На правах рукописи

**Звездина Мария Анатольевна**

# КОНЕЧНЫЕ ПОЧТИ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРОСТЫМ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Новосибирск — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
**Гречкосеева Мария Александровна**.

Официальные оппоненты:
**Кораблева Вера Владимировна**,
доктор физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет», профессор кафедры компьютерной безопасности и прикладной алгебры;

**Нужин Яков Нифантьевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
Институт математики и фундаментальной информатики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский федеральный университет»,
профессор кафедры алгебры и математической логики.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

Защита диссертации состоится 30 марта 2017 г. в _____ на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. Акад. Коптюга 4, Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте `http://math.nsc.ru`.

Автореферат разослан «___» февраля 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Стукачёв Алексей Ильич

## Общая характеристика работы

**Постановка задачи и актуальность темы исследования.**

В диссертации рассматривается вопрос о том, насколько точно конечные простые группы определяются порядками своих элементов. Множество порядков элементов, или *спектр*, является одним из самых естественных числовых параметров конечной группы, и результаты, ограничивающие строение группы в терминах порядков ее элементов, закономерным образом появляются в теории групп начиная с первой половины прошлого века. В 1900 г. Бернсайд [21] классифицировал конечные группы, спектр которых содержит число 2 и не содержит других четных чисел: это либо группы Фробениуса, либо проективные специальные линейные группы $L_2(2^m)$. В 1957 г. Хигмен [28] показал, что непримарная конечная группа, порядки нетривиальных элементов которой являются степенями простых чисел, либо разрешима и бипримарна, либо имеет единственный неабелев композиционный фактор. Своего рода обобщением этих результатов Бернсайда и Хигмена можно считать теорему Грюнберга–Кегеля [36, теорема A] о строении групп с несвязным графом простых чисел: *графом простых чисел* конечной группы называется граф на множестве простых делителей ее порядка, в котором два различных простых числа смежны тогда и только тогда, когда их произведение лежит в спектре, и теорема гласит, что конечная группа с несвязным графом простых чисел либо является группой Фробениуса или двойной группой Фробениуса, либо имеет единственный неабелев композиционный фактор.

В силу того, что многие неабелевы простые группы малого порядка имеют несвязный граф простых чисел, а их спектр зачастую состоит из степеней простых чисел или не содержит других четных чисел, кроме 2, можно ожидать, что любая конечная группа, имеющая такой же спектр, как неабелева простая группа $S$ небольшого порядка, будет иметь не более одного неабелева композиционного фактора и этот фактор будет близок к $S$. Более того, в 1980-х годах Ши [31–33] обнаружил целый ряд неабелевых простых групп, которые однозначно задаются своим спектром в классе конечных групп: спорадические группы $M_{12}$, $Co_2$ и $J_1$, унитарная группа $U_6(2)$ и линейные группы $L_2(2^m)$. Эти и более поздние результаты Ши и его коллег положили начало широкому направлению исследований распознаваемости простых групп по спектру.

Спектр конечной группы $G$ обозначается через $\omega(G)$. Группы с одинаковым спектром называются *изоспектральными*. Через $h(G)$ обозначается число попарно неизоморфных конечных групп, изоспектральных $G$. Если $h(G) = 1$, группа $G$ *распознаваема по спектру.* Если $h(G) < \infty$, группа $G$ *почти распознаваема*, а если $h(G) = \infty$ — *нераспознаваема.* Говорят, что для группы $G$ решена *проблема распознаваемости по спектру*, если $h(G)$ известно и в случае конечного $h(G)$ группы, изоспектральные $G$, явно описаны.

