существует автоматная модель, изоморфная  $\mathfrak{A}$ .

Обзор основных результатов, полученных в области изучения автоматных моделей, а также существующие открытые вопросы и основные направления исследований в данной области могут быть найдены в [42, 48]. Как оказалось, в большинстве случаев требование существования автоматного представления накладывает существенные ограничения на алгебраическую сложность структуры — значительные семейства вычислимых структур не обладают автоматными представлениями. Так, например, любая абелева группа без кручения, являющаяся  $p$ -делимой для бесконечного числа простых  $p$ , не имеет автоматных представлений. В частности, не имеет автоматных представлений аддитивная группа рациональных чисел (см. [51]).

В теории вычислимости особое внимание уделяется изучению возможности равномерного построения алгоритмов. Говоря о равномерной вычислимости в теории вычислимых моделей, мы приходим к естественному определению вычислимого класса структур.

Пусть  $K$  — некоторый класс структур, замкнутый относительно изоморфизма, а  $K^c$  — множество всех вычислимых структур из  $K$ . Напомним, что вычисляемая последовательность  $\{\mathfrak{M}_n\}_{n \in \omega}$  структур из класса  $K$  называется *вычисляемой нумерацией*  $K^c$  (с точностью до вычислимого изоморфизма), если для любой вычисляемой структуры  $\mathfrak{M} \in K$  найдётся  $n \in \omega$ , для которого  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M}_n$  вычислимо изоморфны. Класс структур  $K^c$  называется *вычислимым* (с точностью до вычислимого изоморфизма), если он обладает хотя бы одной вычисляемой нумерацией.

Естественным продолжением проблемы 1 является проблема равномерной вычислимости на классах структур:

**Проблема 2.** *Для данного класса структур определить, суще-*

*стает ли у него вычислимая нумерация.*

Обзор результатов, связанных с проблемой вычислимости классов моделей, можно найти в [30]. Так, например, вычислимыми (с точностью до вычислимого изоморфизма) являются класс вычислимых булевых алгебр [9, § 3.3], класс вычислимых линейных порядков, класс вычислимых абелевых групп конечного ранга Прюфера [15], класс вычислимых конечномерных векторных пространств над  $\mathbb{Q}$ . Невычислимыми (с точностью до вычислимого изоморфизма) являются класс всех вычислимых абелевых групп [15], класс вычислимых полей [12], класс вычислимых колец, класс вычислимых векторных пространств над  $\mathbb{Q}$  [14]. В работе [14] изучался один из подходов к вычислимой классификации для класса моделей  $K$ , связанный с гиперарифметическими нумерациями  $K$  с точностью до изоморфизма или  $\Delta_\alpha^0$ -вычислимого изоморфизма.

От проблем существования в теории вычислимых моделей перейдём к другой фундаментальной проблеме — к проблеме единственности. Изучение единственности вычислимого представления было начато А.И. Мальцевым, который ввёл понятие автоустойчивой (вычислимо категоричной) модели. Ясно, что для полного решения проблемы единственности необходимо в общем случае изучать вопрос о числе неэквивалентных вычислимых представлений структуры.

Напомним, что *вычислимой размерностью* структуры  $\mathfrak{M}$  называется максимальное число  $\dim(\mathfrak{M})$  попарно не вычислимо изоморфных друг другу вычислимых представлений  $\mathfrak{M}$ . Если  $\dim(\mathfrak{M}) = 1$ , то  $\mathfrak{M}$  называют *вычислимо категоричной*. В данных терминах проблема числа вычислимых представлений структуры формулируется следующим образом:

**Проблема 3.** *Получить описание вычислимых размерностей структур из данного класса моделей.*

Решение проблемы 3, в частности, включает в себя получение описания вычислимо категоричных структур из данного класса. Для многих классов структур такое описание формулируется в подходящих алгебраических терминах. Так, в [11] доказано, что вычислимая булева алгебра вычислимо категорична тогда и только тогда, когда множество её атомов конечно. Там же установлено, что вычислимый линейный порядок вычислимо категоричен, если и только если он имеет лишь конечное число пар соседних элементов. Из доказанной в [7] теоремы о неограниченных моделях следует, что абелева группа без кручения вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её

ранг конечен. Известно [12, § 2.5], что алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики вычислимо категорично, если и только если его ранг трансцендентности над простым подполем конечен. В [7] получено описание вычислимо категоричных абелевых  $p$ -групп.

Отметим, что во всех упомянутых в предыдущем абзаце классах вычисляемая размерность вычислимо представимых структур может принимать лишь два значения: 1 или  $\omega$ . Первый пример вычислимой структуры, обладающей конечной вычислимой размерностью  $n$ , где  $n \geq 2$ , был построен в [8]. При этом пример из [8] является вычислимым частичным порядком. Более того, в [8] было доказано, что вычислимую размерность любой структуры произвольной сигнатуры можно реализовать как вычислимую размерность некоторого частичного порядка (а значит и некоторого ориентированного графа). Позже были построены примеры структур с вычислимой размерностью  $n \geq 2$  в таких классах как 2-ступенно нильпотентные группы [13], решётки, кольца (с делителями нуля), области целостности произвольной характеристики, коммутативные полугруппы [39], а также поля [46]. Вопросы реализуемости конечных вычислимых размерностей в счётных структурах и их константных обогащениях также изучались в [22, 28, 43].

С учётом приведённых выше результатов, складывается следующее наблюдение: если в классе моделей  $K$  не удаётся получить описание вычислимой категоричности в подходящих структурных терминах, то как правило в  $K$  реализуются все возможные вычислимые размерности  $n$ , где  $1 \leq n \leq \omega$ .

Изучение вопросов реализуемости вычислимых размерностей тесно связано с проблемами реализуемости различных видов спектров тьюринговых степеней в счётных структурах и является одним из основных направлений исследований в теории вычислимых моделей.

Пусть  $\mathfrak{M}$  — счётная структура вычислимой сигнатуры,  $\mathbf{d}$  — произвольная тьюрингова степень. Структура  $\mathfrak{M}$  называется  $\mathbf{d}$ -вычислимой, если её носитель является вычислимым подмножеством  $\omega$ , а её атомная диаграмма  $\mathbf{d}$ -вычислима. Наименьшая степень  $\mathbf{d}$  такая, что  $\mathfrak{M}$  является  $\mathbf{d}$ -вычислимой, называется *степенью структуры*  $\mathfrak{M}$ . ( $\mathbf{d}$ -вычислимым) *представлением* для  $\mathfrak{M}$  называется любая ( $\mathbf{d}$ -вычисляемая) структура с вычислимым носителем, изоморфная  $\mathfrak{M}$ .

*Спектром степеней* счётной структуры  $\mathfrak{M}$  называется множество  $\text{DgSp}(\mathfrak{M})$  всех степеней её представлений. *Спектром степеней отношения*  $S$  на носителе вычислимо представимой структуры  $\mathfrak{M}$

называется множество  $\text{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$  всех степеней образов  $S$  во всех вычислимых представлениях  $\mathfrak{M}$ .

