На правах рукописи

УДК 512.554.7

Захаров Антон Станиславович

АЛГЕБРЫ НОВИКОВА - ПУАССОНА И СУПЕРАЛГЕБРЫ ЙОРДАНОВЫХ СКОБОК

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск-2016

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский государственный университет».

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук **Желябин Виктор Николаевич**

Официальные оппоненты:
Сверчков Сергей Робертович, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский институт управления - филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации», директор;
Исаев Исмаил Мусаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Алтайский государственный педагогический университет», заведующий кафедрой.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Новосибирский государственный технический университет".

Защита диссертации состоится 30 марта 2017 года в _______ на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: Российская Федерация, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга 4.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан ___ февраля 2017 года

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук ________ А. И. Стукачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Данная работа посвящена изучению алгебр Новикова - Пуассона и соответствующих им йордановых супералгебр. Алгебры Новикова изначально возникли в работах И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфмана в [1] как формализм, описывающий условие гамильтоновости операторов определенного вида, действующих на гладких конечномерных многообразиях со значениями в алгебрах Ли векторных полей. В работе А. А. Балинского и С. П. Новикова в [2] алгебры Новикова были введены для изучения скобок Пуассона гидродинамического типа.

Е. И. Зельманов в [3] показал, что всякая конечномерная алгебра Новикова над полем характеристики нуль является полем. В. Т. Филлиповым в [4] были построены примеры неассоциативных конечномерных простых алгебр Новикова над полем ненулевой характеристики и бесконечномерных простых алгебр Новикова над полем нулевой характеристики. Изучению простых алгебр Новикова с идемпотентом посвящены работы М. Дж. Осборна [5, 6, 7]. В частности, были описаны простые алгебры Новикова с идемпотентом над полем простой характеристики. Развив результаты М. Дж. Осборна, К. Ксу в [8] описал конечномернные алгебры Новикова над алгебраически замкнутым полем характерики $p > 2$.

К. Ксу в [9] ввел понятие алгебр Новикова - Пуассона. А именно, это — алгебра $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ с двумя умножениями $\cdot$ и $\circ$, причем $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра, $\langle A, \circ \rangle$ — алгебра Новикова, то есть верны тождества

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y, \ (x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (y \circ x) \circ z - y \circ (x \circ z),$$

$$xy \circ z = x(y \circ z), \ zx \circ y - x \circ yz = zy \circ x - y \circ xz.$$

Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированием D. Зададим на A новое умножение $\circ$, полагая $a \circ b = aD(b) + \gamma ab$, где $\gamma \in A$. Тогда $\langle A, \circ \rangle$ — алгебра Новикова (см. [1, 9]). Алгебры Новикова, определенные вышеуказанным способом, будем называть алгебрами Новикова векторного типа. При этом $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра Новикова - Пуассона, которую так же будем называть алгебрами Новикова - Пуассона векторного типа.

[0]Здесь и далее по тексту будем считать, что операция $\cdot$ перед $\circ$ имеет приоритет. Как правило, символ $\cdot$ мы будем опускать.

Понятие алгебры Новикова-Пуассона позволяет изучать алгебры Новикова (см. работы [9, 10]). В частности, алгебры Новикова, описанные в [8] являются алгебрами Новикова - Пуассона векторного типа. В [10] при некоторых ограничениях были описаны бесконечномерные алгебры Новикова над алгбраически замкнутом полем характеристики 0. Эти алгебры также получаются из алгебр Новикова - Пуассона векторного типа. Из сказанного выше следует, что среди алгебр Новикова-Пуассона важную роль играют алгебры Новикова-Пуассона векторного типа. Поэтому возникает

Вопрос 1. *При каком условии алгебра Новикова-Пуассона вкладывается в алгебру Новикова-Пуассона векторного типа.*

Ч. Бай и Д. Менг в работе [11] описали алгебры Новикова размерности 2 и 3 над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Естественно возникает следующий

Вопрос 2. *Можно ли с помощью классификации Ч. Байя и Д. Менга описать алгебры Новикова - Пуассона размерности 2 и 3 над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$? Все ли они векторного типа?*

Рассмотрим $G = \langle e_1, e_2, \dots | e_i e_j = -e_j e_i \rangle$ алгебру Грассмана над $\mathbb{F}$. Тогда алгебра Грассмана допускает $\mathbb{Z}_2$-градуировку $G = G_0 + G_1$, где G_0, G_1 это подпространства, порожденные, соответственно, произведениями четной и нечетной длины.