Согласно теореме о классификации конечных простых групп любая конечная неабелева простая группа является либо одной из 26 спорадических групп, либо знакопеременной группой, либо группой лиева типа. К началу диссертационного исследования проблема распознаваемости по спектру была полностью решена для спорадических и знакопеременных групп [9, 30]. Некоторые группы лиева типа также распознаваемы по спектру, но общая картина здесь гораздо более разнообразна (см. обзоры [16, 24]). В частности, для любого натурального $k$ найдется простая группа $S$ лиева типа, такая что $h(S) > k$ [37]. Однако в 2007 г. Мазуровым была высказана гипотеза о том, что начиная с некоторого лиева ранга все простые группы лиева типа будут почти распознаваемы по спектру. В результате усилий нескольких групп математиков эта гипотеза была доказана в 2015 г. и, более того, имеет место следующая теорема (см. [6, 8, 26, 35]).

**Теорема А.** *Пусть $S$ — одна из следующих неабелевых простых групп:*

1) *исключительные группы, кроме ${}^3D_4(2)$;*

2) *$L_n(q)$, $U_n(q)$, где $n \geq 45$ или $q$ четно, кроме $U_4(2)$ и $U_5(2)$;*

3) *$S_{2n}(q)$, $O_{2n+1}(q)$, где $n \geq 28$ или $q$ четно, кроме $S_6(2)$, $S_4(2^m)$ и $S_8(2^m)$;*

4) *$O_{2n}^+(q)$, где $n \geq 31$ или $q$ четно, кроме $O_8^+(2)$;*

5) *$O_{2n}^-(q)$, где $n \geq 30$ или $q$ четно.*

*Тогда любая конечная группа, изоспектральная $S$, изоморфна группе $G$, такой что $S \leq G \leq \operatorname{Aut} S$. В частности, $h(S)$ конечно.*

Группы $G$, удовлетворяющие условию $S \leq G \leq \operatorname{Aut} S$ для некоторой конечной неабелевой простой группы $S$, принято называть *почти простыми* группами (с цоколем $S$). Хорошо известно, что порядок группы $\operatorname{Aut} S/S$ мал по сравнению с порядком группы $S$, поэтому почти простые группы с цоколем $S$ очень близки к $S$. Таким образом, теорема А говорит не просто о том, что $h(S)$ конечно, а том, что группы, изоспектральные $S$, близки к $S$. С другой стороны, ясно, что не всякая почти простая группа изоспектральна своему цоколю, и для полного решения проблемы распознаваемости простых групп по спектру необходимо описать почти простые расширения групп лиева типа, изоспектральные своему цоколю. Эта задача записана в “Коуровскую тетрадь” [15] как вопрос 17.36 и является первой из задач, рассматриваемых в диссертации.

**Проблема 1.** Для каждой неабелевой простой группы $S$ лиева типа описать все конечные группы $G$, такие что $S < G \leq \operatorname{Aut} S$ и $\omega(G) = \omega(S)$.

Граф простых чисел является гораздо более компактным параметром, чем спектр, однако, как показывает, например, вышеупомянутая теорема Грюнберга–Кегеля, может сказать многое о строении группы. Неудивительно, что в ходе исследований распознаваемости групп по спектру делались естественные попытки усилить полученные результаты путем замены спектра на граф простых чисел. Например, простые группы Ри ${}^2G_2(q)$ распознаваемы не только по спектру, но и по графу простых чисел [11, 19]. Однако в общем случае проблема распознаваемости по графу простых чисел значительно сложнее проблемы распознаваемости по спектру, даже если ограничиться классом конечных простых групп. Так, до сих пор не существует полного описания всех пар неизоморфных неабелевых простых групп, графы простых чисел которых совпадают (см. также [15, вопрос 16.26]). Это вторая проблема, рассматриваемая в диссертации.

