На правах рукописи

Когабаев

Когабаев Нурлан Талгатович

ВЫЧИСЛИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН **Гончаров Сергей Савостьянович**.

Официальные оппоненты:
Арсланов Марат Мирзаевич, доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Республики Татарстан, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет», заведующий кафедрой алгебры и математической логики;

Бадаев Серикжан Агыбаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, профессор кафедры фундаментальной математики;

Добрица Вячеслав Порфирьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Юго-Западный государственный университет», профессор кафедры информационной безопасности.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского»

Защита диссертации состоится 31 мая 2018 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан «___» ________ 2018 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Стукачев Алексей Ильич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Диссертация посвящена исследованию классических вопросов теории вычислимых моделей в классе проективных плоскостей. Развитие теории вычислимых (конструктивных) моделей началось в 1950-е годы в работах А.И. Мальцева, М.О. Рабина, А Фрёлиха, Дж. Шефердсона и др. авторов. С тех пор теория вычислимых моделей стала одним из наиболее актуальных и активно развивающихся разделов математической логики. Количество публикаций в рамках данного раздела очень велико. Наиболее важную и современную информацию по теории вычислимых моделей можно найти в [12, 25, 32].

Напомним, что модель конечной сигнатуры называется *вычислимой*, если её носитель и основные предикаты являются вычислимыми множествами, а основные операции — частично вычислимыми функциями. Вычислимая модель, изоморфная данной абстрактной модели $\mathfrak{M}$, называется *вычислимым представлением* $\mathfrak{M}$.

Вполне естественным выглядит тот факт, что исследования по теории вычислимых моделей находят свои приложения в первую очередь в алгебре. Для таких классических категорий алгебраических систем как абелевы группы, линейные порядки, булевы алгебры, поля и др. разработан обширный спектр результатов и методов по изучению вычислимых представлений моделей из данных классов.

Одна из первых фундаментальных проблем теории вычислимых моделей — это проблема существования вычислимых представлений:

Проблема 1. *Получить описание структур из данного класса моделей, которые имеют вычислимое представление.*

Для широких классов структур редко удаётся получить полное решение проблемы 1. В подобных ситуациях решение проблемы в рассматриваемом классе сводят к изучению эффективных свойств производных структур или обращаются к изучению проблемы в подклассах. Например, известно, что булева алгебра имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда она порождается вычислимо перечислимым бинарным деревом (см. [9], § 3.3). Для более узких подклассов описание вычислимых представителей часто формулируется в терминах эффективности некоторых инвариантов. Так в [6] доказано, что суператомная булева алгебра вычислимо представима тогда и только тогда, когда её ординальный тип является конструктивным ординалом.

Ещё один подход к уточнению проблемы 1 — это переход к изучению автоматных представлений структур. Активное изучение автоматных структур в классических категориях алгебраических систем было инициировано в начале 1990-х годов А. Нероудом и Б.М. Хусаиновым, предложившими в [41] общее определение автоматной модели предикатной сигнатуры. Модель называется *автоматной*, если её носитель и основные предикаты распознаются конечными автоматами над некоторым алфавитом. Особенность предложенного определения состоит в том, что для распознавания n-местного предиката читающие головки n-ленточного автомата должны двигаться вдоль лент *синхронно*. Модель $\mathfrak{A}$ *автоматно представима*, если существует автоматная модель, изоморфная $\mathfrak{A}$.

Обзор основных результатов, полученных в области изучения автоматных моделей, а также существующие открытые вопросы и основные направления исследований в данной области могут быть найдены в [42, 48]. Как оказалось, в большинстве случаев требование существования автоматного представления накладывает существенные ограничения на алгебраическую сложность структуры — значительные семейства вычислимых структур не обладают автоматными представлениями. Так, например, любая абелева группа без кручения, являющаяся p-делимой для бесконечного числа простых p, не имеет автоматных представлений. В частности, не имеет автоматных представлений аддитивная группа рациональных чисел (см. [51]).

В теории вычислимости особое внимание уделяется изучению возможности равномерного построения алгоритмов. Говоря о равномерной вычислимости в теории вычислимых моделей, мы приходим к естественному определению вычислимого класса структур.

Пусть K — некоторый класс структур, замкнутый относительно изоморфизма, а K^c — множество всех вычислимых структур из K. Напомним, что вычислимая последовательность $\{\mathfrak{M}_n\}_{n\in\omega}$ структур из класса K называется *вычислимой нумерацией* K^c (с точностью до вычислимого изоморфизма), если для любой вычислимой структуры $\mathfrak{M} \in K$ найдётся $n \in \omega$, для которого $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_n$ вычислимо изоморфны. Класс структур K^c называется *вычислимым* (с точностью до вычислимого изоморфизма), если он обладает хотя бы одной вычислимой нумерацией.

Естественным продолжением проблемы 1 является проблема равномерной вычислимости на классах структур:

Проблема 2. *Для данного класса структур определить, суще-*

ствует ли у него вычислимая нумерация.

Обзор результатов, связанных с проблемой вычислимости классов моделей, можно найти в [30]. Так, например, вычислимыми (с точностью до вычислимого изоморфизма) являются класс вычислимых булевых алгебр [9, § 3.3], класс вычислимых линейных порядков, класс вычислимых абелевых групп конечного ранга Прюфера [15], класс вычислимых конечномерных векторных пространств над $\mathbb{Q}$. Невычислимыми (с точностью до вычислимого изоморфизма) являются класс всех вычислимых абелевых групп [15], класс вычислимых полей [12], класс вычислимых колец, класс вычислимых векторных пространств над $\mathbb{Q}$ [14]. В работе [14] изучался один из подходов к вычислимой классификации для класса моделей K, связанный с гиперарифметическими нумерациями K с точностью до изоморфизма или Δ^0_α-вычислимого изоморфизма.

От проблем существования в теории вычислимых моделей перейдём к другой фундаментальной проблеме — к проблеме единственности. Изучение единственности вычислимого представления было начато А.И. Мальцевым, который ввёл понятие автоустойчивой (вычислимо категоричной) модели. Ясно, что для полного решения проблемы единственности необходимо в общем случае изучать вопрос о числе неэквивалентных вычислимых представлений структуры.

Напомним, что *вычислимой размерностью* структуры $\mathfrak{M}$ называется максимальное число $\dim(\mathfrak{M})$ попарно не вычислимо изоморфных друг другу вычислимых представлений $\mathfrak{M}$. Если $\dim(\mathfrak{M}) = 1$, то $\mathfrak{M}$ называют *вычислимо категоричной*. В данных терминах проблема числа вычислимых представлений структуры формулируется следующим образом:

Проблема 3. *Получить описание вычислимых размерностей структур из данного класса моделей.*

Решение проблемы 3, в частности, включает в себя получение описания вычислимо категоричных структур из данного класса. Для многих классов структур такое описание формулируется в подходящих алгебраических терминах. Так, в [11] доказано, что вычислимая булева алгебра вычислимо категорична тогда и только тогда, когда множество её атомов конечно. Там же установлено, что вычислимый линейный порядок вычислимо категоричен, если и только если он имеет лишь конечное число пар соседних элементов. Из доказанной в [7] теоремы о неограниченных моделях следует, что абелева группа без кручения вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен. Известно [12, § 2.5], что алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики вычислимо категорично, если и только если его ранг трансцендентности над простым подполем конечен. В [7] получено описание вычислимо категоричных абелевых p-групп.