Пусть $A = A_0 + A_1$ — произвольная алгебра $\mathbb{Z}_2$-градуированная. Тогда $G(A) = G_0 \otimes_{\mathbb{F}} A_0 + G_1 \otimes_{\mathbb{F}} A_1$ является подалгеброй в алгебре $G \otimes_{\mathbb{F}} A$ и называется грассмановой оболочкой супералгебры А. Пусть Ω — произвольное многообразие алгебр. Тогда говорим, что A — супералгебра многообразия Ω, если ее грассманова оболочка $G(A)$ — алгебра многообразия Ω. В частности, супералгебра называется йордановой, если её грассманова оболочка йорданова алгебра, то есть выполнены тождества

$$xy = yx, \ (x^2 y)x = x^2(yx).$$

Одним из способов получения йордановых супералгебр является конструкция И. Л. Кантора [12]. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$, — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра и $A = A_0 + A_1$ с билинейной суперкососимметрической операцией $\{,\}$, которую мы будем называть скобка.

Рассмотрим $J(A) = A + A\xi$, где $A\xi$ — изоморфная копия A. Введем на $J(A)$ умножение $\bullet$ следующим образом:

$$a \bullet b = ab,\ a \bullet b\xi = (ab)\xi,\ a\xi \bullet b = (-1)^{|b|}(ab)\xi,\ a\xi \bullet b\xi = (-1)^{|b|}\{a, b\},$$

где $a, b \in A_0 \cup A_1$, $|a|$ — четность элемента, то есть $|a| = i$ при $a \in A_i$ и ab — произведение в A. Определим $\mathbb{Z}_2$-градуировку, полагая

$$J(A)_0 = A_0 + A_1\xi,\ J(A)_1 = A_1 + A_0\xi$$

Полученная супералгебра называется дубль Кантора, который будем обозначать $J(A, \{\,,\})$. Скобка $\{\,,\}$ называется йордановой, если $J(A, \{\,,\})$ является йордановой супералгеброй.

Пусть $\langle A, \cdot\rangle$ — ассоциативная коммутативная супералгебра с четным дифференцированием ∂, то есть $\partial(A_i) \subseteq A_i$. Определим скобку следующим образом

$$\{a, b\} = \partial(a)b - a\partial(b).$$

Тогда $J(A, \{\,,\})$ — йорданова супералгебра (см. [14, 15]), которая называется йордановой супералгеброй векторного типа и обозначается $J(A, \partial)$. В этом случае скобка $\{\,,\}$ называется йордановой скобкой векторного типа.

Пусть $\langle A, \cdot\rangle$ — унитальная ассоциативная коммутативная супералгебра с йордановой скобкой $\{\,,\}$ такой, что $\{a, 1\} = 0$. В этом случае алгебра $J(A, \{\,,\})$ называется йордановой алгеброй пуассонова типа.

Рассмотрим ассоциативную супералгебру B и определим на векторном пространстве B новое умножение

$$a \odot_s b = \frac{1}{2}(ab + (-1)^{|a||b|}ba).$$

Тогда получим йорданову супералгебру, которую обозначим $B^{(+)_s}$. Йорданова супералгебра J называется специальной, если она вложима (как супералгебра) в супералгебру $B^{(+)_s}$ для подходящей ассоциативной супералгебры B, иначе J называется исключительной. Алгебра называется слабо специальной, если она является гомоморфным образом специальной йордановой супералгебры.

Специальность йордановых супералгебр векторного типа независимо доказали И. П. Шестаков в [14] с одной стороны, Д. Кинг и К. МакКриммон с другой в [15]. В работе [15] показано, что йорданова алгебра пуассоновского типа не всегда специальна. Однако, В. Г. Скосырским в [16] и независимо И. П. Шестаковым [17] была показана слабая специальность супералгебр пуассонова типа. Этот результат был усилен К. Мартинес, Е. И. Зельмановым и И. П. Шестаковым в [18]. И.П. Шестаковым в работе[19] получены необходимые условия специальности.