**Проблема 2.** Для каждой неабелевой простой группы описать все простые группы с таким же графом простых чисел.

**Степень разработанности темы и цели исследования.**

Начиная с 1980-х годов стали появляться отдельные результаты о распознаваемости по спектру групп лиева типа небольшого лиева ранга. Так, была доказана распознаваемость групп $L_2(q)$, групп Ри и Сузуки, $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$, $S_4(3^{2m+1})$, $F_4(2^m)$ (см. обзоры [16, 24]). Эти результаты, в частности, включали в себя и решение проблемы 1 для соответствующих групп. Однако использовавшиеся в этих работах методы решения проблемы 1 были специфическими и не допускали простого обобщения на произвольные группы лиева типа. В 2004–2006 гг. Заварницыным [12, 37] была решена проблема распознаваемости для групп $L_3(q)$ и $U_3(q)$, где $q$ нечетно, и в [12] им был предложен подход к вычислению спектра расширения произвольной группы лиева типа полевым автоморфизмом. С помощью этого подхода проблема 1 была решена для всех линейных и унитарных групп над полями характеристики 2 в работах Гречкосеевой и Ши [10, 25]. Кондратьев доказал, что группа $E_8(q)$ распознаваема по спектру [13]. Распознаваемость группы $G_2(q)$ доказана Васильевым и Старолетовым в [7]. Таким образом, к началу настоящего исследования проблема 1 была не решена для классических групп в нечетной характеристике, для симплектических и ортогональных групп в характеристике 2, а также для следующих серий исключительных групп лиева типа: $F_4(q)$, где $q$ нечетно, ${}^3D_4(q)$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ и $E_7(q)$. Отметим, что сложность проблемы 1 для групп $F_4(q)$ и ${}^3D_4(q)$ состоит, в частности, в отсутствии явного описания их спектров, а для групп $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ и $E_7(q)$ — в более сложном, по сравнению с остальными исключительными группами, строении группы внешних автоморфизмов. Одна из целей диссертации — завершить изучение проблемы 1 для классических групп в характеристике 2 и для исключительных групп лиева типа в произвольной характеристике.

В [27] описано строение конечных групп с графом простых чисел как у спорадической группы. В частности, получено решение проблемы 2 для спорадических групп. Знакопеременная группа $A_{10}$ однозначно характеризуется своим графом простых чисел в классе конечных простых групп (см. [14]). В [11] доказана распознаваемость по графу простых чисел групп $J_4$, $G_2(7)$ и ${}^2G_2(q)$ при $q > 3$. Из этой работы также следует решение проблемы 2 для группы $L_3(7)$. В [38] доказана распознаваемость по графу группы $L_{16}(2)$. Группы $L_2(q)$ распознаваемы по графу при некоторых $q$ (см. обзор [29]). В диссертации проблема 2 рассматривается для простых знакопеременных групп.

**Основные результаты диссертации.**

1. Доказано, что спектр нетривиального автоморфного расширения конечной простой симплектической или ортогональной группы над полем характеристики 2 не может совпадать со спектром этой группы (теоремы 1 и 2).

2. Получено описание автоморфных расширений простых групп ${}^3D_4(q)$, $F_4(q)$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ и $E_7(q)$, имеющих такой же спектр, как их цоколь (теоремы 3–6).

3. Показано, что за конечным числом явно описанных исключений конечная простая группа, имеющая такой же граф простых чисел, как знакопеременная группа, также является знакопеременной группой (теорема 7).

**Научная новизна и значимость работы.** Работа носит теоретический характер. Все полученные результаты являются новыми. Теоремы 3–6 завершают исследование распознаваемости по спектру простых исключительных групп, а теоремы 1 и 2 завершают исследование проблемы 1 для простых классических групп в характеристике 2. Теорема 7 используется в [18] при изучении характеризуемости знакопеременных групп порядком и графом простых чисел, а также в [17, 20] при изучении случаев совпадения графов простых чисел конечной простой группы и ее собственной подгруппы. Результаты работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории групп и включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

**Методы исследования.** Изучение порядков элементов почти простых групп с лиевым цоколем базируется на теореме Стейнберга о том, что группа автоморфизмов группы лиева типа является расщепляемым расширением группы внутренне-диагональных автоморфизмов посредством полевых и графовых автоморфизмов. Для собственно вычисления порядков используется комбинация подхода, разработанного в [12] на основе некоторого следствия теоремы Ленга–Стейнберга [34], с хорошо известными результатами о классах сопряженности автоморфизмов и строении их централизаторов. Также используются явные арифметические описания спектров исследуемых групп и их универсальных версий из [1–3] и двойственность между группой внутренне-диагональных автоморфизмов группы лиева типа и универсальной версией ее дуальной группы [23]. Графы простых чисел неабелевых простых групп изучаются с помощью критериев смежности вершин в этих графах, полученных в [4, 5]. Для сравнения как спектров, так и графов простых чисел, применяются лемма Жигмонди о существовании примитивного делителя и другие хорошо известные теоретико-числовые результаты.