Отметим, что во всех упомянутых в предыдущем абзаце классах вычислимая размерность вычислимо представимых структур может принимать лишь два значения: 1 или ω. Первый пример вычислимой структуры, обладающей конечной вычислимой размерностью n, где $n \geqslant 2$, был построен в [8]. При этом пример из [8] является вычислимым частичным порядком. Более того, в [8] было доказано, что вычислимую размерность любой структуры произвольной сигнатуры можно реализовать как вычислимую размерность некоторого частичного порядка (а значит и некоторого ориентированного графа). Позже были построены примеры структур с вычислимой размерностью $n \geqslant 2$ в таких классах как 2-ступенно нильпотентные группы [13], решётки, кольца (с делителями нуля), области целостности произвольной характеристики, коммутативные полугруппы [39], а также поля [46]. Вопросы реализуемости конечных вычислимых размерностей в счётных структурах и их константных обогащениях также изучались в [22, 28, 43].

С учётом приведённых выше результатов, складывается следующее наблюдение: если в классе моделей K не удаётся получить описание вычислимой категоричности в подходящих структурных терминах, то как правило в K реализуются все возможные вычислимые размерности n, где $1 \leqslant n \leqslant \omega$.

Изучение вопросов реализуемости вычислимых размерностей тесно связано с проблемами реализуемости различных видов спектров тьюринговых степеней в счётных структурах и является одним из основных направлений исследований в теории вычислимых моделей.

Пусть $\mathfrak{M}$ — счётная структура вычислимой сигнатуры, $\mathbf{d}$ — произвольная тьюрингова степень. Структура $\mathfrak{M}$ называется $\mathbf{d}$-*вычислимой*, если её носитель является вычислимым подмножеством ω, а её атомная диаграмма $\mathbf{d}$-вычислима. Наименьшая степень $\mathbf{d}$ такая, что $\mathfrak{M}$ является $\mathbf{d}$-вычислимой, называется *степенью структуры* $\mathfrak{M}$. ($\mathbf{d}$-*вычислимым*) *представлением* для $\mathfrak{M}$ называется любая ($\mathbf{d}$-вычислимая) структура с вычислимым носителем, изоморфная $\mathfrak{M}$.

Спектром степеней счётной структуры $\mathfrak{M}$ называется множество $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{M})$ всех степеней её представлений. *Спектром степеней отношения* S на носителе вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$

называется множество $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$ всех степеней образов S во всех вычислимых представлениях $\mathfrak{M}$.

$\mathbf{d}$-*вычислимой размерностью* $\mathfrak{M}$ называется число $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ вычислимых представлений $\mathfrak{M}$ с точностью до $\mathbf{d}$-вычислимого изоморфизма. Если $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M}) = 1$, то $\mathfrak{M}$ называется $\mathbf{d}$-*вычислимо категоричной. Спектром категоричности* вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество $\mathrm{CatSp}(\mathfrak{M})$ всех степеней $\mathbf{d}$ таких, что $\mathfrak{M}$ является $\mathbf{d}$-вычислимо категоричной.

Спектром автоморфизмов вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество $\mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{M})$ степеней всех нетривиальных автоморфизмов $\mathfrak{M}$.

Проблема 4. *Определить, какие совокупности тьюринговых степеней можно реализовать в качестве указанных выше спектров в структурах из данного класса моделей.*

Вопросы реализуемости спектров степеней рассматриваются как в общем случае, так и в конкретных классах систем. Проблема реализуемости спектров степеней счётных структур исследовалась в [16, 34, 44, 47, 49, 55]. Возможные спектры степеней отношений на структурах изучались в [22, 34–38, 43]. Степени категоричности и спектры категоричности структур исследовались в [1,2,10,29,33,45]. В работе [21] изучались вопросы реализуемости различных спектров автоморфизмов.

В работе [39] было доказано, что спектры степеней и эффективные размерности, которые удаётся реализовать в каких-либо структурах, можно также реализовать в классе ориентированных графов. Таким образом, класс ориентированных графов можно назвать *полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей.* В [39] также установлено, что полными относительно спектров степеней и эффективных размерностей являются следующие классы структур: неориентированные графы, частичные порядки, решётки, кольца (с делителями нуля), области целостности произвольной характеристики, коммутативные полугруппы, 2-ступенно нильпотентные группы. Недавно было показано, что полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей является также класс полей [46].

К основным проблемам теории вычислимых моделей также относят вопросы классификации алгоритмических проблем по их сложности. Один из подходов классификации вычислимых структур в классе K основан на изучении алгоритмической сложности проблемы изоморфизма в K. Принято считать, что класс K обладает вычислимой классификацией, если проблема изоморфизма в данном классе имеет гиперарифметическую сложность (см. [14]).

Если структура $\mathfrak{M}$ данной сигнатуры σ вычислима, то её атомная диаграмма $D(\mathfrak{M})$ вычислима. В таком случае *вычислимым индексом* структуры $\mathfrak{M}$ называют число e такое, что $D(\mathfrak{M}) = W_e$, где W_e — вычислимо перечислимое множество с клиниевским номером e. Через $\mathfrak{M}_e$ обозначим вычислимую модель с вычислимым индексом e.

Пусть K — некоторый класс моделей, замкнутый относительно изоморфизма. *Проблемой изоморфизма* для класса K называется множество $E(K)$ всех пар $\langle a, b\rangle$ индексов вычислимых структур из K, для которых структуры $\mathfrak{M}_a$ и $\mathfrak{M}_b$ изоморфны.

Обобщением проблемы изоморфизма является проблема вложимости структур. В некоторых классах структур проблема вложимости может быть сложнее проблемы изоморфизма, в других классах, наоборот, сложность проблемы вложимости ниже сложности проблемы изоморфизма (см. [17]).

Проблемой вложимости для K называется множество $Em(K)$ всех пар $\langle a, b\rangle$ индексов вычислимых структур из K, для которых существует изоморфное вложение структуры $\mathfrak{M}_a$ в структуру $\mathfrak{M}_b$.

Необходимость изучения алгоритмической сложности следующего множества индексов связано с проблемой 3. Как было замечено выше, решение проблемы вычислимой категоричности в классе структур K часто сводится к описанию вычислимо категоричных представителей K в терминах относительно простых инвариантов. Принято считать, что в классе K не существует приемлемой характеризации вычислимой категоричности, если индексное множество вычислимо категоричных моделей из K имеет довольно большую алгоритмическую сложность.

Проблемой вычислимой категоричности для класса K называется множество $I_{cc}(K)$ всех индексов e вычислимых структур из K таких, что структура $\mathfrak{M}_e$ вычислимо категорична.

Таким образом, в вопросах изучения сложности индексных множеств можно сформулировать общую проблему:

Проблема 5. *Найти точные оценки сложности указанных выше алгоритмических проблем для данного класса структур.*

Для получения оценки сложности проблемы традиционно используются классы различных иерархий сложности. Чтобы показать точность полученной оценки, доказывают m-полноту рассматриваемой проблемы в данном классе иерархии.