$\mathbf{d}$ -вычислимой размерностью  $\mathfrak{M}$  называется число  $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$  вычислимых представлений  $\mathfrak{M}$  с точностью до  $\mathbf{d}$ -вычислимого изоморфизма. Если  $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M}) = 1$ , то  $\mathfrak{M}$  называется  $\mathbf{d}$ -вычислимо категоричной. Спектром категоричности вычислимой структуры  $\mathfrak{M}$  называется множество  $\text{CatSp}(\mathfrak{M})$  всех степеней  $\mathbf{d}$  таких, что  $\mathfrak{M}$  является  $\mathbf{d}$ -вычислимо категоричной.

Спектром автоморфизмов вычислимой структуры  $\mathfrak{M}$  называется множество  $\text{AutSp}^*(\mathfrak{M})$  степеней всех нетривиальных автоморфизмов  $\mathfrak{M}$ .

**Проблема 4.** *Определить, какие совокупности тьюринговых степеней можно реализовать в качестве указанных выше спектров в структурах из данного класса моделей.*

Вопросы реализуемости спектров степеней рассматриваются как в общем случае, так и в конкретных классах систем. Проблема реализуемости спектров степеней счётных структур исследовалась в [16, 34, 44, 47, 49, 55]. Возможные спектры степеней отношений на структурах изучались в [22, 34–38, 43]. Степени категоричности и спектры категоричности структур исследовались в [1, 2, 10, 29, 33, 45]. В работе [21] изучались вопросы реализуемости различных спектров автоморфизмов.

В работе [39] было доказано, что спектры степеней и эффективные размерности, которые удаётся реализовать в каких-либо структурах, можно также реализовать в классе ориентированных графов. Таким образом, класс ориентированных графов можно назвать *полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей*. В [39] также установлено, что полными относительно спектров степеней и эффективных размерностей являются следующие классы структур: неориентированные графы, частичные порядки, решётки, кольца (с делителями нуля), области целостности произвольной характеристики, коммутативные полугруппы, 2-ступенно нильпотентные группы. Недавно было показано, что полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей является также класс полей [46].

К основным проблемам теории вычислимых моделей также относятся вопросы классификации алгоритмических проблем по их сложности. Один из подходов классификации вычислимых структур в классе  $K$  основан на изучении алгоритмической сложности пробле-

мы изоморфизма в  $K$ . Принято считать, что класс  $K$  обладает вычислимой классификацией, если проблема изоморфизма в данном классе имеет гиперарифметическую сложность (см. [14]).

Если структура  $\mathfrak{M}$  данной сигнатуры  $\sigma$  вычислима, то её атомная диаграмма  $D(\mathfrak{M})$  вычислима. В таком случае *вычислимым индексом* структуры  $\mathfrak{M}$  называют число  $e$  такое, что  $D(\mathfrak{M}) = W_e$ , где  $W_e$  — вычислимо перечислимое множество с клиниевским номером  $e$ . Через  $\mathfrak{M}_e$  обозначим вычислимую модель с вычислимым индексом  $e$ .

Пусть  $K$  — некоторый класс моделей, замкнутый относительно изоморфизма. *Проблемой изоморфизма* для класса  $K$  называется множество  $E(K)$  всех пар  $\langle a, b \rangle$  индексов вычислимых структур из  $K$ , для которых структуры  $\mathfrak{M}_a$  и  $\mathfrak{M}_b$  изоморфны.

Обобщением проблемы изоморфизма является проблема вложимости структур. В некоторых классах структур проблема вложимости может быть сложнее проблемы изоморфизма, в других классах, наоборот, сложность проблемы вложимости ниже сложности проблемы изоморфизма (см. [17]).

*Проблемой вложимости* для  $K$  называется множество  $Em(K)$  всех пар  $\langle a, b \rangle$  индексов вычислимых структур из  $K$ , для которых существует изоморфное вложение структуры  $\mathfrak{M}_a$  в структуру  $\mathfrak{M}_b$ .

Необходимость изучения алгоритмической сложности следующего множества индексов связано с проблемой 3. Как было замечено выше, решение проблемы вычислимой категоричности в классе структур  $K$  часто сводится к описанию вычислимо категоричных представителей  $K$  в терминах относительно простых инвариантов. Принято считать, что в классе  $K$  не существует приемлемой характеристики вычислимой категоричности, если индексное множество вычислимо категоричных моделей из  $K$  имеет довольно большую алгоритмическую сложность.

*Проблемой вычислимой категоричности* для класса  $K$  называется множество  $I_{cc}(K)$  всех индексов  $e$  вычислимых структур из  $K$  таких, что структура  $\mathfrak{M}_e$  вычислимо категорична.

Таким образом, в вопросах изучения сложности индексных множеств можно сформулировать общую проблему:

**Проблема 5.** *Найти точные оценки сложности указанных выше алгоритмических проблем для данного класса структур.*

Для получения оценки сложности проблемы традиционно используются классы различных иерархий сложности. Чтобы показать точность полученной оценки, доказывают  $m$ -полноту рассматривае-



мой проблемы в данном классе иерархии.

В [26] найдены точные оценки сложности проблемы изоморфизма для классов векторных пространств над фиксированным вычислимым полем, алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики, вещественно замкнутых полей, всех полей фиксированной характеристики. В [27] найдены точные оценки сложности проблемы изоморфизма для различных классов абелевых  $p$ -групп ограниченного ульмового ранга. В [17] изложен сравнительный анализ сложности проблем вложимости и изоморфизма для таких классов структур как векторные пространства над полем  $\mathbb{Q}$ , архимедовы упорядоченные поля, абелевы группы без кручения конечного ранга, конечно-порождённые свободные группы и др.

Если множество вычисляемых индексов структур из класса  $K$  гиперарифметическое, то в худшем случае для класса  $K$  проблемы  $E(K)$  и  $Em(K)$  являются  $\Sigma_1^1$ -множествами, а проблема  $I_{cc}(K)$  является  $\Pi_1^1$ -множеством.

Максимальная сложность проблемы изоморфизма достигается во многих классических категориях алгебраических систем, при этом проблема изоморфизма оказывается  $m$ -полным  $\Sigma_1^1$ -множеством. Доказательства  $\Sigma_1^1$ -полноты проблемы изоморфизма для классов ориентированных графов, линейных порядков, деревьев, булевых алгебр и абелевых  $p$ -групп могут быть найдены в [14]. Из результатов статьи [39] следует  $\Sigma_1^1$ -полнота проблемы изоморфизма для классов неориентированных графов, колец, дистрибутивных решёток, нильпотентных групп и полугрупп. В [26] доказана  $\Sigma_1^1$ -полнота проблемы изоморфизма для классов полей фиксированной характеристики и вещественно замкнутых полей. В [17] установлено, что проблема вложимости является  $m$ -полным  $\Sigma_1^1$ -множеством в таких классах структур как линейные порядки, булевы алгебры, абелевы  $p$ -группы, неориентированные графы, поля фиксированной характеристики, 2-ступенно нильпотентные группы.

Проблема вычислимой категоричности также достигает максимально возможной сложности во многих классах структур. В [31] доказано, что проблема вычислимой категоричности в классе деревьев является  $m$ -полным  $\Pi_1^1$ -множеством. Отсюда следует, что проблема вычислимой категоричности является  $m$ -полным  $\Pi_1^1$ -множеством для многих полных относительно спектров степеней и эффективных размерностей классов структур, о которых говорилось выше. В частности, проблема вычислимой категоричности является  $m$ -полным

$\Pi_1^1$ -множеством в классе симметричных иррефлексивных графов [39] и в классе полей [46].