**Апробация результатов.** Результаты диссертации докладывались на 9-ой Международной летней школе "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры" (Новосибирск, 2011), Международной конференции по алгебре и геометрии, посвященной 80-летию со дня рождения А.И. Старостина (Екатеринбург, 2011), 43-й Всероссийской молодежной школе-конференции "Современные проблемы математики" (Екатеринбург, 2012), Международной конференции "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2013–2016), Международной конференции "Ischia Group Theory 2014" (Неаполь, Италия, 2014), Международной молодёжной школе-конференции "Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей" (Новосибирск, 2014), Международной конференции "Finite Simple Groups and Related Topics" (Уорик, Великобритания, 2015), Международной конференции "Graphs and Groups, Spectra and Symmetries" (Новосибирск, 2016), а также неоднократно обсуждались на семинарах "Теория групп" и "Алгебра и логика" Института математики СО РАН и Новосибирского государственного университета.

**Публикации.** Результаты работы опубликованы в [39–48]. Основные результаты диссертации опубликованы в [39–42] в изданиях, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук. Результаты работы [41] получены в неразделимом соавторстве с научным руководителем М. А. Гречкосеевой.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 77 страницах, включает 3 таблицы и 3 рисунка. Главы диссертации подразделяются на параграфы. Основные результаты глав сформулированы в виде теорем и имеют сквозную нумерацию. Вспомогательные утверждения имеют тройную нумерацию: номер главы, номер параграфа в главе и номер утверждения в текущем параграфе. Формулы имеют двойную нумерацию: номер главы и номер формулы внутри главы. Список литературы содержит 102 наименования. Работы автора по теме диссертации приведены отдельным списком.

## Основное содержание диссертации

Во **введении** приводится постановка задачи, аргументируется актуальность темы исследования и описывается степень ее разработанности. Излагаются цели и задачи исследования, приводятся основные результаты диссертации и методы, применяемые в исследовании. Отражается новизна полученных результатов, их теоретическая и практическая значимость, приводятся данные об апробации и публикации результатов диссертации.

**Первая глава** содержит необходимые предварительные сведения. В § 1.1 приводятся теоретико-числовые сведения, в том числе лемма Жигмонди о существовании примитивных простых делителей. В § 1.2 приводятся арифметические описания спектров простых симплектических и ортогональных групп лиева типа в характеристике 2 и исключительных групп типов $E_6$ и $E_7$, полученные в [1–3], а также арифметические критерии смежности вершин в графах простых чисел простых классических групп из [4, 5]. В § 1.3 определяются автоморфизмы конечных групп лиева типа в контексте алгебраических групп. В частности, для простой группы $S$ определяется ее группа внутренне-диагональных автоморфизмов $\operatorname{Inndiag} S$, полевой и графовый автоморфизмы $\varphi$ и $\gamma$. На основании подхода, предложенного А.В. Заварницыным в [12], доказывается

**Лемма 1.3.3.** *Пусть $S = {}^d\Phi(q)$ — простая группа лиева типа, отличная от групп Ри и Сузуки, и $\varphi$ — ее полевой автоморфизм. Пусть $\beta$ — элемент из $\langle\varphi\rangle$ порядка $k$ и $(k, d) = 1$. Тогда $\omega(S\beta) = k\omega({}^d\Phi(q_0))$ и*

$\omega(\mathrm{Inndiag}\, S\beta) = k\omega(\mathrm{Inndiag}\, {}^d\Phi(q_0))$, *где* $q_0 = q^{1/k}$. *В частности,*

$$\omega(S \rtimes \langle\beta\rangle) = \bigcup_{r|k} r\omega({}^d\Phi(q_0^{k/r})).$$

В **главе 2** доказывается, что спектр нетривиального автоморфного расширения простой симплектической или ортогональной группы над полем характеристики 2 не может совпадать со спектром самой группы. Основным результатом главы являются следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть* $S$ *— конечная простая симплектическая группа* $S_{2n}(q)$, *где* $q$ *четно. Если* $S < G \leq \mathrm{Aut}\, S$, *то* $\omega(G) \neq \omega(S)$.