В [26] найдены точные оценки сложности проблемы изоморфизма для классов векторных пространств над фиксированным вычислимым полем, алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики, вещественно замкнутых полей, всех полей фиксированной характеристики. В [27] найдены точные оценки сложности проблемы изоморфизма для различных классов абелевых p-групп ограниченного ульмового ранга. В [17] изложен сравнительный анализ сложности проблем вложимости и изоморфизма для таких классов структур как векторные пространства над полем $\mathbb{Q}$, архимедовы упорядоченные поля, абелевы группы без кручения конечного ранга, конечно-порождённые свободные группы и др.

Если множество вычислимых индексов структур из класса K гиперарифметическое, то в худшем случае для класса K проблемы $E(K)$ и $Em(K)$ являются Σ^1_1-множествами, а проблема $I_{cc}(K)$ является Π^1_1-множеством.

Максимальная сложность проблемы изоморфизма достигается во многих классических категориях алгебраических систем, при этом проблема изоморфизма оказывается m-полным Σ^1_1-множеством. Доказательства Σ^1_1-полноты проблемы изоморфизма для классов ориентированных графов, линейных порядков, деревьев, булевых алгебр и абелевых p-групп могут быть найдены в [14]. Из результатов статьи [39] следует Σ^1_1-полнота проблемы изоморфизма для классов неориентированных графов, колец, дистрибутивных решёток, нильпотентных групп и полугрупп. В [26] доказана Σ^1_1-полнота проблемы изоморфизма для классов полей фиксированной характеристики и вещественно замкнутых полей. В [17] установлено, что проблема вложимости является m-полным Σ^1_1-множеством в таких классах структур как линейные порядки, булевы алгебры, абелевы p-группы, неориентированные графы, поля фиксированной характеристики, 2-ступенно нильпотентные группы.

Проблема вычислимой категоричности также достигает максимально возможной сложности во многих классах структур. В [31] доказано, что проблема вычислимой категоричности в классе деревьев является m-полным Π^1_1-множеством. Отсюда следует, что проблема вычислимой категоричности является m-полным Π^1_1-множеством для многих полных относительно спектров степеней и эффективных размерностей классов структур, о которых говорилось выше. В частности, проблема вычислимой категоричности является m-полным

Π^1_1-множеством в классе симметричных иррефлексивных графов [39] и в классе полей [46].

Предметом исследования настоящей диссертации являются проективные плоскости. Понятие проективной плоскости, пришедшее из классической геометрии, в различных модификациях используется во многих разделах современной математики. Традиционный подход к данному классу объектов основывается на определении проективной плоскости как множества точек и прямых с заданным на нём отношением инцидентности [40].

В 1977 году А.И. Ширшов в докладе на XIV Всесоюзной алгебраической конференции предложил концепцию проективной плоскости как частичной алгебраической системы, изложенную затем в работе [24]. Этот алгебраический подход позволил сформулировать ряд вопросов и разработать новые методы, повлекшие за собой работы А.И. Ширшова [23, 24], А.А. Никитина [18–20, 24] и В.В. Вдовина [3–5, 52–54]. В этих работах был решён ряд традиционных алгебраических задач для различных классов проективных плоскостей: были изучены вопросы вложения и гомоморфные образы проективных плоскостей специальных видов, исследовались простые и конечно определённые проективные плоскости, изучались алгоритмические проблемы равенства, инцидентности и др.

Тем не менее, существует не так много результатов, затрагивающих данный класс систем с точки зрения общей теории вычислимых моделей. В классе проективных плоскостей каждая из выделенных выше проблем 1–5 является открытой.

Отметим также, что неразрешимость теории проективных плоскостей установлена А. Тарским ещё в 1949 году [50]. Более того, из результатов [50] вытекает наследственная неразрешимость теории папповых (дезарговых) проективных плоскостей. Однако, естественный вопрос о разрешимости теории класса свободно порождённых проективных плоскостей до сих пор остаётся без ответа. Эту известную открытую проблему мы выделим отдельно:

Проблема 6. *Определить, является ли разрешимой теория класса свободно порождённых проективных плоскостей.*

В 2006 году С.С. Гончаровым была поставлена задача развить новое научное направление для решения алгоритмических проблем в теории проективных плоскостей, при этом особый интерес представляли актуальные проблемы теории вычислимых моделей (проблемы 1–5) в известных классах проективных плоскостей и проблема разрешимости теории свободно порождённых проективных плоскостей (проблема 6). В данной диссертации, основываясь на алгебраическом подходе А.И. Ширшова, мы развиваем теорию вычислимых проективных плоскостей, исследуя выделенные выше проблемы 1–5 в основных подклассах проективных плоскостей, а также находим решение проблемы 6.

Приведём алгебраическое определение проективной плоскости, предложенное в [24].

Проективной плоскостью называется частичная алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, \cdot \rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и частичной бинарной коммутативной операцией "$\cdot$" (произведение), удовлетворяющей условиям:

(1) Произведение $a{\cdot}b$ определено тогда и только тогда, когда a, b — различные однотипные элементы из A (элементы a, b называются *однотипными*, если $a, b \in A^0$ или $a, b \in {}^0A$);

(2) Если определено произведение $a{\cdot}b$, то элементы a и $a{\cdot}b$ — неоднотипные;

(3) Для любых $a, b, c \in A$, для которых определены произведения $a{\cdot}b$, $a{\cdot}c$ и $(a{\cdot}b){\cdot}(a{\cdot}c)$, выполняется равенство $(a{\cdot}b){\cdot}(a{\cdot}c) = a$;

(4) Существуют попарно различные $a, b, c, d \in A$ такие, что определены и попарно различны произведения $a{\cdot}b$, $b{\cdot}c$, $c{\cdot}d$, $d{\cdot}a$.

Для возможности использования методов и понятий теории вычислимых моделей мы переходим от двусортных частичных алгебраических систем к классическим предикатным моделям. Будем рассматривать произвольную проективную плоскость $\langle A, A^0, {}^0A, \cdot \rangle$ как модель $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, P^{\mathfrak{A}} \rangle$ предикатной сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P \rangle$, с носителем A, где A^0 и ${}^0A$ — одноместные предикатные символы, интерпретируемые в $\mathfrak{A}$ как соответствующие элементы разбиения её носителя, а P — трёхместный предикатный символ, выделяющий график частичной операции, т.е.

$$P^{\mathfrak{A}} = \{\langle a, b, c \rangle \in A^3 \mid a{\cdot}b \text{ определено и равно } c\}.$$

Таким образом, проективная плоскость $\mathfrak{A}$ *вычислима*, если A, A^0, ${}^0A$ — вычислимые подмножества ω, а отношение $P^{\mathfrak{A}}$ — вычислимое подмножество ω^3.