Предметом исследования настоящей диссертации являются проективные плоскости. Понятие проективной плоскости, пришедшее из классической геометрии, в различных модификациях используется во многих разделах современной математики. Традиционный подход к данному классу объектов основывается на определении проективной плоскости как множества точек и прямых с заданным на нём отношением инцидентности [40].

В 1977 году А.И. Ширшов в докладе на XIV Всесоюзной алгебраической конференции предложил концепцию проективной плоскости как частичной алгебраической системы, изложенную затем в работе [24]. Этот алгебраический подход позволил сформулировать ряд вопросов и разработать новые методы, повлекшие за собой работы А.И. Ширшова [23, 24], А.А. Никитина [18–20, 24] и В.В. Вдовина [3–5, 52–54]. В этих работах был решён ряд традиционных алгебраических задач для различных классов проективных плоскостей: были изучены вопросы вложения и гомоморфные образы проективных плоскостей специальных видов, исследовались простые и конечно определённые проективные плоскости, изучались алгоритмические проблемы равенства, инцидентности и др.

Тем не менее, существует не так много результатов, затрагивающих данный класс систем с точки зрения общей теории вычислимых моделей. В классе проективных плоскостей каждая из выделенных выше проблем 1–5 является открытой.

Отметим также, что неразрешимость теории проективных плоскостей установлена А. Тарским ещё в 1949 году [50]. Более того, из результатов [50] вытекает наследственная неразрешимость теории папповых (дезарговых) проективных плоскостей. Однако, естественный вопрос о разрешимости теории класса свободно порождённых проективных плоскостей до сих пор остаётся без ответа. Эту известную открытую проблему мы выделим отдельно:

**Проблема 6.** *Определить, является ли разрешимой теория класса свободно порождённых проективных плоскостей.*

В 2006 году С.С. Гончаровым была поставлена задача развить новое научное направление для решения алгоритмических проблем в теории проективных плоскостей, при этом особый интерес представляли актуальные проблемы теории вычислимых моделей (проблемы 1–5) в известных классах проективных плоскостей и проблема

разрешимости теории свободно порождённых проективных плоскостей (проблема 6). В данной диссертации, основываясь на алгебраическом подходе А.И. Ширшова, мы развиваем теорию вычислимых проективных плоскостей, исследуя выделенные выше проблемы 1–5 в основных подклассах проективных плоскостей, а также находим решение проблемы 6.

Приведём алгебраическое определение проективной плоскости, предложенное в [24].

*Проективной плоскостью* называется частичная алгебраическая система  $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, \cdot \rangle$  с разбиением носителя  $A$  на два подмножества  $A^0 \cup {}^0A = A$ ,  $A^0 \cap {}^0A = \emptyset$  и частичной бинарной коммутативной операцией “ $\cdot$ ” (произведение), удовлетворяющей условиям:

- (1) Произведение  $a \cdot b$  определено тогда и только тогда, когда  $a, b$  — различные однотипные элементы из  $A$  (элементы  $a, b$  называются *однотипными*, если  $a, b \in A^0$  или  $a, b \in {}^0A$ );
- (2) Если определено произведение  $a \cdot b$ , то элементы  $a$  и  $a \cdot b$  — неоднотипные;
- (3) Для любых  $a, b, c \in A$ , для которых определены произведения  $a \cdot b$ ,  $a \cdot c$  и  $(a \cdot b) \cdot (a \cdot c)$ , выполняется равенство  $(a \cdot b) \cdot (a \cdot c) = a$ ;
- (4) Существуют попарно различные  $a, b, c, d \in A$  такие, что определены и попарно различны произведения  $a \cdot b$ ,  $b \cdot c$ ,  $c \cdot d$ ,  $d \cdot a$ .

Для возможности использования методов и понятий теории вычислимых моделей мы переходим от двусортных частичных алгебраических систем к классическим предикатным моделям. Будем рассматривать произвольную проективную плоскость  $\langle A, A^0, {}^0A, \cdot \rangle$  как модель  $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, P^{\mathfrak{A}} \rangle$  предикатной сигнатуры  $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P \rangle$ , с носителем  $A$ , где  $A^0$  и  ${}^0A$  — одноместные предикатные символы, интерпретируемые в  $\mathfrak{A}$  как соответствующие элементы разбиения её носителя, а  $P$  — трёхместный предикатный символ, выделяющий график частичной операции, т.е.

$$P^{\mathfrak{A}} = \{ \langle a, b, c \rangle \in A^3 \mid a \cdot b \text{ определено и равно } c \}.$$

Таким образом, проективная плоскость  $\mathfrak{A}$  *вычислима*, если  $A, A^0, {}^0A$  — вычислимые подмножества  $\omega$ , а отношение  $P^{\mathfrak{A}}$  — вычислимое подмножество  $\omega^3$ .

*Конфигурацией* называется частичная алгебраическая система  $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I \rangle$  с разбиением носителя  $A$  на два подмножества  $A^0 \cup {}^0A = A$ ,  $A^0 \cap {}^0A = \emptyset$  и симметричным бинарным отношением  $I \subseteq A^2$  (*отношение инцидентности*), удовлетворяющим условиям:

(1) Если  $\langle a, b \rangle \in I$ , то элементы  $a$  и  $b$  — неотнотипные;

(2) Если  $\langle a, c \rangle \in I$ ,  $\langle b, c \rangle \in I$ ,  $\langle a, d \rangle \in I$ ,  $\langle b, d \rangle \in I$ , то  $a=b$  или  $c=d$ .

С любой конфигурацией  $\mathfrak{A}$  можно связать частичную бинарную коммутативную операцию, считая, что для различных однотипных  $a, b \in A$  произведение  $a \cdot b$  определено и равно  $c$ , если и только если  $\langle a, c \rangle \in I$  и  $\langle b, c \rangle \in I$ .

Если конфигурация  $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I \rangle$  конечна, то число  $2 \cdot |A| - \frac{|I|}{2}$  называется *рангом*  $\mathfrak{A}$ . Если конфигурация  $\mathfrak{A}$  счётна, то по определению её *ранг* равен  $\omega$ .

Говорят, что проективная плоскость  $\mathfrak{F}$  *свободно порождена* конфигурацией  $\mathfrak{A}$ , если существует счётная последовательность конфигураций

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{A}_i \subseteq \dots$$

такая, что  $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{A}_i$  и для любого  $i \in \omega$  справедливы свойства: (а) для любых различных однотипных  $a, b \in \mathfrak{A}_i$  существует  $c \in \mathfrak{A}_{i+1}$  такой, что  $a \cdot b = c$ ; (б) для любого  $c \in \mathfrak{A}_{i+1} \setminus \mathfrak{A}_i$  существуют ровно два элемента  $a, b \in \mathfrak{A}_i$  такие, что  $a \cdot b = c$ . При этом *рангом* свободно порождённой плоскости  $\mathfrak{F}$  называется ранг исходной конфигурации  $\mathfrak{A}$ .