**Теорема 2.** *Пусть* $S$ *— конечная простая ортогональная группа* $O_{2n}^{\varepsilon}(q)$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, *где* $q$ *четно. Если* $S < G \leq \mathrm{Aut}\, S$, *то* $\omega(G) \neq \omega(S)$.

Доказательство этих теорем проводится в § 2.2 и § 2.3. При изучении расширений полевыми автоморфизмами применяются лемма 1.3.3, лемма Жигмонди и описание множества $\omega(S)$. В случаях, когда у группы $S$ существуют автоморфизмы, не являющиеся полевыми, используются также сведения о централизаторах таких автоморфизмов.

В **главе 3** доказываются критерии совпадения спектра нетривиального автоморфного расширения исключительной группы $S$ со спектром самой группы $S$, в случаях, когда $S$ — одна из следующих исключительных групп: $F_4(q)$, где $q$ нечетно, ${}^3D_4(q)$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$.

Первая часть главы посвящена арифметическому описанию спектров групп $F_4(q)$ и ${}^3D_4(q)$. В § 3.1 излагается подход к описанию спектров групп лиева типа, основанный на работе Картера о связных централизаторах полупростых элементов этих групп. В § 3.2 доказываются следующие утверждения.

**Предложение 3.2.1.** *Множество порядков элементов простой группы* $S = F_4(q)$, *где* $q$ *— степень простого числа* $p$, *совпадает с множеством делителей следующих чисел:*

1) $q^4 - q^2 + 1$, $q^4 + 1$, $(q^2 \pm q + 1)(q^2 - 1)$, $(q^4 - 1)/(2, q - 1)$;
2) $p(q^3 \pm 1)$, $p(q^2 + 1)(q \pm 1)$, $p(q^2 - 1)$;
3) $4(q^2 \pm 1)$, $4(q^2 \pm q + 1)$, $8(q \pm 1)$, $16$, *если* $p = 2$;
4) $9(q^2 \pm 1)$, $27$, *если* $p = 3$;
5) $25(q \pm 1)$, *если* $p = 5$;
6) $49 \cdot 2$, *если* $p = 7$;
7) $121$, *если* $p = 11$.

**Предложение 3.2.2.** *Множество порядков элементов простой группы* ${}^3D_4(q)$, *где* $q$ *— степень простого числа* $p$, *совпадает с множеством делителей следующих чисел:*

1) $(q^3-1)(q+1)$, $(q^3+1)(q-1)$, $q^4-q^2+1$;

2) $p(q^3\pm 1)$;

3) $4(q^2\pm q+1)$, $8$, *если* $p=2$;

4) $p^2$, *если* $p\in\{3,5\}$.

В § 3.3 предложения 3.2.1, 3.2.2 и лемма 1.3.3 используются при доказательстве следующих теорем.

**Теорема 3.** *Пусть* $S=F_4(q)$, *где* $q$ *— степень нечетного простого числа* $p$, *и пусть* $S<G\leqslant \operatorname{Aut} S$. *Тогда* $\omega(G)=\omega(S)$ *в том и только том случае, если* $G/S$ *является* 2*-группой и* $p\notin\{3,7,11\}$.

**Теорема 4.** *Пусть* $S={}^3D_4(q)$, *где* $q$ *— степень простого числа* $p$, *и пусть* $S<G\leqslant \operatorname{Aut} S$. *Тогда* $\omega(G)=\omega(S)$ *в том и только том случае, если* $G/S$ *является* 2*-группой и* $p\geq 7$.