Конфигурацией называется частичная алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I \rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и симметричным бинарным отношением $I \subseteq A^2$ (*отношение инцидентности*), удовлетворяющим условиям:

(1) Если $\langle a, b\rangle \in I$, то элементы a и b — неоднотипные;

(2) Если $\langle a, c\rangle \in I$, $\langle b, c\rangle \in I$, $\langle a, d\rangle \in I$, $\langle b, d\rangle \in I$, то $a{=}b$ или $c{=}d$.
С любой конфигурацией $\mathfrak{A}$ можно связать частичную бинарную коммутативную операцию, считая, что для различных однотипных $a, b \in A$ произведение $a{\cdot}b$ определено и равно c, если и только если $\langle a, c\rangle \in I$ и $\langle b, c\rangle \in I$.

Если конфигурация $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ конечна, то число $2{\cdot}|A| - \frac{|I|}{2}$ называется *рангом* $\mathfrak{A}$. Если конфигурация $\mathfrak{A}$ счётна, то по определению её *ранг* равен ω.

Говорят, что проективная плоскость $\mathfrak{F}$ *свободно порождена* конфигурацией $\mathfrak{A}$, если существует счётная последовательность конфигураций

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_i \subseteq \ldots$$

такая, что $\mathfrak{F} = \bigcup_{i\in\omega} \mathfrak{A}_i$ и для любого $i \in \omega$ справедливы свойства: (а) для любых различных однотипных $a, b \in \mathfrak{A}_i$ существует $c \in \mathfrak{A}_{i+1}$ такой, что $a{\cdot}b{=}c$; (б) для любого $c \in \mathfrak{A}_{i+1} \setminus \mathfrak{A}_i$ существуют ровно два элемента $a, b \in \mathfrak{A}_i$ такие, что $a{\cdot}b{=}c$. При этом *рангом* свободно порождённой плоскости $\mathfrak{F}$ называется ранг исходной конфигурации $\mathfrak{A}$.

Свободная проективная плоскость $\mathfrak{F}_\alpha$, где $2 \leqslant \alpha \leqslant \omega$, свободно порождается *стандартной* конфигурацией с множеством точек $\{b_0, b_1\} \cup \{a_i \mid i \in \alpha\}$, множеством прямых $\{c\}$ и отношением инцидентности $\{\langle a_i, c\rangle, \langle c, a_i\rangle \mid i \in \alpha\}$. Таким образом, свободная плоскость $\mathfrak{F}_n$, где $2 \leqslant n < \omega$, имеет ранг $n + 6$. Свободная плоскость $\mathfrak{F}_\omega$ имеет ранг ω.

Проективная плоскость называется *дезарговой*, если для любых её однотипных элементов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 таких, что определены произведения $a_1{\cdot}a_2$, $b_1{\cdot}b_2$, $c_1{\cdot}c_2$, $(a_1{\cdot}b_1){\cdot}(a_2{\cdot}b_2)$, $(a_1{\cdot}c_1){\cdot}(a_2{\cdot}c_2)$, $(b_1{\cdot}c_1){\cdot}(b_2{\cdot}c_2)$, а тройки $\{a_1, b_1, c_1\}$, $\{a_2, b_2, c_2\}$ образуют невырожденные треугольники, если $a_1{\cdot}a_2$, $b_1{\cdot}b_2$, $c_1{\cdot}c_2$ инцидентны одному и тому же элементу, то $(a_1{\cdot}b_1){\cdot}(a_2{\cdot}b_2)$, $(a_1{\cdot}c_1){\cdot}(a_2{\cdot}c_2)$, $(b_1{\cdot}c_1){\cdot}(b_2{\cdot}c_2)$ тоже инцидентны одному и тому же элементу.

Проективная плоскость называется *папповой*, если для её любых однотипных элементов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 таких, что $a_1{\cdot}b_1 = a_1{\cdot}c_1 = b_1{\cdot}c_1$, $a_2{\cdot}b_2 = a_2{\cdot}c_2 = b_2{\cdot}c_2$, $a_1{\cdot}b_1 \neq a_2{\cdot}b_2$, а четвёрка $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$ образует невырожденный четырёхугольник, если определены произведения $a_3 = (b_1{\cdot}c_2){\cdot}(b_2{\cdot}c_1)$, $b_3 = (a_1{\cdot}c_2){\cdot}(a_2{\cdot}c_1)$, $c_3 = (a_1{\cdot}b_2){\cdot}(a_2{\cdot}b_1)$, то a_3, b_3, c_3 инцидентны одному и тому же элементу.

Отметим, что любая паппова проективная плоскость является дезарговой, и никакая дезаргова проективная плоскость не является свободно порождённой.

Известно [40, гл. VI], что произвольная дезаргова (паппова) проективная плоскость определяется с точностью до изоморфизма некоторым ассоциативным телом (полем) $\mathfrak{K}$ как проективная плоскость $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, состоящая из всех одномерных и двухмерных подпространств трёхмерного левого векторного пространства над $\mathfrak{K}$. Ассоциативное тело (поле) $\mathfrak{K}$ называют *координатным телом (полем)* дезарговой (папповой) проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$.

Цели и задачи исследования. Одна из основных целей диссертации — на основе алгебраического подхода А.И. Ширшова развить теорию вычислимых проективных плоскостей и решить указанные выше проблемы 1–5 в следующих основных классах проективных плоскостей: (а) свободные проективные плоскости; (б) свободно порождённые проективные плоскости; (в) папповы проективные плоскости; (г) дезарговы проективные плоскости. Другая важная цель — найти решение проблемы 6.

Для достижения целей планируется решить следующие задачи:

1. Получить достаточные признаки существования вычислимых представлений для проективных плоскостей из указанных классов. В частности, получить в тех же классах описание автоматно представимых проективных плоскостей.

2. Для каждого из указанных классов доказать существование или отсутствие вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

3. Получить описание спектра возможных вычислимых размерностей проективных плоскостей из указанных классов. В частности, найти описание вычислимо категоричных проективных плоскостей в подходящих структурных терминах, либо доказать полноту рассматриваемого класса относительно спектров степеней и эффективных размерностей.

4. Для указанных классов найти точные оценки сложности следующих алгоритмических проблем: проблема изоморфизма, проблема вложимости, проблема вычислимой категоричности.

5. Доказать неразрешимость теории класса свободно порождённых проективных плоскостей.

Выносимые на защиту положения. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Доказано, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений [61].

2. Доказано, что ни один из следующих классов проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, дезарговы плоскости, папповы плоскости, произвольные проективные плоскости [56, 60].

3. Показано, что в классе свободных проективных плоскостей реализуются только две вычислимые размерности: 1 и ω. Доказано, что произвольная свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен [56].

4. Доказано, что класс свободно порождённых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Как следствие, получен результат о том, что в классе свободно порождённых проективных плоскостей реализуется любая вычислимая размерность $n \in \omega \cup \{\omega\}$ [64].

5. Доказано, что теория класса свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима [57].

6. Доказано, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Установлено, что вычислимая размерность папповой (дезарговой) проективной плоскости совпадает с вычислимой размерностью её координатного поля (тела). В частности, в классе папповых проективных плоскостей реализуется любая вычислимая размерность $n \in \omega \cup \{\omega\}$ [58, 62].

7. Найдены точные оценки сложности проблем изоморфизма, вложимости и вычислимой категоричности в классах папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей. Для класса свободных проективных плоскостей конечного ранга найдены точные оценки сложности проблемы изоморфизма и вложимости [59, 63, 65].

Все результаты получены автором диссертации лично. Результат из пункта 1 опубликован в совместной с А.С. Денисенко статье [61].

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. В диссертации создано новое научное направление, связанное с решением алгоритмических проблем в теории проективных плоскостей.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер, её результаты содержат решения актуальных алгоритмических проблем в приложении к проективным плоскостям. Полученные результаты вносят существенный вклад в развитие теории вычислимых проективных плоскостей. Отметим, что описание автоматных моделей в классах свободных, дезарговых и папповых проективных плоскостей было ранее получено А.С. Денисенко [61]. Результат об отсутствии автоматных представлений для свободно порождённых плоскостей дополняет это описание до окончательного. В диссертации предложен новый оригинальный метод эффективной интерпретации симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей, который позволил решить сразу две задачи: задачу описания спектра возможных вычислимых размерностей свободно порождённых плоскостей и задачу о наследственной неразрешимости теории класса свободно порождённых плоскостей. Учитывая результат А. Тарского [50], получаем, что теории всех основных классов проективных плоскостей неразрешимы. Результаты о полноте относительно спектров степеней и эффективных размерностей для классов свободно порождённых и папповых проективных плоскостей ставят эти классы в один ряд с другими эффективно полными классами из [39], что потенциально позволяет получать новые примеры эффективно полных классов. Результаты и методы работы могут быть использованы для дальнейших исследований по теории проективных плоскостей.

Методы исследований. В работе использованы методы теории вычислимых моделей и алгебраической теории проективных плоскостей. Также используются методы общей теории вычислимости, теории автоматных моделей и классической теории моделей.

Апробация результатов. По результатам диссертации сделаны доклады на международных конференциях «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2007, 2012, 2014, 2016 гг.), «Logic Colloquium» (София, Болгария, 2009 г.; Барселона, Испания, 2011 г.; Вена, Австрия, 2014 г.; Хельсинки, Финляндия, 2015 г.; Лидс, Великобритания, 2016 г.), «Computability in Europe» (Афины, Греция, 2008 г.; Кембридж, Великобритания, 2012 г.), «Computability and Models» (Новосибирск, 2007 г.), «Вычислимость и модели» (Усть-Каменогорск, Казахстан, 2009 г.), а также на совместном российско-австрийском семинаре в Исследовательском центре имени Курта Гёделя (Вена, Австрия, 2010 г.). Результаты диссертации докладывались на совместных семинарах ИМ СО РАН и НГУ «Алгебра и логика», «Конструктивные модели», Семинаре имени А.И. Ширшова и на Общеинститутском математическом семинаре ИМ СО РАН.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [56–76], из них [56–65] входят в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук. Работа [61] написана в соавторстве с А.С. Денисенко. В диссертацию вошёл лишь тот результат из [61], который был получен автором диссертации самостоятельно, остальные результаты из [61] принадлежат А.С. Денисенко.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Каждая глава разбита на параграфы. Список литературы приведён в алфавитном порядке и содержит 95 наименований. Объём диссертации — 127 страниц.

Содержание диссертации

Перейдём к описанию глав и параграфов диссертации, выделяя её основные результаты в виде теорем и их следствий.

Глава 1 диссертации является вводной. В ней излагаются необходимые предварительные сведения (определения, обозначения, результаты) из теории вычислимых моделей, теории автоматных моделей и теории проективных плоскостей.

Глава 2 посвящена проблеме существования вычислимых представлений моделей из различных классов проективных плоскостей.

В § 2.1 показывается, что если конфигурация $\mathfrak{A}$ имеет вычислимые множества элементов 1-го и 2-го типов и $\mathbf{d}$-вычислимое отношение инцидентности, то конструкция Ширшова позволяет строить $\mathbf{d}$-вычислимое представление проективной плоскости $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, свободно порождённой конфигурацией $\mathfrak{A}$. Отсюда следует, что любая счётная свободная проективная плоскость имеет вычислимое представление. Изложенная в § 2.1 конструкция будет неоднократно использована в следующих главах.

В § 2.2 излагается основанный на идее координатизации метод относительной элементарной определимости ассоциативных тел (полей) в классе дезарговых (папповых) проективных плоскостей. Используя данный метод в § 2.3, мы доказываем, что дезаргова (паппова) проективная плоскость имеет $\mathbf{d}$-вычислимое представление тогда и только тогда, когда её координатное тело (поле) имеет $\mathbf{d}$-вычислимое представление. Изложенные в § 2.2 и § 2.3 конструкции будут также применяться в следующих главах.

В § 2.4 изучаются автоматные представления проективных плоскостей. Доказывается, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.

Из всех полученных в главе 2 результатов основным мы считаем только следующую теорему:

Теорема 2.4.5. *Произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.*

Глава 3 содержит решение проблемы существования вычислимых нумераций типов вычислимого изоморфизма для основных классов проективных плоскостей. Доказано, что ни один из следующих классов вычислимых проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, дезарговы плоскости, папповы плоскости, произвольные проективные плоскости.

Для доказательства невычислимости классов свободных, свободно порождённых и произвольных проективных плоскостей мы показываем, что в некотором несущественном обогащении свободная проективная плоскость $\mathfrak{F}_\omega$ счётного ранга является неограниченной [7].

В § 3.1 определяется некоторое несущественное обогащение $\mathfrak{F}'_\omega$ модели $\mathfrak{F}_\omega$ и его представление в виде вычислимой цепи конечных моделей, которое потребуется для доказательства неограниченности модели $\mathfrak{F}'_\omega$. Также для доказательства неограниченности $\mathfrak{F}'_\omega$ необходимо установить факт существования изоморфных вложений конечных подмоделей $\mathfrak{F}'_\omega$ с рядом дополнительных свойств — описанию подобных вложений посвящён § 3.2.

В § 3.3 окончательно излагается доказательство неограниченности модели $\mathfrak{F}'_\omega$, и в качестве следствий формулируются полное описание вычислимых размерностей свободных проективных плоскостей и результат о невычислимости классов свободных, свободно порождённых и произвольных проективных плоскостей.

Следствие 3.3.2. *Вычислимая размерность любой счётной свободной проективной плоскости равна* 1 *или* ω. *Свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен.*

Следствие 3.3.3. *Пусть K — любой из следующих классов:*

(1) класс всех свободных проективных плоскостей,

(2) класс всех свободно порождённых проективных плоскостей,

(3) класс всех проективных плоскостей.

Тогда K^c не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

Для доказательства невычислимости классов папповых и дезарговых проективных плоскостей рассматривается алгебраически замкнутое поле $\mathfrak{K}_\omega$ счётного ранга трансцендентности над $\mathbb{Q}$.

В § 3.4, используя неограниченность поля $\mathfrak{K}_\omega$ (см. [12, следствие 5.1.8]), мы показываем, что для любого вычислимого семейства дезарговых (папповых) проективных плоскостей существует такое вычислимое представление $\mathfrak{A}$ папповой проективной плоскости, определённой полем $\mathfrak{K}_\omega$, что $\mathfrak{A}$ не является вычислимо изоморфным ни одной плоскости из семейства. Отсюда, как следствие, получены результаты об отсутствии вычислимых нумераций для класса всех дезарговых плоскостей и класса всех папповых плоскостей с точностью до вычислимого изоморфизма.