Рассмотрим алгебру Новикова - Пуассона $\langle A, \cdot, \circ \rangle$. Пусть алгебра $\langle A, \cdot \rangle$ — унитальная. Тогда (см. [9]) $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра Новикова - Пуассона векторного типа и умножение Новикова определяется по правилу

$$a \circ b = a\partial(b) + \gamma ab.$$

Зададим скобку на $\langle A, \cdot \rangle$ следующим образом

$$\{a, b\} = a \circ b - b \circ a.$$

Тогда

$$\{a, b\} = a\partial(b) - \partial(a)b,$$

то есть полученная скобка является йордановой скобкой векторного типа. Как уже было отмечено, соответствующий дубль Кантора является супералгеброй векторного типа, а значит и специальной йордановой супералгеброй. В связи с этим возникает естественный

Вопрос 3. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ - произвольная алгебра Новикова–Пуассона над полем характеристики, отличной от 2. Зададим скобку следующим образом*

$$\{a, b\} = a \circ b - b \circ a.$$

Верно ли, что $J(A, \{\ ,\ \})$ — специальная йорданова супералгебра?

В работе [20] доказано, что если у алгебры Новикова - Пуассона ассоциативная коммутативнвя часть является унитальной, то простота алгебры Новикова эквивалентна простоте соответствующего дубля Кантора. Там же сформулирован

Вопрос 4. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ - произвольная алгебра Новикова–Пуассо- на над полем характеристики, отличной от 2. Зададим скобку следующим образом*

$$\{a, b\} = a \circ b - b \circ a.$$

Верно ли, что $\langle A, \circ \rangle$ проста тогда и только тогда, когда $J(A, \{\ ,\ \})$ — простая йорданова супералгебра?

Цель работы. Главная цель работы состоит в изучение алгебр Новикова - Пуассона, соответствующих йордановых супералгебр и связи между ними. В частности, дать ответы на поставленные ранее вопросы 1–4.

Научная новизна. Представленные в диссертации результаты являются новыми, получены автором самостоятельно (п. 1, п. 2 и п. 4) или в неразделимом соавторстве с научным руководителем В. Н. Желябиным (п. 3).

Теоретическая и практическая значимость результатов. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть полезны для специалистов в теории дифференциальных алгебр, алгебр Новикова - Пуассона и йордановых супералгебр, а также могут быть включены в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в областях алгебры.

Методология и методы исследования. В работе используются методы комбинаторной и структурной теории дифференциальных алгебр, алгебр Новикова - Пуассона и йордановых супералгебр.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Найдены условия того, что алгебра Новикова - Пуассона вкладывается в алгебру Новикова - Пуссона векторного типа.
2. Описаны алгебры Новикова - Пуассона размерности 2, 3 над полем комплексных чисел, приведены алгебры Новикова - Пуассона не векторного типа.
3. Доказано, что коммутатор относительно умножения Новикова есть йорданова скобка на ассоциативной коммутативной части алгебры Новикова - Пуассона, а соответствующий дубль Кантора — специальная йорданова супералгебра.
4. Доказано, что простота алгебры Новикова при некоторых ограничениях на ассоциативную коммутативную часть эквивалентна простоте соответствующего дубля Кантора.

Аппробация результатов. Результаты докладывались на следующих конференциях:

1. Международная конференция "Lie and Jordan algebras, their representations and applications-VI, dedicated to Efim Zelmanov's

60th birthday", Бенту Гонсалвес, Бразилия, 13–19 декабря, 2015 г.

2. Международная конференция "Алгебра и математическая логика: теория и приложения", Казань, Россия, 2–6 июня 2014 г.

3. 52-я Международная научная студенческая конференции "Студент и научно - технический прогресс", Новосибирск, Россия,11–18 апреля 2014 г.

4. Международная конференция "Мальцевские чтения", Новосибирск, Россия, 11–15 ноября мая 2013 г.

5. 51-я Международная научная студенческая конференции "Студент и научно - технический прогресс", Новосибирск, Россия, 12–18 апреля 2013 г.

6. Международная конференция "Мальцевские чтения", Новосибирск, Россия, 12–16 ноября мая 2012 г.

7. Всероссийская молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения-2012", Казань, Россия, 1-6 ноября 2012 г.

8. Юбилейная 50-я Международная научная студенческая конференции "Студент и научно - технический прогресс", Новосибирск, Россия, 13–19 апреля 2012 г.

9. Всероссийская молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения-2012", Казань, Россия, 31 октября – 4 ноября 2011 г.

10. Международная конференция по теории колец посвященная 90-летию со дня рождения А.И. Ширшова, Новосибирск, Россия, 14–18 июля 2011 г.