*Свободная* проективная плоскость  $\mathfrak{F}_\alpha$ , где  $2 \leq \alpha \leq \omega$ , свободно порождается *стандартной* конфигурацией с множеством точек  $\{b_0, b_1\} \cup \{a_i \mid i \in \alpha\}$ , множеством прямых  $\{c\}$  и отношением инцидентности  $\{\langle a_i, c \rangle, \langle c, a_i \rangle \mid i \in \alpha\}$ . Таким образом, свободная плоскость  $\mathfrak{F}_n$ , где  $2 \leq n < \omega$ , имеет ранг  $n + 6$ . Свободная плоскость  $\mathfrak{F}_\omega$  имеет ранг  $\omega$ .

Проективная плоскость называется *дезарговой*, если для любых её однотипных элементов  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  таких, что определены произведения  $a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2, (a_1 \cdot b_1) \cdot (a_2 \cdot b_2), (a_1 \cdot c_1) \cdot (a_2 \cdot c_2), (b_1 \cdot c_1) \cdot (b_2 \cdot c_2)$ , а тройки  $\{a_1, b_1, c_1\}, \{a_2, b_2, c_2\}$  образуют невырожденные треугольники, если  $a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2$  инцидентны одному и тому же элементу, то  $(a_1 \cdot b_1) \cdot (a_2 \cdot b_2), (a_1 \cdot c_1) \cdot (a_2 \cdot c_2), (b_1 \cdot c_1) \cdot (b_2 \cdot c_2)$  тоже инцидентны одному и тому же элементу.

Проективная плоскость называется *папшовой*, если для её любых однотипных элементов  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  таких, что  $a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot c_1 = b_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 = a_2 \cdot c_2 = b_2 \cdot c_2, a_1 \cdot b_1 \neq a_2 \cdot b_2$ , а четвёрка  $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$  образует невырожденный четырёхугольник, если определены произведения  $a_3 = (b_1 \cdot c_2) \cdot (b_2 \cdot c_1), b_3 = (a_1 \cdot c_2) \cdot (a_2 \cdot c_1), c_3 = (a_1 \cdot b_2) \cdot (a_2 \cdot b_1)$ , то  $a_3, b_3, c_3$  инцидентны одному и тому же элементу.

Отметим, что любая папшова проективная плоскость является дезарговой, и никакая дезаргова проективная плоскость не является

свободно порождённой.

Известно [40, гл. VI], что произвольная дезаргова (папшова) проективная плоскость определяется с точностью до изоморфизма некоторым ассоциативным телом (полем)  $\mathfrak{K}$  как проективная плоскость  $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ , состоящая из всех одномерных и двумерных подпространств трёхмерного левого векторного пространства над  $\mathfrak{K}$ . Ассоциативное тело (поле)  $\mathfrak{K}$  называют *координатным телом (полем)* дезарговой (папшовой) проективной плоскости  $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ .

**Цели и задачи исследования.** Одна из основных целей диссертации — на основе алгебраического подхода А.И. Ширшова развить теорию вычислимых проективных плоскостей и решить указанные выше проблемы 1–5 в следующих основных классах проективных плоскостей: (а) свободные проективные плоскости; (б) свободно порождённые проективные плоскости; (в) папшovy проективные плоскости; (г) дезарговы проективные плоскости. Другая важная цель — найти решение проблемы 6.

Для достижения целей планируется решить следующие задачи:

1. Получить достаточные признаки существования вычислимых представлений для проективных плоскостей из указанных классов. В частности, получить в тех же классах описание автоматически представимых проективных плоскостей.

2. Для каждого из указанных классов доказать существование или отсутствие вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

3. Получить описание спектра возможных вычислимых размерностей проективных плоскостей из указанных классов. В частности, найти описание вычислимо категоричных проективных плоскостей в подходящих структурных терминах, либо доказать полноту рассматриваемого класса относительно спектров степеней и эффективных размерностей.

4. Для указанных классов найти точные оценки сложности следующих алгоритмических проблем: проблема изоморфизма, проблема вложимости, проблема вычислимой категоричности.

5. Доказать неразрешимость теории класса свободно порождённых проективных плоскостей.

**Выносимые на защиту положения.** На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Доказано, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений [61].

2. Доказано, что ни один из следующих классов проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, дезарговы плоскости, папшовы плоскости, произвольные проективные плоскости [56, 60].

3. Показано, что в классе свободных проективных плоскостей реализуются только две вычислимые размерности: 1 и  $\omega$ . Доказано, что произвольная свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен [56].

4. Доказано, что класс свободно порождённых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Как следствие, получен результат о том, что в классе свободно порождённых проективных плоскостей реализуется любая вычислимая размерность  $n \in \omega \cup \{\omega\}$  [64].

5. Доказано, что теория класса свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима [57].

6. Доказано, что класс папшовых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Установлено, что вычислимая размерность папшовой (дезарговой) проективной плоскости совпадает с вычислимой размерностью её координатного поля (тела). В частности, в классе папшовых проективных плоскостей реализуется любая вычислимая размерность  $n \in \omega \cup \{\omega\}$  [58, 62].

7. Найдены точные оценки сложности проблем изоморфизма, вложимости и вычислимой категоричности в классах папшовых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей. Для класса свободных проективных плоскостей конечного ранга найдены точные оценки сложности проблемы изоморфизма и вложимости [59, 63, 65].

Все результаты получены автором диссертации лично. Результат из пункта 1 опубликован в совместной с А.С. Денисенко статье [61].

**Научная новизна.** Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. В диссертации создано новое научное направление, связанное с решением алгоритмических проблем в теории проективных плоскостей.

**Теоретическая и практическая значимость.** Диссертация имеет теоретический характер, её результаты содержат решения актуальных алгоритмических проблем в приложении к проективным плоскостям. Полученные результаты вносят существенный вклад в развитие теории вычислимых проективных плоскостей. Отметим,

что описание автоматных моделей в классах свободных, дезарговых и папповых проективных плоскостей было ранее получено А. С. Денисенко [61]. Результат об отсутствии автоматных представлений для свободно порождённых плоскостей дополняет это описание до окончательного. В диссертации предложен новый оригинальный метод эффективной интерпретации симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей, который позволил решить сразу две задачи: задачу описания спектра возможных вычислимых размерностей свободно порождённых плоскостей и задачу о наследственной неразрешимости теории класса свободно порождённых плоскостей. Учитывая результат А. Тарского [50], получаем, что теории всех основных классов проективных плоскостей неразрешимы. Результаты о полноте относительно спектров степеней и эффективных размерностей для классов свободно порождённых и папповых проективных плоскостей ставят эти классы в один ряд с другими эффективно полными классами из [39], что потенциально позволяет получать новые примеры эффективно полных классов. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейших исследований по теории проективных плоскостей.

**Методы исследований.** В работе использованы методы теории вычислимых моделей и алгебраической теории проективных плоскостей. Также используются методы общей теории вычислимости, теории автоматных моделей и классической теории моделей.