В § 3.4 и § 3.5 доказываются два других основных результата главы.

**Теорема 5.** *Пусть* $S=E_6^{\varepsilon}(q)$, *где* $q$ *— степень простого числа* $p$, *и* $S<G\leq \operatorname{Aut} S$. *Тогда* $\omega(G)=\omega(S)$ *в том и только в том случае, когда* $G$ *является расширением группы* $S$ *с помощью полевого автоморфизма,* $G/S$ *является* 3*-группой,* 3 *делит* $q-\varepsilon 1$ *и* $p\notin\{2,11\}$.

**Теорема 6.** *Пусть* $S=E_7(q)$, *где* $q$ *— степень простого числа* $p$, *и* $S<G\leq \operatorname{Aut} S$. *Тогда* $\omega(G)=\omega(S)$ *в том и только в том случае, когда* $G$ *является расширением группы* $S$ *с помощью полевого автоморфизма,* $G/S$ *является* 2*-группой и* $p\notin\{2,13,17\}$.

В § 3.6 сведена информация о распознаваемости простых исключительных групп по спектру (теорема B). Для каждой почти распознаваемой группы указывается число попарно неизоморфных конечных групп с таким же спектром и описывается их строение.

Теоремы 3, 4 получены в неразделимом соавторстве с М.А. Гречкосеевой и опубликованы в [41]. Теоремы 5, 6 получены автором лично и опубликованы в [42].

В **главе 4** изучаются случаи совпадения графа простых чисел конечной простой группы с графом простых чисел знакопеременной группы. Обозначим граф простых чисел группы $G$ через $GK(G)$. Основным результатом главы является следующая теорема.

**Теорема 7.** *Пусть* $S=A_m$, *где* $m\geq 5$, *и* $G$ *— конечная простая группа, не изоморфная* $S$. *Тогда верны следующие утверждения.*

1) *Если* $m\geq 10$ *и* $GK(G)=GK(S)$, *то* $G$ *— знакопеременная группа.*

2) *Если* $m\geq 10$, $n$ *нечетно и* $m$, $m-4$ *— составные числа, то* $GK(A_{m-1})=GK(A_m)$.

3) *Если* $m\leq 9$, *то* $GK(G)=GK(S)$ *тогда и только тогда, когда* $(S,G)\in\{(A_5,A_6),\ (A_7,L_2(49)),\ (A_7,U_4(3)),\ (A_9,J_2),\ (A_9,S_6(2)),$

$(A_9, O_8^+(2))\}$.

Теорема 7 сводит изучение проблемы 2 для знакопеременных групп к сравнению графов двух различных знакопеременных групп. Доказательство того, что все случаи совпадения графов знакопеременных групп указаны в теореме 7, можно провести лишь по модулю теоретико-числовой гипотезы, связанной с бинарной проблемой Гольдбаха.

**Гипотеза** $(*)$**.** *Для любого четного числа* $n > 6$ *найдется пара различных простых чисел, сумма которых равна* $n$.

**Теорема 8.** *Пусть* $S = A_m$, *где* $m \geq 10$, *и* $G = A_n$, *где* $5 \leq n < m$. *Если верна гипотеза* $(*)$, *то* $GK(G) = GK(S)$ *тогда и только тогда, когда* $n = m - 1$, $m$ *нечетно и* $m$, $m - 4$ *— составные числа.*

Результаты главы получены автором лично и опубликованы в [39].

В **заключении** приводится основные результаты диссертации. Изложение работы завершается списком литературы.

Автор благодарен своему научному руководителю М. А. Гречкосеевой и профессору А. В. Васильеву за поставленные задачи и всестороннюю поддержку, а также коллективу лаборатории теории групп ИМ СО РАН и кафедры алгебры и математической логики ММФ НГУ за сотрудничество и атмосферу, в которой выполнялась диссертационная работа.

## Список литературы

[1] Бутурлакин А. А. Спектры конечных простых групп $E_7(q)$ // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57, № 5. — С. 988–998.