11. 49-я Международная научная студенческая конференции "Студент и научно - технический прогресс", Новосибирск, Россия, 16-20 апреля 2011 г.

Также, результаты обсуждались на семинаре «Теория колец» им. А. И. Ширшова Института математики СО РАН, семинаре «Алгебра и логика» Новосибирского государственного университета.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [23] – [35]. В том числе, работы [23] – [26] входят в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Результаты работы [25] получены в нераздельном соавторстве с научным руководителем В. Н. Желябиным.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения, списка литературы, 3 таблиц. Она изложена на 77 страницах. Список литературы содержит 40 наименований.

Краткое содержание работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Публикации автора по теме диссертации приведены отдельным списком. Главы диссертации разбиты на параграфы. Нумерация всех формул сквозная. Нумерация всех утверждений тройная: первая цифра указывает номер главы, вторая — номер параграфа, а третья — порядковый номер утверждения. Нумерация формул двойная: первая цифра указывает номер главы, вторая — номер утверждения внутри главы.

Глава 1 (Алгебры Новикова - Пуассона) посвящена изучению произвольных алгебр Новикова - Пуассона. В **параграфе 1.1** вводится более общий класс алгебр, включающий в себя алгебры Новикова - Пуассона. Назовём алгебраическую систему $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ с двумя билинейными операциями $\cdot$ и $\circ$ обобщённой алгеброй Новикова - Пуассона, если $\langle A, \cdot\rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра и верны тождества

$$xy \circ z = x(y \circ z),$$

$$zx \circ y - x \circ yz = zy \circ x - y \circ xz.$$

Справедлива

Лемма 1.1.1. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — обобщенная алгебра Новикова - Пуассона. Тогда в ней имеют место следующие тождества:*

$$a((x \circ y) \circ z - (x \circ z) \circ y) = 0;$$

$$ab((x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) - (y \circ x) \circ z + y \circ (x \circ z)) = 0.$$

В **параграфе 1.2** приводится конструкция кольца частных для обобщенных алгебр Новикова - Пуассона. Для этого выбирается S —

произвольное мультипликативно замкнутое подмножество ассоциативной коммутативной алгебры $\langle A, \cdot \rangle$ и рассматривается кольцо частных $\langle Fr_S(A), \cdot \rangle$ алгебры $\langle A, \cdot \rangle$ относительно множества S. Для $a, b, c \in S$ определим $\lambda_{abc} = \frac{ab \circ c + ac \circ b - a \circ bc}{abc}$.

Лемма 1.2.1. *Пусть $a, b, c, d, e, f \in S$. Тогда $\lambda_{abc} = \lambda_{def}$.*

Определим новое умножение $\circ_{Fr}$ на $Fr_S(A)$ следующим образом:

$$\frac{a}{n} \circ_{Fr} \frac{b}{m} = \lambda \frac{ab}{nm} + \frac{a \circ b}{nm} - \frac{ab \circ m}{nm^2}.$$

Это умножение задано корректно. Более того, справедлива

Лемма 1.2.4. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — обобщённая алгебра Новикова - Пуассона, тогда отображение $\phi : a \mapsto \frac{a}{1}$ будет гомоморфизмом обобщенных алгебр Новикова - Пуассона.*

В качестве ответа на вопрос 1 справедлива

Теорема 1.2.5. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — обобщённая алгебра Новикова - Пуассона, и x не является делителем нуля в алгебре $\langle A, \cdot \rangle$. Тогда $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ есть алгебра Новикова - Пуассона и вложима в алгебру Новикова - Пуассона векторного типа.*

Глава 2 (Алгебры Новикова - Пуассона малых размерностей) посвящена изучению алгебр Новикова - Пуассона размерностей 2 и 3. В **параграфе 2.1** изучаются двухмерные алгебры Новикова - Пуассона. Следующие две теоремы описывают структуру алгебр Новикова - Пуассона размерностей 2.