**Апробация результатов.** По результатам диссертации сделаны доклады на международных конференциях «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2007, 2012, 2014, 2016 гг.), «Logic Colloquium» (София, Болгария, 2009 г.; Барселона, Испания, 2011 г.; Вена, Австрия, 2014 г.; Хельсинки, Финляндия, 2015 г.; Лидс, Великобритания, 2016 г.), «Computability in Europe» (Афины, Греция, 2008 г.; Кембридж, Великобритания, 2012 г.), «Computability and Models» (Новосибирск, 2007 г.), «Вычислимость и модели» (Усть-Каменогорск, Казахстан, 2009 г.), а также на совместном российско-австрийском семинаре в Исследовательском центре имени Курта Гёделя (Вена, Австрия, 2010 г.). Результаты диссертации докладывались на совместных семинарах ИМ СО РАН и НГУ «Алгебра и логика», «Конструктивные модели», Семинаре имени А.И. Ширшова и на Общественном математическом семинаре ИМ СО РАН.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [56–76], из них [56–65] входят в перечень ВАК российских

рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук. Работа [61] написана в соавторстве с А.С. Денисенко. В диссертацию вошёл лишь тот результат из [61], который был получен автором диссертации самостоятельно, остальные результаты из [61] принадлежат А.С. Денисенко.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Каждая глава разбита на параграфы. Список литературы приведён в алфавитном порядке и содержит 95 наименований. Объём диссертации — 127 страниц.

## Содержание диссертации

Перейдём к описанию глав и параграфов диссертации, выделяя её основные результаты в виде теорем и их следствий.

**Глава 1** диссертации является вводной. В ней излагаются необходимые предварительные сведения (определения, обозначения, результаты) из теории вычислимых моделей, теории автоматных моделей и теории проективных плоскостей.

**Глава 2** посвящена проблеме существования вычислимых представлений моделей из различных классов проективных плоскостей.

В § 2.1 показывается, что если конфигурация  $\mathfrak{A}$  имеет вычислимые множества элементов 1-го и 2-го типов и  $\mathbf{d}$ -вычислимое отношение инцидентности, то конструкция Ширшова позволяет строить  $\mathbf{d}$ -вычислимое представление проективной плоскости  $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ , свободно порождённой конфигурацией  $\mathfrak{A}$ . Отсюда следует, что любая счётная свободная проективная плоскость имеет вычислимое представление. Изложенная в § 2.1 конструкция будет неоднократно использована в следующих главах.

В § 2.2 излагается основанный на идее координатизации метод относительной элементарной определимости ассоциативных тел (полей) в классе дезарговых (папшовых) проективных плоскостей. Используя данный метод в § 2.3, мы доказываем, что дезаргова (папшова) проективная плоскость имеет  $\mathbf{d}$ -вычислимое представление тогда и только тогда, когда её координатное тело (поле) имеет  $\mathbf{d}$ -вычислимое представление. Изложенные в § 2.2 и § 2.3 конструкции будут также применяться в следующих главах.



В § 2.4 изучаются автоматные представления проективных плоскостей. Доказывается, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.

Из всех полученных в главе 2 результатов основным мы считаем только следующую теорему:

**Теорема 2.4.5.** *Произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.*

**Глава 3** содержит решение проблемы существования вычислимых нумераций типов вычислимого изоморфизма для основных классов проективных плоскостей. Доказано, что ни один из следующих классов вычислимых проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, дезарговы плоскости, папповы плоскости, произвольные проективные плоскости.

Для доказательства невычислимости классов свободных, свободно порождённых и произвольных проективных плоскостей мы показываем, что в некотором несущественном обогащении свободная проективная плоскость  $\mathfrak{F}_\omega$  счётного ранга является неограниченной [7].

В § 3.1 определяется некоторое несущественное обогащение  $\mathfrak{F}'_\omega$  модели  $\mathfrak{F}_\omega$  и его представление в виде вычислимой цепи конечных моделей, которое потребуется для доказательства неограниченности модели  $\mathfrak{F}'_\omega$ . Также для доказательства неограниченности  $\mathfrak{F}'_\omega$  необходимо установить факт существования изоморфных вложений конечных подмоделей  $\mathfrak{F}'_\omega$  с рядом дополнительных свойств — описанию подобных вложений посвящён § 3.2.

В § 3.3 окончательно излагается доказательство неограниченности модели  $\mathfrak{F}'_\omega$ , и в качестве следствий формулируются полное описание вычислимых размерностей свободных проективных плоскостей и результат о невычислимости классов свободных, свободно порождённых и произвольных проективных плоскостей.

**Следствие 3.3.2.** *Вычислимая размерность любой счётной свободной проективной плоскости равна 1 или  $\omega$ . Свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен.*

**Следствие 3.3.3.** *Пусть  $K$  — любой из следующих классов:*

- (1) *класс всех свободных проективных плоскостей,*
- (2) *класс всех свободно порождённых проективных плоскостей,*
- (3) *класс всех проективных плоскостей.*

Тогда  $K^c$  не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

Для доказательства невычислимости классов папповых и дезарговых проективных плоскостей рассматривается алгебраически замкнутое поле  $\mathbb{K}_\omega$  счётного ранга трансцендентности над  $\mathbb{Q}$ .

В § 3.4, используя неограниченность поля  $\mathbb{K}_\omega$  (см. [12, следствие 5.1.8]), мы показываем, что для любого вычислимого семейства дезарговых (папповых) проективных плоскостей существует такое вычислимое представление  $\mathfrak{A}$  папповой проективной плоскости, определённой полем  $\mathbb{K}_\omega$ , что  $\mathfrak{A}$  не является вычислимо изоморфным ни одной плоскости из семейства. Отсюда, как следствие, получены результаты об отсутствии вычислимых нумераций для класса всех дезарговых плоскостей и класса всех папповых плоскостей с точностью до вычислимого изоморфизма.

**Следствие 3.4.3.** Пусть  $K$  — любой из следующих классов:

- (1) класс всех папповых проективных плоскостей,
- (2) класс всех дезарговых проективных плоскостей.

Тогда  $K^c$  не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

**Глава 4** посвящена доказательству того, что класс всех свободно порождённых проективных плоскостей и класс всех папповых проективных плоскостей являются эффективно полными относительно определённых видов спектров степеней и вычислимых размерностей. В частности, отсюда будет следовать, что в этих классах реализуются все возможные вычислимые размерности.

Для доказательства эффективной полноты класса свободно порождённых проективных плоскостей определяется подходящая эффективная интерпретация симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых плоскостей бесконечного ранга и применяется достаточный признак эффективной полноты из [39]. В качестве одного из следствий предложенной интерпретации также доказывается наследственная неразрешимость теории класса всех свободно порождённых проективных плоскостей.

В § 4.1 определяется интерпретация счётных симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей бесконечного ранга. В § 4.2 устанавливаются некоторые алгебраические свойства определённой в предыдущем параграфе интерпретации графов в свободно порождённых плоскостях.

В § 4.3 приведены алгоритмические свойства построенной интерпретации и доказываются основные результаты о спектрах степеней и эффективных размерностях в классе свободно порождённых проективных плоскостей. Как следствие, получен результат о том, что для любого натурального  $n \geq 1$  существует вычислимая свободно порождённая проективная плоскость бесконечного ранга, вычислимая размерность которой равна  $n$ . Таким образом, критерий вычислимой категоричности свободных проективных плоскостей, доказанный в следствии 3.3.2, не переносится на случай произвольных свободно порождённых плоскостей.

**Теорема 4.3.5.** *Для любой счётной автоморфно нетривиальной структуры  $\mathfrak{M}$  существует свободно порождённая проективная плоскость  $\mathfrak{F}$  такая, что*

$$(1) \text{DgSp}(\mathfrak{F}) = \text{DgSp}(\mathfrak{M});$$

$$(2) \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{F}) = \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M}) \text{ для всех степеней } \mathbf{d};$$

(3) *Для любого элемента  $a \in |\mathfrak{M}|$  существует элемент  $x \in |\mathfrak{F}|$  такой, что  $\dim(\langle \mathfrak{F}, x \rangle) = \dim(\langle \mathfrak{M}, a \rangle)$ ;*

(4) *Для любого отношения  $S \subseteq |\mathfrak{M}|$  существует отношение  $U \subseteq |\mathfrak{F}|$  такое, что  $\text{DgSp}_{\mathfrak{F}}(U) = \text{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$ .*

**Следствие 4.3.7.** *Для любого  $n$  такого, что  $1 \leq n \leq \omega$ , существует вычислимая свободно порождённая проективная плоскость бесконечного ранга, вычислимая размерность которой равна  $n$ .*

В § 4.4 используется ослабленная версия предложенной в § 4.1 интерпретации для доказательства относительной элементарной определимости класса конечных симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей. Отсюда следует наследственная неразрешимость теории класса всех свободно порождённых проективных плоскостей.

**Теорема 4.4.3.** *Теория класса всех свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима.*

Для доказательства эффективной полноты класса папповых проективных плоскостей используется доказанный в [46] результат об эффективной полноте класса полей и предложенные в § 2.3 конструкции, позволяющие по заданному представлению  $\mathfrak{F}$  координатного поля  $\mathfrak{K}$  строить представление  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$  соответствующей папповой плоскости  $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ , и, наоборот, в заданном представлении  $\mathfrak{A}$  папповой плоскости  $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$  определять представление  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}, \overline{\mathcal{D}}}$  для её координатного поля, используя в качестве параметров некоторый невырожденный четы-

рёхугольник  $\overline{D}$  в плоскости  $\mathfrak{A}$ .

В § 4.5 доказывается ряд алгоритмических свойств представления  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$  папповой плоскости  $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$  и представления  $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}, \overline{D}}$  поля  $\mathfrak{K}$ .

В § 4.6 доказывается, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов. Отсюда, как следствие, получен результат о том, что для любого натурального  $n \geq 1$  существует вычислимая паппова проективная плоскость вычислимой размерности  $n$ .

**Теорема 4.6.5.** *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Для любой счётной автоморфно нетривиальной структуры  $\mathfrak{M}$  существует паппова проективная плоскость  $\mathfrak{A}$  такая, что  $\text{DgSp}(\mathfrak{A}) = \text{DgSp}(\mathfrak{M})$ .*

(2) *Для любой вычислимо представимой структуры  $\mathfrak{M}$  существует вычислимо представимая паппова проективная плоскость  $\mathfrak{A}$  такая, что  $\dim_{\mathfrak{d}}(\mathfrak{A}) = \dim_{\mathfrak{d}}(\mathfrak{M})$  для всех степеней  $\mathfrak{d}$ .*

(3) *Для любой вычислимо представимой структуры  $\mathfrak{M}$  и любого отношения  $S \subseteq |\mathfrak{M}|$  существуют вычислимо представимая паппова проективная плоскость  $\mathfrak{A}$  и отношение  $U \subseteq |\mathfrak{A}|$  такие, что  $\text{DgSp}_{\mathfrak{A}}(U) = \text{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$ .*

(4) *Для любой вычислимой структуры  $\mathfrak{M}$  существует вычислимая паппова проективная плоскость  $\mathfrak{A}$  такая, что  $\text{AutSp}^*(\mathfrak{A}) = \text{AutSp}^*(\mathfrak{M})$ .*

**Следствие 4.6.7.** *Для любого  $n$  такого, что  $1 \leq n \leq \omega$ , существует вычислимая паппова проективная плоскость, вычислимая размерность которой равна  $n$ .*

Из пункта (2) теоремы 4.6.5 очевидно следует, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров категоричности.

**Глава 5** посвящена получению точных оценок сложности некоторых алгоритмических проблем в определённых классах вычислимых проективных плоскостей. Алгоритмические проблемы, сложность которых мы оцениваем, — это проблемы изоморфизма  $E(K)$ , вложимости  $Em(K)$  и вычислимой категоричности  $I_{cc}(K)$ . Классы проективных плоскостей, в которых мы оцениваем указанные проблемы, — это папповы плоскости, дезарговы плоскости, свободные плоскости конечного ранга, произвольные проективные плоскости.

В § 5.1 доказывается, что в классах папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблема изоморфизма достигает максимальной сложности, т.е. является  $t$ -полным  $\Sigma_1^1$ -множеством. Для получения этой оценки мы переносим в класс папповых проективных плоскостей доказанный в [26] результат о том, что проблема изоморфизма полей является  $t$ -полным  $\Sigma_1^1$ -множеством.

**Теорема 5.1.1.** *Проблема изоморфизма  $E(K)$  является  $t$ -полным  $\Sigma_1^1$ -множеством для следующих классов  $K$ :*

- (1) *папповы проективные плоскости,*
- (2) *дезарговы проективные плоскости,*
- (3) *все проективные плоскости.*

Основная цель следующих двух параграфов состоит в получении точной оценки сложности проблемы изоморфизма свободных проективных плоскостей конечного ранга. Для этого сначала в § 5.2 строится серия специальных изоморфных вложения конечных подмоделей  $\mathfrak{A}$  свободной плоскости  $\mathfrak{F}_n$  в свободную плоскость  $\mathfrak{F}_m$ , где  $m < n$ . Затем в § 5.3 доказывается, что проблема изоморфизма в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга является  $t$ -полным  $\Delta_3^0$ -множеством внутри класса.

**Теорема 5.3.2.** *Проблема изоморфизма в классе всех свободных проективных плоскостей конечного ранга является  $t$ -полным  $\Delta_3^0$ -множеством внутри класса.*

В § 5.4 исследуется проблема вложимости для тех же классов проективных плоскостей, для которых в предыдущих параграфах были получены оценки сложности проблемы изоморфизма. Доказывается, что для классов папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблема вложимости имеет такую же сложность как и проблема изоморфизма, т.е. является  $t$ -полным  $\Sigma_1^1$ -множеством.

**Теорема 5.4.1.** *Проблема вложимости  $E_t(K)$  является  $t$ -полным  $\Sigma_1^1$ -множеством для следующих классов  $K$ :*

- (1) *папповы проективные плоскости;*
- (2) *дезарговы проективные плоскости;*
- (3) *произвольные проективные плоскости.*

Вместе с тем проблема вложимости в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга вычислима внутри класса. Таким образом, в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга сложность проблемы вложимости меньше, чем сложность проблемы изоморфизма.

**Теорема 5.4.2.** *Проблема вложимости для класса всех свободных проективных плоскостей конечного ранга является вычислимым множеством внутри класса.*

Наконец, в § 5.5 мы доказываем, что проблема вычислимой категоричности является  $m$ -полным  $\Pi_1^1$ -множеством в следующих классах моделей: папповы плоскости, дезарговы плоскости, произвольные проективные плоскости. Для доказательства данного результата мы используем полноту класса папповых проективных плоскостей относительно вычислимых размерностей (см. предыдущую главу), а также результаты работ [31, 39, 46].

**Теорема 5.5.1.** *Проблема вычислимой категоричности  $I_{cc}(K)$  является  $m$ -полным  $\Pi_1^1$ -множеством для следующих классов  $K$ :*

- (1) *папповы проективные плоскости,*
- (2) *дезарговы проективные плоскости,*
- (3) *все проективные плоскости.*

В заключении излагаются итоги выполненного исследования и приводится список основных результатов диссертации.

Изложение работы заканчивается списком литературы.

Автор диссертации выражает глубокую признательность своему научному консультанту академику С.С. Гончарову за постановку задач, постоянное внимание к исследованиям автора и неизменную поддержку в работе.

## Список литературы

- [1] *Н.А. Баженов*, Степени категоричности суператомных булевых алгебр, Алгебра и логика, 52, № 3 (2013), 271–283.
- [2] *Н.А. Баженов*, О степенях автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для булевых алгебр, Алгебра и логика, 55, № 2 (2016), 133–155.
- [3] *В.В. Вдовин*, О гомоморфизмах проективных плоскостей I, Сиб. матем. ж., 27, № 1 (1986), 35–44.
- [4] *В.В. Вдовин*, О гомоморфизмах проективных плоскостей II, Сиб. матем. ж., 27, № 4 (1986), 35–40.
- [5] *В.В. Вдовин*, Гомоморфизмы и алгоритмические проблемы в проективных плоскостях, Сиб. матем. ж., 32, № 6 (1991), 24–29.
- [6] *С.С. Гончаров*, Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр, Алгебра и логика, 12, № 1 (1973), 31–40.

- [7] *С.С. Гончаров*, Автоустойчивость моделей и абелевых групп, Алгебра и логика, 19, № 1 (1980), 23–44.
- [8] *С.С. Гончаров*, Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций, Алгебра и логика, 19, № 6 (1980), 621–639.
- [9] *С.С. Гончаров*, Счетные булевы алгебры и разрешимость, Новосибирск, Научная книга, 1996.
- [10] *С.С. Гончаров*, Степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций, Тр. МИАН, 274, М., Наука, 2011, 119–129.
- [11] *С.С. Гончаров, В.Д. Дзгоев*, Автоустойчивость моделей, Алгебра и логика, 19, № 1 (1980), 45–58.
- [12] *С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов*, Конструктивные модели, Новосибирск, Научная книга, 1999.
- [13] *С.С. Гончаров, А.В. Молоков, Н.С. Романовский*, Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности, Сиб. матем. ж., 30, № 1 (1989), 82–88.
- [14] *С.С. Гончаров, Дж.Ф. Найт*, Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы, Алгебра и логика, 41, № 6 (2002), 639–681.
- [15] *В.П. Добрица*, Вычислимость некоторых классов конструктивных алгебр, Сиб. матем. ж., 18, № 3 (1977), 570–579.
- [16] *И.Ш. Калмуллин*, Спектры степеней некоторых алгебраических структур, Алгебра и логика, 46, № 6 (2007), 729–744.
- [17] *Дж. Карсон, Е. Фокина, В. Харизанова, Дж.Ф. Найт, С. Кушни, К. Сафрански, Дж. Воллбаум*, Вычислимая проблема вложимости, Алгебра и логика, 50, № 6 (2011), 707–732.
- [18] *А.А. Никитин*, О гомоморфизмах свободно порожденных проективных плоскостей, Алгебра и логика, 20, № 4 (1981), 419–426.
- [19] *А.А. Никитин*, О свободно порожденных проективных плоскостях, Алгебра и логика, 22, № 1 (1983), 61–77.
- [20] *А.А. Никитин*, О некоторых алгоритмических проблемах для проективных плоскостей, Алгебра и логика, 23, № 5 (1984), 512–529.
- [21] *В. Харизанова, Р. Миллер, А.С. Морозов*, Простые структуры со сложной симметрией, Алгебра и логика, 2010, 49, № 1 (2010), 98–134.
- [22] *Б. Хусаинов, Р.А. Шор*, О решении проблемы Гончарова-Эша и проблемы спектра в теории вычислимых моделей, Доклады АН, 371, № 1 (2000), 30–31.

- [23] *А.И. Шуршов*, О тернаре проективной плоскости, Алгебра и логика, 24, № 3 (1985), 365–370.
- [24] *А.И. Шуршов, А.А. Никитин*, К теории проективных плоскостей, Алгебра и логика, 20, № 3 (1981), 330–356.
- [25] *C.J. Ash, J.F. Knight*, Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy (Stud. Logic Found. Math., 144), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 2000.
- [26] *W. Calvert*, The isomorphism problem for classes of computable fields, Arch. Math. Logic, 43, № 3 (2004), 327–336.
- [27] *W. Calvert*, The isomorphism problem for computable Abelian  $p$ -groups of bounded length, J. Symb. Logic, 70, № 1 (2005), 331–345.
- [28] *P. Cholak, S.S. Goncharov, B. Khoussainov, R.A. Shore*, Computably categorical structures and expansions by constants, J. Symb. Logic, 64, № 1 (1999), 13–37.
- [29] *B.F. Csima, J.N.Y. Franklin, R.A. Shore*, Degrees of categoricity and the hyperarithmetic hierarchy, Notre Dame J. Form. Logic, 54, № 2 (2013), 215–231.
- [30] *V.P. Dobritsa*, Computable classes of constructive models, in: Handbook of recursive mathematics, vol. 1 (Stud. Logic Found. Math., 138), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998, 183–233.
- [31] *R.G. Downey, A.M. Kach, S. Lempp, A.E.M. Lewis-Pye, A. Montalbán, D.D. Turetsky*, The complexity of computable categoricity, Advances in Mathematics, 268 (2015), 423–466.
- [32] *Yu.L. Ershov, S.S. Goncharov, A. Nerode, J.B. Remmel* (eds.), Handbook of recursive mathematics, vol. 1, 2 (Stud. Logic Found. Math., 138–139), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998.
- [33] *E.B. Fokina, I. Kalimullin, R. Miller*, Degrees of categoricity of computable structures, Arch. Math. Logic, 49, № 1 (2010), 51–67.
- [34] *A. Frolov, V. Harizanov, I. Kalimullin, O. Kudinov, R. Miller*, Spectra of  $\text{high}_n$  and  $\text{non-low}_n$  degrees, J. Log. Comput., 22, № 4 (2012), 755–777.
- [35] *V.S. Harizanov*, Uncountable degree spectra, Ann. Pure Appl. Logic, 54, № 3 (1991), 255–263.
- [36] *V.S. Harizanov*, Some effects of Ash-Nerode and other decidability conditions on degree spectra, Ann. Pure Appl. Logic, 55, № 1 (1991), 51–65.