Следствие 3.4.3. *Пусть K — любой из следующих классов:*

(1) класс всех папповых проективных плоскостей,

(2) класс всех дезарговых проективных плоскостей.

Тогда K^c не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

Глава 4 посвящена доказательству того, что класс всех свободно порождённых проективных плоскостей и класс всех папповых проективных плоскостей являются эффективно полными относительно определённых видов спектров степеней и вычислимых размерностей. В частности, отсюда будет следовать, что в этих классах реализуются все возможные вычислимые размерности.

Для доказательства эффективной полноты класса свободно порождённых проективных плоскостей определяется подходящая эффективная интерпретация симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых плоскостей бесконечного ранга и применяется достаточный признак эффективной полноты из [39]. В качестве одного из следствий предложенной интерпретации также доказывается наследственная неразрешимость теории класса всех свободно порождённых проективных плоскостей.

В § 4.1 определяется интерпретация счётных симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей бесконечного ранга. В § 4.2 устанавливаются некоторые алгебраические свойства определённой в предыдущем параграфе интерпретации графов в свободно порождённых плоскостях.

В § 4.3 приведены алгоритмические свойства построенной интерпретации и доказываются основные результаты о спектрах степеней и эффективных размерностях в классе свободно порождённых проективных плоскостей. Как следствие, получен результат о том, что для любого натурального $n \geqslant 1$ существует вычислимая свободно порождённая проективная плоскость бесконечного ранга, вычислимая размерность которой равна n. Таким образом, критерий вычислимой категоричности свободных проективных плоскостей, доказанный в следствии 3.3.2, не переносится на случай произвольных свободно порождённых плоскостей.

Теорема 4.3.5. *Для любой счётной автоморфно нетривиальной структуры $\mathfrak{M}$ существует свободно порождённая проективная плоскость $\mathfrak{F}$ такая, что*

(1) $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{F}) = \mathrm{DgSp}(\mathfrak{M})$*;*

(2) $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{F}) = \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ *для всех степеней* $\mathbf{d}$*;*

(3) Для любого элемента $a \in |\mathfrak{M}|$ существует элемент $x \in |\mathfrak{F}|$ такой, что $\dim(\langle \mathfrak{F}, x\rangle) = \dim(\langle \mathfrak{M}, a\rangle)$*;*

(4) Для любого отношения $S \subseteq |\mathfrak{M}|$ существует отношение $U \subseteq |\mathfrak{F}|$ такое, что $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{F}}(U) = \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$.

Следствие 4.3.7. *Для любого n такого, что $1 \leqslant n \leqslant \omega$, существует вычислимая свободно порождённая проективная плоскость бесконечного ранга, вычислимая размерность которой равна n.*

В § 4.4 используется ослабленная версия предложенной в § 4.1 интерпретации для доказательства относительной элементарной определимости класса конечных симметричных иррефлексивных графов в классе свободно порождённых проективных плоскостей. Отсюда следует наследственная неразрешимость теории класса всех свободно порождённых проективных плоскостей.

Теорема 4.4.3. *Теория класса всех свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима.*

Для доказательства эффективной полноты класса папповых проективных плоскостей используется доказанный в [46] результат об эффективной полноте класса полей и предложенные в § 2.3 конструкции, позволяющие по заданному представлению $\mathfrak{F}$ координатного поля $\mathfrak{K}$ строить представление $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ соответствующей папповой плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$, и, наоборот, в заданном представлении $\mathfrak{A}$ папповой плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ определять представление $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ для её координатного поля, используя в качестве параметров некоторый невырожденный четырёхуголник $\overline{D}$ в плоскости $\mathfrak{A}$.

В § 4.5 доказывается ряд алгоритмических свойств представления $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ папповой плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ и представления $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ поля $\mathfrak{K}$.

В § 4.6 доказывается, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов. Отсюда, как следствие, получен результат о том, что для любого натурального $n \geqslant 1$ существует вычислимая паппова проективная плоскость вычислимой размерности n.

Теорема 4.6.5. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) Для любой счётной автоморфно нетривиальной структуры $\mathfrak{M}$ существует паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{A}) = \mathrm{DgSp}(\mathfrak{M})$.

(2) Для любой вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$ существует вычислимо представимая паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ такая, что $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{A}) = \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ *для всех степеней* $\mathbf{d}$.

(3) Для любой вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$ и любого отношения $S \subseteq |\mathfrak{M}|$ существуют вычислимо представимая паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ и отношение $U \subseteq |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{A}}(U) = \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(S)$.

(4) Для любой вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ существует вычислимая паппова проективная плоскость $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{A}) = \mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{M})$.

Следствие 4.6.7. *Для любого n такого, что $1 \leqslant n \leqslant \omega$, существует вычислимая паппова проективная плоскость, вычислимая размерность которой равна n.*

Из пункта (2) теоремы 4.6.5 очевидно следует, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров категоричности.

Глава 5 посвящена получению точных оценок сложности некоторых алгоритмических проблем в определённых классах вычислимых проективных плоскостей. Алгоритмические проблемы, сложность которых мы оцениваем, — это проблемы изоморфизма $E(K)$, вложимости $Em(K)$ и вычислимой категоричности $I_{cc}(K)$. Классы проективных плоскостей, в которых мы оцениваем указанные проблемы, — это папповы плоскости, дезарговы плоскости, свободные плоскости конечного ранга, произвольные проективные плоскости.

В § 5.1 доказывается, что в классах папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблема изоморфизма достигает максимальной сложности, т.е. является m-полным Σ^1_1-множеством. Для получения этой оценки мы переносим в класс папповых проективных плоскостей доказанный в [26] результат о том, что проблема изоморфизма полей является m-полным Σ^1_1-множеством.

Теорема 5.1.1. *Проблема изоморфизма $E(K)$ является m-полным Σ^1_1-множеством для следующих классов K:*

(1) папповы проективные плоскости,

(2) дезарговы проективные плоскости,

(3) все проективные плоскости.

Основная цель следующих двух параграфов состоит в получении точной оценки сложности проблемы изоморфизма свободных проективных плоскостей конечного ранга. Для этого сначала в § 5.2 строится серия специальных изоморфных вложения конечных подмоделей $\mathfrak{A}$ свободной плоскости $\mathfrak{F}_n$ в свободную плоскость $\mathfrak{F}_m$, где $m < n$. Затем в § 5.3 доказывается, что проблема изоморфизма в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга является m-полным Δ^0_3-множеством внутри класса.

Теорема 5.3.2. *Проблема изоморфизма в классе всех свободных проективных плоскостей конечного ранга является m-полным Δ^0_3-множеством внутри класса.*

В § 5.4 исследуется проблема вложимости для тех же классов проективных плоскостей, для которых в предыдущих параграфах были получены оценки сложности проблемы изоморфизма. Доказывается, что для классов папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей проблема вложимости имеет такую же сложность как и проблема изоморфизма, т.е. является m-полным Σ^1_1-множеством.

Теорема 5.4.1. *Проблема вложимости $Em(K)$ является m-полным Σ^1_1-множеством для следущих классов K:*

(1) папповы проективные плоскости;

(2) дезарговы проективные плоскости;

(3) произвольные проективные плоскости.