Теорема 2.1.6. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — двухмерная алгебра Новикова - Пуассона над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с базисом e_1, e_2, причем $\langle A, \circ \rangle$ не является ассоциативной коммутативной алгеброй. Тогда характеристическая матрица алгебры $\langle A, \cdot \rangle$ имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha e_1 \\ \alpha e_1 & \beta e_1 + \alpha e_2 \end{pmatrix},$$

а характеристическая матрица алгебры $\langle A, \circ \rangle$ имеет вид T_3, N_4, N_5 или N_6 (см. [11].*)*

Теорема 2.1.7. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — двухмерная алгебра Новикова - Пуассона над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Предположим, что $\langle A, \circ \rangle$ не является ассоциативной коммутативной алгеброй. Тогда характеристическая матрица алгебры $\langle A, \cdot \rangle$ имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha e_1 \\ \alpha e_1 & \beta e_1 + \alpha e_2 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ была алгеброй Новикова - Пуассона векторного типа, необходимо и достаточно $\alpha \neq 0$

В **параграфе 2.2** изучаются трехмерные алгебры Новикова - Пуассона. Следующие две теоремы описывают структуру алгебр Новикова - Пуассона размерностей 3.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — трехмерная алгебра Новикова - Пуассона над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с базисом e_1, e_2, e_3. Предположим, что $\langle A, \circ\rangle$ не является ассоциативной коммутативной алгеброй. Тогда в таблице 3 дано полное описание таких алгебр. А именно, в первом столбце тип алгебры Новикова (см.* [11].*), во втором — характеристическая матрица соответствующего ассоциативного коммутативного умножения.*

Тип	Хар. матрица асс. комм. умн.	Тип	Хар. матрица асс. комм. умн.
A_5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_1 & be_1 \\ 0 & be_1 & ce_1 \end{pmatrix}$	A_6, A_7, A_{13}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ae_1 \end{pmatrix}$
A_8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ae_2 \\ 0 & ae_2 & be_1 + ae_2 \end{pmatrix}$	A_9	$\begin{pmatrix} ae_1 & 0 & be_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ be_1 & 0 & ce_1 + de_2 \end{pmatrix}, b^2 = ac$
A_{10}, A_{11}, C_{14}, C_{15}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ae_1 + be_2 \end{pmatrix}$	A_{12}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_1 & 0 \\ 0 & 0 & be_1 + ce_2 \end{pmatrix}, ac = 0$
B_3,B_4, B_5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_2 & 0 \\ 0 & 0 & be_3 \end{pmatrix}$	C_3, C_4, C_5	$\begin{pmatrix} ae_2 & 0 & 0 \\ 0 & be_2 & 0 \\ 0 & 0 & ce_1 + ae_2 \end{pmatrix}, ac = 0$
C_6, C_7, C_9, C_{10}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_1 & be_1 \\ 0 & be_1 & ce_1 + de_2 \end{pmatrix}$ $ad = 0$	C_8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ae_1 + be_2 \\ 0 & ce_2 & ae_2 \\ ae_1 + be_2 & ae_2 & de_1 + fe_2 + ae_3 \end{pmatrix}$ $fc = ab = bc = 0$
C_{11},C_{12}, C_{13}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ae_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ ae_2 & 0 & be_1 + ce_2 \end{pmatrix}$	C_{16}, C_{17}	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_2 & 0 \\ 0 & 0 & be_1 + ce_2 \end{pmatrix}, ac = 0$
C_{18}	$\begin{pmatrix} ae_2 & 0 & be_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ be_2 & 0 & ce_2 \end{pmatrix}$	C_{19}	$\begin{pmatrix} ae_2 & 0 & be_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ be_2 & 0 & be_1 + ce_2 \end{pmatrix}, ab = 0$
D_3, D_4, D_5, D_6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ae_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ ae_3 & 0 & ae_3 \end{pmatrix}$	E_1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_1 & 0 \\ 0 & 0 & be_1 \end{pmatrix}$

Таблица 3. Трехмерные алгебры Новикова - Пуассона.

Теорема 2.2.2. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — трехмерная алгебра Новикова - Пуассона над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Предположим, что $\langle A, \circ\rangle$ имеет характеристическую матрицу типа*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -e_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристическая матрица алгебры $\langle A, \cdot\rangle$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ae_1 & be_1 \\ 0 & be_1 & ce_1 \end{pmatrix}$$

Алгебра $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ является алгеброй векторного типа тогда и только тогда, когда $b^2 \neq ac$.

Теоремы 2.1.6, 2.1.7, 2.2.1, и 2.2.2 дают ответ на вопрос 2.