[2] Бутурлакин А. А. Спектры конечных симплектических и ортогональных групп // Матем. тр. — 2010. — Т. 13, № 2. — С. 33–83.

[3] Бутурлакин А. А. Спектры конечных простых групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52, № 3. — С. 284–304.

[4] Васильев А. В., Вдовин Е. П. Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. — 2005. — Т. 44, № 6. — С. 682–725.

[5] Васильев А. В., Вдовин Е. П. Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, № 4. — С. 425–470.

[6] Васильев А. В., Гречкосеева М. Распознаваемость по спектру для простых классических групп в характеристике 2 // Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, № 6. — С. 1264–1276.

[7] Васильев А. В., Старолетов А. М. Распознаваемость групп $G_2(q)$ по спектру // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52, № 1. — С. 3–21.

[8] Васильев А. В., Старолетов А. М. Почти распознаваемость простых исключительных групп лиева типа // Алгебра и логика. — 2014. — Т. 53, № 6. — С. 669–692.

[9] Горшков И. Б. Распознаваемость знакопеременных групп по спектру // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52, № 1. — С. 57–63.

[10] Гречкосеева М. А. Распознавание по спектру конечных простых линейных групп над полями характеристики 2 // Алгебра и логика. — 2008. — Т. 47, № 4. — С. 405–427.

[11] Заварницин А. В. О распознавании конечных групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. — 2006. — Т. 45, № 4. — С. 390–408.

[12] Заварницин А. В. Распознавание простых групп $U_3(q)$ по порядкам элементов // Алгебра и логика. — 2006. — Т. 45, № 2. — С. 185–202.

[13] Кондратьев А. С. Распознаваемость по спектру групп $E_8(q)$ // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 146–149.

[14] Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных четырепримарных группах // Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — Vol. 17, no. 4. — P. 142–159.

[15] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Под ред. В. Д. Мазуров, Е.И. Хухро. — 17 изд. — Новосибирск : Институт математики СО РАН, 2010. — С. 218.

[16] Мазуров В. Д. Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. Серия Математика и механика. — 2005. — Т. 36. — С. 119–138.

[17] Маслова Н. В. О совпадении графов Грюнберга–Кегеля конечной простой группы и ее собственной подгруппы // Тр. ИММ УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 1. — С. 156–168.

[18] Махмудифар А., Хосрави Б. О характеризуемости знакопеременных групп порядком и графом простых чисел // Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, № 1. — С. 149–157.

[19] Хосрави А., Хосрави Б. Квазираспознавание простой группы ${}^2G_2(q)$ по графу простых чисел // Сиб. мат. журн. — 2007. — Vol. 48, no. 3. — P. 707–715.

[20] Burness T. C., Covato E. On the prime graph of simple groups // Bull. Aust. Math. Soc.. — 2015. — Vol. 91, no. 2. — P. 227–240.

[21] Burnside W. On a class of groups of finite order // Trans. Cambridge Phil. Soc. — 1900. — Vol. 18. — P. 269–276.

[22] Carter R. W. Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type // Proc. Lond. Math. Soc. (3). — 1978. — Vol. 37. — P. 491–507.

[23] Carter R. W. Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters. — Chichester-New York etc. : John Wiley & Sons, 1985.

[24] Grechkoseeva M. A., Shi W., Vasil'ev A. V. Recognition by spectrum for finite simple groups of Lie type // Front. Math. China. — 2008. — Vol. 3, no. 2. — P. 275–285.

[25] Grechkoseeva M. A., Shi W. J. On finite groups isospectral to finite simple unitary groups over fields of characteristic 2 // Сиб. электрон. матем. изв. — 2013. — Т. 10. — С. 31–37.

[26] Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V. On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups // J. Group Theory. — 2015. — Vol. 18, no. 5. — P. 741–759.

[27] Hagie M. The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. — 2003. — Vol. 31, no. 9. — P. 4405–4424.