Вместе с тем проблема вложимости в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга вычислима внутри класса. Таким образом, в классе свободных проективных плоскостей конечного ранга сложность проблемы вложимости меньше, чем сложность проблемы изоморфизма.

Теорема 5.4.2. *Проблема вложимости для класса всех свободных проективных плоскостей конечного ранга является вычислимым множеством внутри класса.*

Наконец, в § 5.5 мы доказываем, что проблема вычислимой категоричности является m-полным Π^1_1-множеством в следующих классах моделей: папповы плоскости, дезарговы плоскости, произвольные проективные плоскости. Для доказательства данного результата мы используем полноту класса папповых проективных плоскостей относительно вычислимых размерностей (см. предыдущую главу), а также результаты работ [31, 39, 46].

Теорема 5.5.1. *Проблема вычислимой категоричности $I_{cc}(K)$ является m-полным Π^1_1-множеством для следующих классов K:*

(1) папповы проективные плоскости,

(2) дезарговы проективные плоскости,

(3) все проективные плоскости.

В заключении излагаются итоги выполненного исследования и приводится список основных результатов диссертации.

Изложение работы заканчивается списком литературы.

Автор диссертации выражает глубокую признательность своему научному консультанту академику С.С. Гончарову за постановку задач, постоянное внимание к исследованиям автора и неизменную поддержку в работе.

Список литературы

[1] *Н.А. Баженов*, Степени категоричности суператомных булевых алгебр, Алгебра и логика, 52, № 3 (2013), 271–283.

[2] *Н.А. Баженов*, О степенях автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для булевых алгебр, Алгебра и логика, 55, № 2 (2016), 133–155.

[3] *В.В. Вдовин*, О гомоморфизмах проективных плоскостей I, Сиб. матем. ж., 27, № 1 (1986), 35–44.

[4] *В.В. Вдовин*, О гомоморфизмах проективных плоскостей II, Сиб. матем. ж., 27, № 4 (1986), 35–40.

[5] *В.В. Вдовин*, Гомоморфизмы и алгоритмические проблемы в проективных плоскостях, Сиб. матем. ж., 32, № 6 (1991), 24–29.

[6] *С.С. Гончаров*, Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр, Алгебра и логика, 12, № 1 (1973), 31–40.

[7] *С.С. Гончаров*, Автоустойчивость моделей и абелевых групп, Алгебра и логика, 19, № 1 (1980), 23–44.

[8] *С.С. Гончаров*, Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций, Алгебра и логика, 19, № 6 (1980), 621–639.

[9] *С.С. Гончаров*, Счетные булевы алгебры и разрешимость, Новосибирск, Научная книга, 1996.

[10] *С.С. Гончаров*, Степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций, Тр. МИАН, 274, М., Наука, 2011, 119–129.

[11] *С.С. Гончаров, В.Д. Дзгоев*, Автоустойчивость моделей, Алгебра и логика, 19, № 1 (1980), 45–58.

[12] *С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов*, Конструктивные модели, Новосибирск, Научная книга, 1999.

[13] *С.С. Гончаров, А.В. Молоков, Н.С. Романовский*, Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности, Сиб. матем. ж., 30, № 1 (1989), 82–88.

[14] *С.С. Гончаров, Дж.Ф. Найт*, Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы, Алгебра и логика, 41, № 6 (2002), 639–681.

[15] *В.П. Добрица*, Вычислимость некоторых классов конструктивных алгебр, Сиб. матем. ж., 18, № 3 (1977), 570-579.

[16] *И.Ш. Калимуллин*, Спектры степеней некоторых алгебраических структур, Алгебра и логика, 46, № 6 (2007), 729–744.

[17] *Дж. Карсон, Е. Фокина, В. Харизанова, Дж.Ф. Найт, С. Куинн, К. Сафрански, Дж. Воллбаум*, Вычислимая проблема вложимости, Алгебра и логика, 50, № 6 (2011), 707–732.

[18] *А.А. Никитин*, О гомоморфизмах свободно порожденных проективных плоскостей, Алгебра и логика, 20, № 4 (1981), 419–426.

[19] *А.А. Никитин*, О свободно порожденных проективных плоскостях, Алгебра и логика, 22, № 1 (1983), 61–77.

[20] *А.А. Никитин*, О некоторых алгоритмических проблемах для проективных плоскостей, Алгебра и логика, 23, № 5 (1984), 512–529.

[21] *В. Харизанова, Р. Миллер, А.С. Морозов*, Простые структуры со сложной симметрией, Алгебра и логика, 2010, 49, № 1 (2010), 98–134.

[22] *Б. Хусаинов, Р.А. Шор*, О решении проблемы Гончарова-Эша и проблемы спектра в теории вычислимых моделей, Доклады АН, 371, № 1 (2000), 30–31.

[23] *А.И. Ширшов*, О тернаре проективной плоскости, Алгебра и логика, 24, № 3 (1985), 365–370.

[24] *А.И. Ширшов, А.А. Никитин*, К теории проективных плоскостей, Алгебра и логика, 20, № 3 (1981), 330–356.

[25] *C.J. Ash, J.F. Knght*, Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy (Stud. Logic Found. Math., 144), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 2000.

[26] *W. Calvert*, The isomorphism problem for classes of computable fields, Arch. Math. Logic, 43, № 3 (2004), 327–336.

[27] *W. Calvert*, The isomorphism problem for computable Abelian p-groups of bounded length, J. Symb. Logic, 70, № 1 (2005), 331–345.

[28] *P. Cholak, S.S. Goncharov, B. Khoussainov, R.A. Shore*, Computably categorical structures and expansions by constants, J. Symb. Logic, 64, № 1 (1999), 13–37.

[29] *B.F. Csima, J.N.Y. Franklin, R.A. Shore*, Degrees of categoricity and the hyperarithmetic hierarchy, Notre Dame J. Form. Logic, 54, № 2 (2013), 215–231.

[30] *V.P. Dobritsa*, Computable classes of constructive models, in: Handbook of recursive mathematics, vol. 1 (Stud. Logic Found. Math., 138), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998, 183-233.

[31] *R.G. Downey, A.M. Kach, S. Lempp, A.E.M. Lewis-Pye, A. Montalbán, D.D. Turetsky*, The complexity of computable categoricity, Advances in Mathematics, 268 (2015), 423–466.

[32] *Yu.L. Ershov, S.S. Goncharov, A. Nerode, J.B. Remmel* (eds.), Handbook of recursive mathematics, vol. 1, 2 (Stud. Logic Found. Math., 138-139), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998.

[33] *E.B. Fokina, I. Kalimullin, R. Miller*, Degrees of categoricity of computable structures, Arch. Math. Logic, 49, № 1 (2010), 51–67.

[34] *A. Frolov, V. Harizanov, I. Kalimullin, O. Kudinov, R. Miller*, Spectra of high$_n$ and non-low$_n$ degrees, J. Log. Comput., 22, № 4 (2012), 755–777.

[35] *V.S. Harizanov*, Uncountable degree spectra, Ann. Pure Appl. Logic, 54, № 3 (1991), 255–263.