- [37] *V.S. Harizanov*, The possible Turing degree of the nonzero member in a two element degree spectrum, *Ann. Pure Appl. Logic*, 60, № 1 (1993), 1–30.
- [38] *D.R. Hirschfeldt*, Degree spectra of relations on structures of finite computable dimension, *Ann. Pure Appl. Logic*, 115, № 1-3 (2002), 233–277.
- [39] *D.R. Hirschfeldt, B. Khoussainov, R.A. Shore, A.M. Slinko*, Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures, *Ann. Pure Appl. Logic*, 115, № 1-3 (2002), 71–113.
- [40] *D.R. Hughes, F.C. Piper*, *Projective planes*, New York, Heidelberg, Berlin, Springer, 1973.
- [41] *B. Khoussainov, A. Nerode*, Automatic presentations of structures, *Logic and computational complexity*, Proc. of LCC-1994 (Lect. Notes Comput. Sci., 960), Berlin, Springer-Verl., 1995, 367–392.
- [42] *B. Khoussainov, A. Nerode*, Open questions in the theory of automatic structures, *Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci.*, 94 (2008), 181–204.
- [43] *B. Khoussainov, R.A. Shore*, Computable isomorphisms, degree spectra of relations, and Scott families, *Ann. Pure Appl. Logic*, 93, № 1-3 (1998), 153–193.
- [44] *J.F. Knight*, Degrees coded into jumps of orderings, *J. Symb. Logic*, 51, № 4 (1986), 1034–1042.
- [45] *R. Miller*,  $\mathbf{d}$ -computable categoricity for algebraic fields, *J. Symb. Logic*, 74, № 4 (2009), 1325–1351.
- [46] *R. Miller, B. Poonen, H. Schoutens, A. Shlapentokh*, A computable functor from graphs to fields, *J. Symb. Logic*, to appear.
- [47] *L.J. Richter*, Degrees of structures, *J. Symb. Logic*, 46, № 4 (1981), 723–731.
- [48] *S. Rubin*, Automata presenting structures: A survey of the finite string case, *Bull. Symb. Log.*, 14, № 2 (2008), 169–209.
- [49] *T.A. Slaman*, Relative to any nonrecursive set, *Proc. Am. Math. Soc.*, 126, № 7 (1998), 2117–2122.
- [50] *A. Tarski*, Undecidability of the theory of lattices and projective geometries, *J. Symb. Logic*, 14, № 1 (1949), 77–78.
- [51] *T. Tsankov*, The additive group of the rationals does not have an automatic presentation, *J. Symb. Logic*, 76, № 4 (2011), 1341–1351.

- [52] *V. V. Vdovin*, Simple projective planes, *Arch. Math.*, 47, № 5 (1986), 469–480.
- [53] *V. V. Vdovin*, Homomorphisms of freely generated projective planes, *Commun. Algebra*, 16, № 11 (1988), 2209–2230.
- [54] *V. V. Vdovin*, Constructively presented projective planes, *Geom. Dedicata*, 39, № 1 (1991), 115–123.
- [55] *S. Wehner*, Enumerations, countable structures and Turing degrees, *Proc. Am. Math. Soc.*, 126, № 7 (1998), 2131–2139.

## Работы автора по теме диссертации:

Публикации в журналах из перечня ВАК:

- [56] *Н. Т. Когабаев*, Класс проективных плоскостей невычислим, *Алгебра и логика*, 47, № 4 (2008), 428–455.
- [57] *Н. Т. Когабаев*, Неразрешимость теории проективных плоскостей, *Алгебра и логика*, 49, № 1 (2010), 3–17.
- [58] *Н. Т. Когабаев*, О вычислимой размерности папповых и дезарговых проективных плоскостей, *Алгебра и логика*, 51, № 1 (2012), 61–81.
- [59] *Н. Т. Когабаев*, Сложность проблемы изоморфизма вычислимых проективных плоскостей, *Вестник НГУ, Серия: матем., мех., информ.*, 13, № 1 (2013), 68–75.
- [60] *Н. Т. Когабаев*, Невычислимость классов папповых и дезарговых проективных плоскостей, *Сиб. матем. ж.*, 54, № 2 (2013), 325–335.
- [61] *А. С. Денисенко, Н. Т. Когабаев*, Об автоматных представлениях проективных плоскостей, *Сиб. матем. ж.*, 55, № 1 (2014), 66–78.
- [62] *Н. Т. Когабаев*, Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей, *Алгебра и логика*, 54, № 5 (2015), 599–627.
- [63] *Н. Т. Когабаев*,  $\Pi_1^1$ -полнота проблемы вычислимой категоричности проективных плоскостей, *Алгебра и логика*, 55, № 4 (2016), 432–440.
- [64] *Н. Т. Когабаев*, Свободно порождённые проективные плоскости конечной вычислимой размерности, *Алгебра и логика*, 55, № 6 (2016), 704–737.
- [65] *Н. Т. Когабаев*, О проблеме вложимости вычислимых проективных плоскостей, *Алгебра и логика*, 56, № 1 (2017), 110–117.

Прочие публикации:

- [66] *N. Kogabaev*, The computable dimension of free projective planes, Logic and Theory of Algorithms, CiE 2008, Local Proceedings (Athens, Greece, June 15-20, 2008), p.505.
- [67] *N. Kogabaev*, Undecidability of the theory of projective planes, Logic Colloquium 2009, Abstracts (Sofia, Bulgaria, July 31 – August 5, 2009), p.60.
- [68] *Н.Т. Козабаев*, Элементарная определимость неориентированных графов в классе проективных плоскостей, Труды международной научной конференции «Вычислимость и модели» (Усть-Каменогорск, 30 августа – 1 сентября 2009), с.38–42.
- [69] *N. Kogabaev*, Computable presentations of desarguesian projective planes, Logic Colloquium 2011, Abstracts (Barcelona, Spain, July 11-16, 2011), p.73.
- [70] *N. Kogabaev*, On uniform computability in familiar classes of projective planes, Turing Centenary Conference CiE-2012, Abstract of Informal Presentations (Cambridge, UK, June 18-23, 2012), p.79.
- [71] *А.С. Денисенко, Н.Т. Козабаев*, Об автоматных представлениях проективных плоскостей, Международная конференция «Мальцевские чтения», Тезисы докладов (Новосибирск, 12-16 ноября 2012), с.36.
- [72] *N. Kogabaev*, The isomorphism problem for computable projective planes, Logic Colloquium 2014, Abstract Booklet (Vienna, Austria, July 14-19, 2014), p.68.
- [73] *Н.Т. Козабаев*, Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей, Международная конференция «Мальцевские чтения», Тезисы докладов (Новосибирск, 10-13 ноября 2014), с.41.
- [74] *N. Kogabaev*, The theory of projective planes is complete with respect to degree spectra and effective dimensions, Logic Colloquium 2015, Book of Abstracts (Helsinki, Finland, 3-8 August 2015), p.687.
- [75] *N. Kogabaev*, Freely generated projective planes with finite computable dimension, Logic Colloquium 2016, Book of Abstracts (Leeds, UK, 31 July – 6 August 2016), p.97–98.
- [76] *Н.Т. Козабаев*, Вычислимые представления проективных плоскостей, Международная конференция «Мальцевские чтения», Тезисы докладов (Новосибирск, 21-25 ноября 2016), с.16.