В главе 3 (Йордановы супералгебры и алгебры Новикова - Пуассона) устанавливается связь между произвольными алгебрами Новикова - Пуассона и супералгебрами йордановых скобок. В **параграфе 3.1** основным результатом является

Теорема 3.1.1. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — обобщенная алгебра Новикова - Пуассона и*

$$\{a, b\} = a \circ b - b \circ a.$$

Тогда $J(A, \{\,,\})$ — йорданова супералгебра, то есть $\{\,,\}$ — йорданова скобка на алгебре $\langle A, \cdot\rangle$.

В **параграфе 3.2** доказывается специальность йордановой супералгебры построенной по алгебре Новикова-Пуассона. По обобщенной алгебре Новикова - Пуассона $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ строится $(-1, 1)$-супералгебра, то есть такая супералгебра, что для её грассмановой оболочки выполнены тождества

$$(x, y, y) = 0;\ (x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0.$$

Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — обобщенная алгебра Новикова - Пуассона. Рассмотрим $B(A) = A + A\xi$, где $A\xi$ — изоморфная копия векторного пространства A. Определим на $B(A)$ новое умножение $*$ следующим образом

$$a * b = ab,\ \ a * b\xi = a\xi * b = (ab)\xi,\ \ a\xi * b\xi = -2a \circ b - 4b \circ a.$$

Предложение 3.2.1. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — обобщенная алгебра Новикова - Пуассона. Тогда $\langle B(A), *\rangle$ — (-1,1)-супералгебра.*

Отсюда следует

Теорема 3.2.3. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — обобщенная алгебра Новикова - Пуассона и*

$$\{a, b\} = a \circ b - b \circ a.$$

Тогда $J(A, \{\ ,\ \})$ — специальная йорданова супералгебра.

Теоремы 3.1.1 и 3.2.3 дают положительный ответ на вопрос 3.

В **параграфе 3.3** изучается взаимная простота алгебр Новикова и соответствующего дубля Кантора. Сначала рассматривается простая йорданова супералгеба. На её четной части определяются дифференцирования

$$D_{xy}(a) = (a, x, y).$$

С их помощью доказывается

Теорема 3.3.2. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — обобщенная алгебра Новикова - Пуассона. Если $J(A, \{\ ,\ \})$ — соответствующий ей дубль Кантора является простой супералгеброй, тогда $\langle A, \cdot\rangle$ содержит единицу, алгебра Новикова $\langle A, \circ\rangle$ — проста, и умножение $\circ$ задается формулой*

$$a \circ b = a\partial(b) + (1 \circ 1)ab,$$

где $\partial(a) = 1 \circ a - a \circ 1$.

В обратную сторону действуем похожим образом. Рассматриваем дифференцирования ассоциативной коммутативной части

$$\partial_{xy}(a) = xa \circ y - x \circ ay$$

и с их помощью доказываем

Теорема 3.3.5. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — алгебра Новикова - Пуассона и $J(A, \{,\})$ — соответствующий ей дубль Кантора. Если алгебра Новикова $\langle A, \circ\rangle$ проста и $A \cdot A = A$, то либо $\langle A, \circ\rangle$ — поле, либо $J(A, \{,\})$ — проста. Причем, скобка $\{\ ,\ \}$ задается формулой*

$$\{a, b\} = a\partial(b) - \partial(a)b.$$

Теоремы 3.3.2 и 3.3.5 дают ответ на вопрос 4.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации.

Список литературы завершает изложение работы.

Заключение

В работе даны ответы на вопросы 1–4. Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Найдены условия того, что алгебра Новикова - Пуассона вкладывается в алгебру Новикова - Пуссона векторного типа.
2. Описаны алгебры Новикова - Пуассона размерности 2, 3 над полем комплексных чисел, приведены алгебры Новикова - Пуассона не векторного типа.
3. Доказано, что коммутатор относительно умножения Новикова есть йорданова скобка на ассоциативной коммутативной части алгебры Новикова - Пуассона, а соответствующий дубль Кантора — специальная йорданова супералгебра.
4. Доказано, что простота алгебры Новикова при некоторых ограничениях на ассоциативную коммутативную часть эквивалентна простоте соответствующего дубля Кантора.

В дальнейшем интерес представляют следующие направления:

- Было доказано, что если обобщенная алгебра Новикова - Пуассона содержит хотя бы один не делитель нуля, то она вкладывается в алгебру Новикова - Пуассона векторного типа. С другой стороны, построены примеры алгебр Новикова - Пуассона не вектроного типа. Возникает естественный вопрос о возможности вложения произвольной алгебры Новикова - Пуассона в алгебру Новикова - Пуассона векторного типа.

- Иследовать возможность (свободного) присоединения единицы к алгебрам Новикова - Пуассона, ассоциатиыным коммутативным алгебрам с йордановыми скобками.

- Построение контрпримера с нетривиальной ассоциативной коммутативной частью к теореме 3.3.5 без требования $A \cdot A = A$.

Благодарности. Автор выражает благодарность В.Н. Желябину за внимание к работе и полезные обсуждения. Также автор благодарит

коллектив ИМ СО РАН (особенно выделяя лабораторию теории колец) и сотрудников кафедры алгебры и математической логики НГУ за полезные обсуждения и комментарии.

Список литературы

[1] Gel'fand, I. M. Hamiltonian operators and algebraic structures related to them / I. M. Gel'fand, I. Ya. Dorfman // Funktsional. Anal. i Prilozhen. — 1979. — T. 13 № 4. — C. 13–30.

[2] Balinskii, A. A. Poisson brackets of hydrodynamic type, Frobenius algebras and Lie algebras / A. A. Balinskii, S. P. Novikov // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1985. — T. 283 № 5. — C. 1036–1039.

[3] Zelmanov, E. I. A class of local translation-invariant Lie algebras / E. I. Zelmanov // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1987 — T. 292 № 6. — C. 1294–1297.

[4] Filippov, V. T. A class of simple nonassociative algebras / V. T. Filippov // Mat. Zametki. — 1989. — T. 45 № 1. — C. 101–105.

[5] Osborn, J. M. Modules for Novikov algebras / J. M. Osborn // Contemp. Math. — 1991. — №. 184. — C. 327–338.

[6] Osborn, J. M. Novikov algebras / J. M. Osborn // Nova J. Algebra Geom. — 1992. — T. 1 № 1. — C. 1–13.

[7] Osborn, J. M. Simple Novikov algebra with an idempotent / J. M. Osborn // Commun. Algebra. — 1992. — T. 20 № 9. — C. 2729–2753.

[8] Xu, X. On Simple Novikov Algebras and Their Irreducible Modules / X. Xu // J. Algebra. — 1996. — № 185. — C. 905-934

[9] Xu, X. Novikov-Poisson algebra / X. Xu // J. Algebra. — 1997. — T. 190 № 2. — C. 253–279.

[10] Xu, X. Classification of simple Novikov Algebra and their irreducible modules of characterestic 0 / X. Xu // J. Algebra. — 2001. — T. 246 № 2. — 673–707.

[11] Bai, C. The classification of Novikov algebras in low dimensions / D. Meng // J. Phys. A: Math. Gen. — 2001. — №34. — C. 1581–1594.

[12] Кантор, И. Л. Йордановы и лиевы супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона / И. Л. Кантор // Томск: Алгебра и анализ. — 1989. — С. 55–80.

[13] King, D. The Kantor doubling process revisited / D. King, K. McCrimmon // Commun. Algebra. — 1995. — T. 23 № 1. — C. 357–372.

[14] Шестаков, И. П. Супералгебры и контрпримеры / И. П. Шестаков // Сиб. матем. ж. — 1991. — Т. 32 № 6 С. 187–196. — translation in Siberian Math. J., — 1991. — T. 32 № 6. — C. 1052–1060.

[15] King, D. The Kantor construction of Jordan superalgebras / D. King, K. McCrimmon // Commun. Algebra, — 1992. — T. 20 № 1. — C. 109–126.

[16] Скосырский, В. Г. Первичные йордановы супералгебры и конструкция Кантора / В. Г. Скосырский // Алгебра и логика. — 1994. — Т. 30 № 3. — С. 301–306.

[17] Шестаков, И. П. Квантование алгебр Пуассона и слабая специальность связанных с ними йордановых супералгебром, / И. П. Шестаков // ДАН. — 1994. — Т. 334 № 1. — С. 29–31.

[18] Martinez, C. Jordan Superalgebras Defined by Brackets / C. Martinez, I. P. Shestakov, E. I. Zelmanov // J. London Math. Soc. — 2001. — T. 64 № 2. — C. 357–368.

[19] Shestakov, I. P. On speciality of Jordan brackets / I. P. Shestakov // Algebra and Discrete Mathematics. — 2009. — № 3. — C. 94–101.

[20] Желябин, В. Н. Алгебры Новикова - Пуассона и ассоциативные коммутативные дифференциальные алгебры / В. Н. Желябин, А. С. Тихов // Алгебра и логика. — 2008. — Т. 47 № 2. — С. 186–202.

[21] Шестаков, И. П. Простые супералгебры типа $(-1, 1)$ / И.П. Шестаков // Алгебра и логика. — 1998. — Т. 37 № 6. — С. 721–739.

[22] Posner, E. C. Differentiably simple rings / E. C. Posner // Proc. Amer. Math. Soc. — 1960. — № 11. C. 337–343.

Работы автора по теме диссертации

[23] Захаров, А. С. Вложение алгебр Новикова - Пуассона в алгебры Новикова - Пуассона векторного типа / А.С. Захаров // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52 № 3. — С. 352–369

[24] Zakharov, A. S. Novikov-Poisson algebras and superalgebras of Jordan brackets / A. S. Zakharov // Commun. Algebra. 2014. — Т. 42 № 5. — С. 2285–2298.

[25] Желябин, В. Н. Специальность йордановых супералгебр, связанных с алгебрами Новикова - Пуассона / В. Н. Желябин, А. С. Захаров // Мат. заметки. 2015. — Т. 97 № 3. — С. 359–367.

[26] Захаров, А. С. Алгебры Новикова–Пуассона малых размерностей / А.С. Захаров // Сиб. электрон. матем. изв. — 2015. — №12. — С. 381–393

[27] Zakharov, A. S. Novikov-Poisson algebras and superalgebras of Jordan brackets / A. S. Zakharov // В Lie and Jordan algebras, their representations and applications-VI, dedicated to Efim Zelmanov's 60th birthday: междунар. конф., Бенту Гонсалвес, Бразилия. — 2015. — С. 69.

[28] Захаров, А. С. Специальность йордановых супералгебр, связанных с алгебрами Новикова - Пуассона / А.С. Захаров // Алгебра и математическая логика: теория и приложения: тр. междунар. конф. Казань, Россия. — 2014.— С. 176. — Режим доступа: http://kpfu.ru/portal/docs/F344663063/_Main.pd

[29] Захаров, А. С. Специальность йордановых супералгебр, связанных с алгебрами Новикова - Пуассона / А.С. Захаров // Студент и научно-технический прогресс: тр. междунар. конф., Новосибирск, Россия. — 2014. — С. 7. — Режим доступа: http://issc.nsu.ru/upload/issc14/01% 20Math.pdf

[30] Захаров, А. С. Об одном классе специальных йордановых супералгебр / А.С. Захаров // Студент и научно-технический прогресс: тр. междунар. конф., Новосибирск, Россия. — 2013. — С. 5. — Режим доступа: http://issc.nsu.ru/upload/issc13/01%20Math.pdf

[31] Захаров, А. С. Вложение алгебр Новикова - Пуассона в алгебры Новикова - Пуассона векторного типа / А.С. Захаров // Мальцевские чтения: тр. междунар. конф., Новосибирск, Россия. — 2012. — С. 108. — Режим доступа: http://math.nsc.ru/conference/malmeet/12/malmeet_2012.pdf

[32] Захаров, А. С. Вложение алгебр Новикова - Пуассона в алгебры Новикова - Пуассона векторного типа / А.С. Захаров // Лобачевские чтения: тр. всерос. конф., Казань, Россия. — 2012. — С. 70–72. — Режим доступа: http://kpfu.ru/docs/F2133883869/_Main.pdf

[33] Захаров, А. С. Йордановы супералгебры, связанные с алгебрами Новикова - Пуассона, и их специальность / А.С. Захаров // Студент и научно-технический прогресс: тр. междунар. конф., Новосибирск, Россия, 13–19 апреля 2012. — С. 9. — Режим доступа: http://issc.nsu.ru/upload/pdf%20materials/Proceedings/01 %20Mathematics.pdf

[34] Zakharov, A. S. Novikov algebras and superalgebras of Jordan brackets / A. S. Zakharov // Конференция по теории колец посвященная 90-летию со дня рождения А.И. Ширшова: междунар. конф., Новосибирск, Россия. — 2011. — С. 52 – 54.

[35] Захаров, А. С. Алгебры Новикова - Пуассона и йордановы супералгебры / А.С. Захаров // Студент и научно-технический прогресс: тр. междунар. конф., Новосибирск, Россия. — 2011. — С. 12. — Режим доступа: http://issc.nsu.ru/upload/pdf%20materials/Mathematics_materials.pdf