[36] *V.S. Harizanov*, Some effects of Ash-Nerode and other decidability conditions on degree spectra, Ann. Pure Appl. Logic, 55, № 1 (1991), 51–65.

[37] *V.S. Harizanov*, The possible Turing degree of the nonzero member in a two element degree spectrum, Ann. Pure Appl. Logic, 60, № 1 (1993), 1–30.

[38] *D.R. Hirschfeldt*, Degree spectra of relations on structures of finite computable dimension, Ann. Pure Appl. Logic, 115, № 1-3 (2002), 233–277.

[39] *D.R. Hirschfeldt, B. Khoussainov, R.A. Shore, A.M. Slinko*, Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures, Ann. Pure Appl. Logic, 115, № 1-3 (2002), 71–113.

[40] *D.R. Hughes, F.C. Piper*, Projective planes, New York, Heidelrberg, Berlin, Springer, 1973.

[41] *B. Khoussainov, A. Nerode*, Automatic presentations of structures, Logic and computational complexity, Proc. of LCC-1994 (Lect. Notes Comput. Sci., 960), Berlin, Springer-Verl., 1995, 367–392.

[42] *B. Khoussainov, A. Nerode*, Open questions in the theory of automatic structures, Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci., 94 (2008), 181–204.

[43] *B. Khoussainov, R.A. Shore*, Computable isomorphisms, degree spectra of relations, and Scott families, Ann. Pure Appl. Logic, 93, № 1-3 (1998), 153-193.

[44] *J.F. Knight*, Degrees coded into jumps of orderings, J. Symb. Logic, 51, № 4 (1986), 1034–1042.

[45] *R. Miller*, **d**-computable categoricity for algebraic fields, J. Symb. Logic, 74, № 4 (2009), 1325–1351.

[46] *R. Miller, B. Poonen, H. Schoutens, A. Shlapentokh*, A computable functor from graphs to fields, J. Symb. Logic, to appear.

[47] *L.J. Richter*, Degrees of structures, J. Symb. Logic, 46, № 4 (1981), 723–731.

[48] *S. Rubin*, Automata presenting structures: A survey of the finite string case, Bull. Symb. Log., 14, № 2 (2008), 169–209.

[49] *T.A. Slaman*, Relative to any nonrecursive set, Proc. Am. Math. Soc., 126, № 7 (1998), 2117–2122.

[50] *A. Tarski*, Undecidability of the theory of lattices and projective geometries, J. Symb. Logic, 14, № 1 (1949), 77–78.

[51] *T. Tsankov*, The additive group of the rationals does not have an automatic presentation, J. Symb. Logic, 76, № 4 (2011), 1341–1351.

[52] *V. V. Vdovin*, Simple projective planes, Arch. Math., 47, № 5 (1986), 469–480.

[53] *V. V. Vdovin*, Homomorphisms of freely generated projective planes, Commun. Algebra, 16, № 11 (1988), 2209–2230.

[54] *V. V. Vdovin*, Constructively presented projective planes, Geom. Dedicata, 39, № 1 (1991), 115–123.

[55] *S. Wehner*, Enumerations, countable structures and Turing degrees, Proc. Am. Math. Soc., 126, № 7 (1998), 2131–2139.

Работы автора по теме диссертации:

Публикации в журналах из перечня ВАК:

[56] *Н. Т. Когабаев*, Класс проективных плоскостей невычислим, Алгебра и логика, 47, № 4 (2008), 428–455.

[57] *Н. Т. Когабаев*, Неразрешимость теории проективных плоскостей, Алгебра и логика, 49, № 1 (2010), 3–17.

[58] *Н. Т. Когабаев*, О вычислимой размерности папповых и дезарговых проективных плоскостей, Алгебра и логика, 51, № 1 (2012), 61–81.

[59] *Н. Т. Когабаев*, Сложность проблемы изоморфизма вычислимых проективных плоскостей, Вестник НГУ, Серия: матем., мех., информ., 13, № 1 (2013), 68–75.

[60] *Н. Т. Когабаев*, Невычислимость классов папповых и дезарговых проективных плоскостей, Сиб. матем. ж., 54, № 2 (2013), 325-335.

[61] *А. С. Денисенко, Н. Т. Когабаев*, Об автоматных представлениях проективных плоскостей, Сиб. матем. ж., 55, № 1 (2014), 66–78.

[62] *Н. Т. Когабаев*, Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей, Алгебра и логика, 54, № 5 (2015), 599–627.

[63] *Н. Т. Когабаев*, Π^1_1-полнота проблемы вычислимой категоричности проективных плоскостей, Алгебра и логика, 55, № 4 (2016), 432–440.

[64] *Н. Т. Когабаев*, Свободно порождённые проективные плоскости конечной вычислимой размерности, Алгебра и логика, 55, № 6 (2016), 704–737.

[65] *Н. Т. Когабаев*, О проблеме вложимости вычислимых проективных плоскостей, Алгебра и логика, 56, № 1 (2017), 110–117.

Прочие публикации:

[66] *N. Kogabaev*, The computable dimension of free projective planes, Logic and Theory of Algorithms, CiE 2008, Local Proceedings (Athens, Greece, June 15-20, 2008), p.505.

[67] *N. Kogabaev*, Undecidability of the theory of projective planes, Logic Colloquium 2009, Abstracts (Sofia, Bulgaria, July 31 – August 5, 2009), p.60.

[68] *Н.Т. Когабаев*, Элементарная определимость неориентированных графов в классе проективных плоскостей, Труды международной научной конференции «Вычислимость и модели» (Усть-Каменогорск, 30 августа – 1 сентября 2009), с.38–42.

[69] *N. Kogabaev*, Computable presentations of desarguesian projective planes, Logic Colloquium 2011, Abstracts (Barcelona, Spain, July 11-16, 2011), p.73.

[70] *N. Kogabaev*, On uniform computability in familiar classes of projective planes, Turing Centenary Conference CiE-2012, Abstract of Informal Presentations (Cambridge, UK, June 18-23, 2012), p.79.

[71] *А.С. Денисенко, Н.Т. Когабаев*, Об автоматных представлениях проективных плоскостей, Международная конференция «Мальцевские чтения», Тезисы докладов (Новосибирск, 12-16 ноября 2012), с.36.

[72] *N. Kogabaev*, The isomorphism problem for computable projective planes, Logic Colloquium 2014, Abstract Booklet (Vienna, Austria, July 14-19, 2014), p.68.

[73] *Н.Т. Когабаев*, Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей, Международная конференция «Мальцевские чтения», Тезисы докладов (Новосибирск, 10-13 ноября 2014), с.41.

[74] *N. Kogabaev*, The theory of projective planes is complete with respect to degree spectra and effective dimensions, Logic Colloquium 2015, Book of Abstracts (Helsinki, Finland, 3-8 August 2015), p.687.

[75] *N. Kogabaev*, Freely generated projective planes with finite computable dimension, Logic Colloquium 2016, Book of Abstracts (Leeds, UK, 31 July – 6 August 2016), p.97–98.

[76] *Н.Т. Когабаев*, Вычислимые представления проективных плоскостей, Международная конференция «Мальцевские чтения», Тезисы докладов (Новосибирск, 21-25 ноября 2016), с.16.