[28] Higman G. Finite groups in which every element has prime power order // J. London Math. Soc. — 1957. — Vol. 32. — P. 335–342.

[29] Khosravi B. On the prime graph of a finite group // London Mathematical Society Lecture Note Series. — 2009. — Vol. 388. — P. 424–428.

[30] Mazurov V. D., Shi W. A note to the characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. — 1998. — Vol. 5, no. 3. — P. 285–288.

[31] Shi W. A characteristic property of $PSL_2(7)$ // J. Aust. Math. Soc. Ser. A. — 1984. — Vol. 36. — P. 354–356.

[32] Shi W. A characteristic property of $A_5$ // J. Southwest-China Teach. Univ. — 1986. — Vol. 11. — P. 11–14.

[33] Shi W. A characterization of $J_1$ and $PSL_2(2^n)$ // Adv. in Math. (Beijing). — 1987. — Vol. 16. — P. 397–401.

[34] Steinberg R. Endomorphisms of linear algebraic groups. — Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1968.

[35] Vasil'ev A. V. On finite groups isospectral to simple classical groups // J. Algebra. — 2015. — Vol. 423. — P. 318–374.

[36] Williams J. S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. — 1981. — Vol. 69. — P. 487–513.

[37] Zavarnitsine A. V. Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders // J. Group Theory. — 2004. — Vol. 7, no. 1. — P. 81–97.

[38] Zavarnitsine A. V. Uniqueness of the prime graph of $L_{16}(2)$ // Сиб. электрон. матем. изв. — 2010. — Т. 7. — С. 119–121.

### Работы автора по теме диссертации

[39] Звездина М. А. О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, № 1. — С. 65–76.

[40] Zvezdina M. A. Spectra of automorphic extensions of finite simple symplectic and orthogonal groups over fields of characteristic 2 // Сиб. электрон. матем. изв. — 2014. — Т. 11. — С. 823–832.

[41] Grechkoseeva M. A., Zvezdina M. A. On spectra of automorphic extensions of finite simple groups $F_4(q)$ and ${}^3D_4(q)$ // J. Algebra Appl. — 2016. — Vol. 15, no. 4. — 1650168 [13 pages].

[42] Звездина М. А. О спектрах автоморфных расширений конечных простых исключительных групп лиева типа // Алгебра и логика. — 2016. — Т. 55, № 5. — С. 540–557.

[43] Звездина М. А. О простых группах с графом простых чисел, как у знакопеременной группы // Современные проблемы математики: тезисы 43-й Всероссийской молодежной школы-конференции. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2012. — С. 39.

[44] Zvezdina M. A. Spectrum of automorphic extensions of simple symplectic groups over fields of characteristic 2 // Международная конференция «Мальцевские чтения», тезисы докладов. — Новосибирск, 2013. — С. 127. — Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference / malmeet /13/maltsev13.pdf.

[45] Zvezdina M. A. On spectra of automorphic extensions of Steinberg's triality groups // Международная конференция «Мальцевские чтения», тезисы докладов. — Новосибирск, 2014. — С. 99. — Режим доступа: http://math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf.

[46] Grechkoseeva M. A., Zvezdina M. A. Spectra of automorphic extensions of finite simple groups $F_4(q)$ and ${}^3D_4(q)$ // Международная конференция «Мальцевские чтения», тезисы докладова. — Новосибирск, 2015. — С. 139. — Режим доступа: http://math.nsc.ru/conference/malmeet/15/malmeet15.pdf.

[47] Zvezdina M. A. On the spectra of automorphic extensions of finite simple exceptional groups of Lie type // Международная конференция «Группы и графы, спектры и симметрии», тезисы докладов. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2016. — С. 115.

[48] Zvezdina M. A. Spectra of automorphic extensions of finite simple groups $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ and $E_7(q)$ // Международная конференция «Мальцевские чтения», тезисы докладов. — Новосибирск, 2016. — С. 134. — Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/16/malmeet16.pdf.

Звездина Мария Анатольевна

# Конечные почти простые группы, изоспектральные простым

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук