На правах рукописи

Тараненко Анна Александровна

ПЕРМАНЕНТЫ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Специальность 01.01.09 –
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН).

Научный руководитель:
Потапов Владимир Николаевич, кандидат физико-математических наук.

Официальные оппоненты:
Райгородский Андрей Михайлович, доктор физико-математических наук, зав. кафедрой, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)».

Семёнов Александр Анатольевич, кандидат технических наук, зав. лаб., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук.

Защита состоится 24 мая 2017 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан "___"____________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д. 003.015.01, д.ф.-м.н. Ю. В. Шамардин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Предметом исследования данной работы являются перманенты многомерных матриц. Актуальность выбранной темы исследования обусловлена ее потенциальными приложениями ко многим задачам перечислительной комбинаторики и дискретной математики.

Введем необходимые определения и обозначения.

Пусть $n, d \in \mathbb{N}$ и пусть $I_n^d = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_d) : \alpha_i \in \{1, \dots, n\}\}$ – множество индексов. *d-Мерной матрицей A порядка n* будем называть массив чисел $(a_\alpha)_{\alpha \in I_n^d}$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$.

Для $k \in \{0, \dots, d\}$ *k-мерной гранью* матрицы A называется k-мерная подматрица матрицы A, полученная фиксацией значений $d-k$ координат, в то время как остальные k координат пробегают все n значений. $(d-1)$-Мерную грань d-мерной матрицы назовем *гипергранью*.

Обозначим через $D(A)$ множество всех *диагоналей* d-мерной матрицы A порядка n:

$$D(A) = \left\{(\alpha^1, \dots, \alpha^n) | \alpha^i \in I_n^d, \forall i \neq j \ \rho(\alpha^i, \alpha^j) = d\right\},$$

где ρ – расстояние Хэмминга (число позиций, в которых два вектора различаются).

Перманентом многомерной матрицы A называется величина

$$\mathrm{per} A = \sum_{p \in D(A)} \prod_{\alpha \in p} a_\alpha.$$

Определим различные классы многомерных матриц.

Матрицы, у которых все элементы равны нулю или единице будем называть (0,1)-матрицами. *Диагональная* матрица – это (0,1)-матрица, у которой индексы единичных элементов образуют диагональ. Матрица A называется *неотрицательной*, если $a_\alpha \geq 0$ для всех $\alpha \in I_n^d$.

С помощью перманентов неотрицательных многомерных матриц специального вида можно посчитать число таких комбинаторных объектов, как 1-факторы в d-дольных d-униформных гиперграфах[1], совершенные коды и замощения графов[2], A-дизайны и H-дизайны[3].

Дважды стохастическая матрица – это неотрицательная двумерная матрица, для которой сумма элементов в каждой строке и каждом столбце равна единице. Неотрицательную многомерную матрицу назовем *полистохастической*, если сумма элементов в любой ее одномерной грани равна единице.

[1] Dow, S. J. Permanents of d-dimensional matrices / S. J. Dow, P. M. Gibson // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 90. — P. 133–145.

[2] Августинович, С. В. Многомерные перманенты в задачах перечисления / С. В. Августинович // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 5. — С. 3–5.

[3] Potapov, V. N. On the multidimensional permanent and q-ary designs / V. N. Potapov // Сиб. электрон. матем. изв. — 2014. — Т. 11. — С. 451–456.

d-Мерным МДР-кодом порядка n и с расстоянием k называется такой набор из n^{d-k+1} элементов d-мерной матрицы порядка n, что расстояние Хэмминга между индексами различных элементов не меньше k.

d-Мерный латинский гиперкуб Q порядка n есть d-мерная матрица порядка n, элементы которой принимают n различных значений, и все значения в любой одномерной грани которой различны. Двумерный латинский гиперкуб называется *латинским квадратом*. *Трансверсаль* латинского гиперкуба – это диагональ, содержащая все n различных значений. Число трансверсалей в гиперкубе Q будем обозначать как $T(Q)$.

Следующий способ связать многомерный перманент с числом трансверсалей в латинском гиперкубе описан еще в 1968 году В. Б. Юркатом и Х. Дж. Райзером[4].

Каждому d-мерному латинскому гиперкубу Q сопоставим $(d+1)$-мерную (0,1)-матрицу A того же порядка по следующему правилу: элемент гиперкуба q_α равен i тогда и только тогда, когда элемент матрицы $a_{\alpha,i}$ равен единице. Несложно видеть, что перманент такой матрицы A равен числу трансверсалей в гиперкубе Q, а сама матрица A является полистохастической матрицей. В дальнейшем полистохастические d-мерные (0,1)-матрицы порядка n для краткости называются *d-мерными МДР-кодами порядка n*.

Обозначим через $\mathcal{Q}_n^d$ d-мерный латинский гиперкуб порядка n такой, что $q_{\alpha_1,\dots,\alpha_d} = \alpha_{d+1}$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{d+1} \alpha_i \equiv 0 \mod n$. Соответствующий гиперкубу $\mathcal{Q}_n^d$ $(d+1)$-мерный МДР-код порядка n, для которого элемент m_α равен единице тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{d+1} \alpha_i \equiv 0 \mod n$, обозначим как $\mathcal{M}_n^{d+1}$.

Латинские квадраты и гиперкубы, а также их трансверсали являются предметом исследования в работах Я. М. Уонлесса и Б. Д. Маккая[5] [6], Р. Глебова и З. Лурии[7] и других авторов.

Пусть Σ_q есть множество $\{0,\dots,q-1\}$. *m-Арная квазигруппа порядка q* – это алгебраическая система, состоящая из множества Σ_q^m и m-арной операции $f : \Sigma_q^m \to \Sigma_q$ такой, что уравнение $x_0 = f(x_1,\dots,x_m)$ имеет единственное решение относительно любой переменной при произвольной фиксации значений всех остальных m переменных. В дальнейшем мы отождествляем квазигруппу с ее m-арной операцией f. Таблица Кэли любой m-арной квазигруппы порядка q является m-мерным латинским гиперку-

[4]Jurkat, W. B. Extremal configurations and decomposition theorems / W. B. Jurkat, H. J. Ryser // J. Algebra. — 1968. — Vol. 8. — P. 194–222.

[5]Wanless, I. M. Transversals in latin squares: a survey / I. M. Wanless // Surveys in Combinatorics 2011, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 392. — Cambridge: Cambridge University Press. — 2011. — P. 403–437.

[6]McKay, B. D. A census of small latin hypercubes / B. D. McKay, I. M. Wanless // SIAM J. Discrete Math. — 2008. — Vol. 22. — P. 719–736.

[7]Glebov, R. On the maximum number of Latin transversals / R. Glebov, Z. Luria // J. Combin. Theory Ser. A. — 2016. — Vol. 141. — P. 136–146.

бом того же порядка и наоборот.

Трансверсалью в m-арной квазигруппе f порядка q называется множество $\{\alpha^i\}_{i=1}^q$ векторов $\alpha^i = (a_0^i, a_1^i, \ldots, a_m^i)$, $a_k^i \in \Sigma_q$, такое, что $a_0^i = f(a_1^i, \ldots, a_m^i)$ для всех $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $a_k^i \neq a_k^j$ для всех $i \neq j$ и $k \in \{0, \ldots, m\}$. Обозначим через $T(f)$ число трансверсалей в квазигруппе f.

Заметим, что между трансверсалями в квазигруппе и в латинском гиперкубе, который представляет собой таблицу Кэли этой квазигруппы, естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие, поэтому все вопросы о трансверсалях в латинских гиперкубах можно переформулировать для квазигрупп и наоборот. Кроме того, график любой m-арной квазигруппы есть некоторый $(m+1)$-мерный МДР-код того же порядка, поэтому подсчет числа трансверсалей в m-арной квазигруппе эквивалентен вычислению перманента некоторой полистохастической (0,1)-матрицы.

m-Арные квазигруппы f и g порядка q *изотопны*, если для некоторого набора из $m+1$ перестановки $\sigma_i \in S_q$, $i = 0, \ldots, m$ выполняется

$$f(x_1, \ldots, x_m) \equiv \sigma_0^{-1}\left(g(\sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_m(x_m))\right).$$

m-Арная квазигруппа f порядка q является *суперпозицией* $(m-k)$-арной квазигруппы h и $(k+1)$-арной квазигруппы g, если существует такая перестановка $\sigma \in S_{m+1}$, что для всех $x_0, \ldots, x_m \in \Sigma_q$ верно

$$f(x_1, \ldots, x_m) = x_0 \Leftrightarrow g(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = h(x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}).$$

m-Арная квазигруппа f при $m \geq 3$ называется *полностью разделимой*, если она является суперпозицией полностью разделимых квазигрупп h_1 и h_2, арность каждой из которых не меньше 2. Все бинарные квазигруппы также считаются полностью разделимыми.

Одним из наиболее простых примеров полностью разделимых квазигрупп является *m-арная итерированная группа* $\mathbb{Z}_q$:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = x_0 \Leftrightarrow x_0 + x_1 + \ldots + x_m = 0, \ x_i \in \mathbb{Z}_q,$$

где $+$ означает групповую операцию в $\mathbb{Z}_q$. Таблица Кэли этой квазигруппы есть в точности латинский гиперкуб $\mathcal{Q}_q^m$, а ее график – это МДР-код $\mathcal{M}_q^{m+1}$.

Приведем также некоторые определения из теории гиперграфов.

Пара $H = (X, W)$ называется *гиперграфом* с множеством вершин X и множеством гиперребер W, где каждое гиперребро $w \in W$ есть некоторое подмножество вершин X. Гиперграф H называется *d-униформным*, если каждое его гиперребро состоит ровно из d вершин.

Обозначим через H_n^d *полный* d-униформный гиперграф на n вершинах, то есть гиперграф, множество гиперребер которого состоит из всех d-элементных подмножеств вершин.

Будем говорить, что гиперграф H имеет *1-фактор*, если он содержит непересекающийся по вершинам набор гиперребер, покрывающий все множество вершин. Гиперграф H называется 1-*факторизуемым*, если он может быть представлен в виде непересекающегося по гиперребрам объединения 1-факторов. Обозначим через $\varphi(H)$ число 1-факторов в гиперграфе H. 1-Факторы в гиперграфах являются естественным обобщением понятия совершенного паросочетания в графах.

Как и для графов, так и для униформных гиперграфов сложно найти необходимые и достаточные условия существования в них 1-факторов. Проблема существования 1-факторов в гиперграфах рассматривается, например, в работах[8 9 10].

Гиперграф H называется *простым*, если он не содержит кратных гиперребер. *Матрицей смежности* $A(H)$ простого d-униформного гиперграфа H на n вершинах назовем такую d-мерную (0,1)-матрицу порядка n, что ее элемент $a_{\alpha_1,\dots,\alpha_d}$ равен единице тогда и только тогда, когда множество вершин $\{\alpha_1,\dots,\alpha_d\}$ является гиперребром гиперграфа H. Данное определение матрицы смежности гиперграфа обобщает понятие матрицы смежности графа.

Гиперграф $H = (X, W)$ называется d-*дольным*, если множество его вершин может быть разделено на такие d подмножеств (*долей*), что каждое гиперребро содержит ровно по одной вершине из каждого подмножества. Очевидно, что любой d-дольный гиперграф является d-униформным.

Пусть H – d-дольный гиперграф с долями мощности n. *Матрицей смежности долей* $\widetilde{A}(H)$ гиперграфа H назовем такую d-мерную матрицу порядка n, что ее элемент $a_{\alpha_1,\dots,\alpha_d}$ равен кратности гиперребра $(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ в гиперграфе H, где α_i – вершина из доли с номером i. Таким образом, между неотрицательными целочисленными d-мерными матрицами и d-дольными сбалансированными гиперграфами есть взаимно однозначное соответствие, и, как несложно видеть, перманент матрицы смежности долей $\widetilde{A}(H)$ равен числу 1-факторов в гиперграфе H. Данное соответствие было описано С. Дж. Доу и П. М. Гибсоном[11].

Считается, что понятие перманента двумерных матриц ввел в 1812 году О. Л. Коши[12], а значит, история перманентов насчитывает уже более двухсот лет. Свойства перманентов хорошо изучены, и для них обнаружены разнообразные применения в теории графов, в теории комбинаторных структур, и даже в физике. Наиболее известно использование перманента для подсчета числа совершенных паросочетаний в двудольном графе.

[8] Lo, A. Perfect matchings in 3-partite 3-uniform hypergraphs / A. Lo, K. Markström // J. Combin. Theory Ser. A. — 2014. — Vol. 127. — P. 22–57.

[9] Rödl, V. Perfect matchings in large uniform hypergraphs with large minimum collective degree / V. Rödl, A. Ruciński, E. Szemerédi // J. Combin. Theory Ser. A. — 2009. — Vol. 116. — P. 613–636.

[10] Treglown, A. Exact minimum degree thresholds for perfect matchings in uniform hypergraphs / A. Treglown, Yi. Zhao // J. Combin. Theory Ser. A. — 2012. — Vol. 119. — P. 1500–1522.

[11] Dow, S. J. Permanents of d-dimensional matrices / S. J. Dow, P. M. Gibson // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 90. — P. 133–145.

[12] Cauchy, A.-L. Mèmoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions operées entre les variables qu'elles renferment / A.-L. Cauchy // J. Éc. Polyt. — 1812. — Vol. 10, Cah. 17. — P. 29–112.

Исследованию перманентов посвящено множество работ, причем в значительной их части рассматриваются перманенты дважды стохастических матриц. Максимально полное для своего времени описание свойств перманента приведено в книге[13] Х. Минка 1982 года.

На перманенты двумерных матриц получено множество нижних и верхних оценок. Для (0,1)-матриц наиболее известна верхняя оценка перманента на основе числа единиц в строках матрицы, которая изначально была высказана в качестве гипотезы[14] Х. Минком, а первое ее доказательство было найдено Л. М. Брэгманом[15].

Положительность перманента двумерных неотрицательных матриц несложно проверяется с помощью критерия Кёнига–Фробениуса, который утверждает, что перманент неотрицательной матрицы порядка n положителен тогда и только тогда, когда сумма размеров любой ее нулевой подматрицы не превосходит n.

Одним из простых следствий этого критерия является тот факт, что перманент неотрицательной матрицы, у которой суммы элементов в любой строке и любом столбце совпадают, всегда положителен. Наилучшая нижняя оценка для перманента таких матриц с целыми элементами получена А. Схрейвером[16].

Другим важным примером матриц с фиксированными суммами элементов по строкам и столбцам являются дважды стохастические матрицы. Из критерия Кёнига–Фробениуса следует, что перманент любой дважды стохастической матрицы положителен. Более того, как известно из теоремы Биркгофа, любая дважды стохастическая матрица может быть представлена в виде выпуклой комбинации диагональных матриц.

Рассмотрим задачу определения минимума и максимума перманента на множестве дважды стохастических матриц. Несложно понять, что максимальное значение, равное единице, перманент принимает на диагональной матрице. Гипотеза о том, что минимум перманента дважды стохастических матриц достигается на равномерной матрице, была высказана Б. Л. ван дер Варденом в 1926 году, а доказана лишь в 1980 году независимо Г. П. Егорычевым[17] и Д. И. Фаликманом[18].

Одно из первых обобщений перманента на многомерный случай было предложено А. Кэли в 1849 году[19]. Затем перманент многомерной матрицы

---

[13] Минк, Х. Перманенты / Х. Минк. — М.: Мир, 1982. — 213 с.

[14] Minc, H. Upper bound for permanents of (0,1)-matrices / H. Minc // Bull. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 69. — P. 789–791.

[15] Брэгман, Л. М. Некоторые свойства неотрицательных матриц и их перманентов / Л. М. Брэгман // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 211, № 1. — С. 27–30.

[16] Schrijver, A. Counting 1-factors in regular bipartite graphs / A. Schrijver // J. Combin. Theory Ser. B. — 1998. — Vol. 72, No. 1. — P. 122–135.

[17] Егорычев, Г. П. Решение проблемы Ван дер Вардена для перманентов / Г. П. Егорычев // Сиб. мат. журнал. — 1981. — Т. 22, № 6. — С. 65–71.

[18] Фаликман, Д. И. Доказательство гипотезы Ван дер Вардена о перманенте дважды стохастической матрицы / Д. И. Фаликман // Матем. заметки. — 1981. — Т. 29, № 6. — С. 931–938.

[19] Cayley, A. On the theory of determinants / A. Cayley // Trans. Cambridge. Philos. Soc. — 1849. —

и его свойства были упомянуты Т. Мюиром[20], в работе которого многомерный перманент возникает как одно из обобщений детерминанта.

До последнего времени работы С. Дж. Доу и П. М. Гибсона, опубликованные в 1980-е годы, были единственными работами, в которых многомерный перманент являлся основным объектом исследования. В этих работах приведены доказательства некоторых простых, но важных свойств перманентов многомерных матриц.

Существует несколько возможных обобщений двумерного перманента на многомерный случай. Основное отличие между ними состоит в различных определениях диагонали.

Пусть A – d-мерная матрица порядка n. Определим *r-диагональ* матрицы A как множество индексов элементов МДР-кода с расстоянием r и обозначим через $D_r(A)$ множество всех r-диагоналей матрицы A. *r-Перманентом* матрицы A назовем величину

$$\mathrm{per}_r A = \sum_{p \in D_r(A)} \prod_{\alpha \in p} a_\alpha.$$

При $r = d$ имеем определение перманента, принятое за основное в этой работе. Как известно, только МДР-коды с расстояниями 2 и d существуют в любой d-мерной матрице. Поэтому случай $r = 2$, как и $r = d$, достоин особого внимания. Кроме того, для 2-перманента также можно найти приложения в задачах перечисления. Например, так как число $(d-1)$-мерных латинских гиперкубов порядка n равно 2-перманенту единичной d-мерной матрицы порядка n, то с помощью оценки 2-перманента такой матрицы Н. Линиал и З. Лурия[21] получили верхнюю оценку на число латинских гиперкубов.

В пользу выбора d-перманента как основного обобщения двумерного перманента говорит тот факт, что r-перманент любой d-мерной матрицы A порядка n равен d-перманенту подходящей многомерной матрицы. Впервые такая конструкция была описана С. Дж. Доу и П. М. Гибсоном[22], и с ее помощью они получили верхнюю оценку 2-перманента[23].

Целью данной работы является изучение свойств перманента многомерных матриц и поиск возможностей для его применения к оценке и подсчету числа различных комбинаторных структур. По-видимому, множество возможных приложений многомерных перманентов существенно богаче, чем множество приложений перманентов двумерных матриц. Много-

Vol. 8. — P. 75–88.

[20]Muir, T. A treatis on the theory of determinants / T. Muir. — London: Macmillan and Co., 1882. — 774 p.

[21]Linial, N. An upper bound on the number of high-dimensional permutations / N. Linial, Z. Luria // Combinatorica. — 2014. — Vol. 34, No. 4. — P. 471–486.

[22]Dow, S. J. Permanents of d-dimensional matrices / S. J. Dow, P. M. Gibson // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 90. — P. 133–145.

[23]Dow, S. J. An upper bound for the permanent of a 3-dimensional (0,1)-matrix / S. J. Dow, P. M. Gibson // Proc. Amer. Math. Soc. — 1987. — Vol. 99, No. 1. — P. 29–34.

мерные перманенты тесно связаны с такими объектами, как трансверсали в латинских гиперкубах, 1-факторы в гиперграфах, замощения транзитивных графов, МДР-коды и комбинаторные дизайны. Многие результаты относительно данных объектов, можно переформулировать в терминах перманентов многомерных матриц, а многомерные перманенты в свою очередь могут помочь в решении некоторых проблем для таких объектов. Как и в случае двумерных матриц, многомерные перманенты находят свое применение в физике для описания взаимодействий элементарных частиц[24].

Часто матрицы, перманенты которых возникают в различных приложениях, имеют специальную структуру. Обычно это неотрицательные матрицы, у которых ненулевые элементы распределены по граням регулярным образом. Поэтому актуально отдельное рассмотрение перманентов многомерных матриц, у которых фиксированы суммы элементов по граням некоторой размерности. Такие классы матриц являются в некотором роде обобщением дважды стохастических матриц на многомерный случай, и для одного из таких классов, а именно для полистохастических матриц, в этой работе приведен ряд свойств.

Научная новизна и значимость. Работа носит теоретический характер. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и снабжены полными доказательствами. Полученная в данной работе верхняя оценка на число трансверсалей в латинских квадратах и гиперкубах существенно улучшает ранее известные оценки и является асимптотически точной, а для полного униформного гиперграфа найдена первая нетривиальная оценка числа его 1-факторизаций. Результаты о трансверсалях в квазигруппах порядка 4 дают новое подтверждение гипотезы Я. М. Уонлесса о существовании трансверсалей в латинских гиперкубах.

Разными авторами неоднократно предпринимались попытки обобщить понятие перманента на многомерные матрицы, но не было выполнено ни одного систематического исследования многомерного перманента и его приложений. Как следствие, в этой области пока не сложилось единых обозначений и терминологии. В ходе выполнения данной работы были упорядочены известные на текущий момент свойства многомерных перманентов и описаны возможные способы применения перманентов к различным проблемам дискретной математики. Результаты данной работы могут быть использованы для дальнейшего решения некоторых задач перечислительной комбинаторики.

Методы исследования. В диссертации используются методы дискретного и математического анализа, комбинаторные и алгебраические методы, методы теории графов и гиперграфов.

Основные результаты диссертации.

1. Доказана асимптотически точная с ростом порядка верхняя оценка

[24] Tichy, M. C. Partially distinguishable Boson-Sampling and the multi-dimensional permanent / M. C. Tichy // Physical Review A. — 2015. — Vol. 91, No. 2. — 022316.

перманента полистохастических матриц, из которой в качестве следствия получена асимптотически неулучшаемая верхняя оценка числа трансверсалей в латинских квадратах и гиперкубах.

2. Получено обобщение верхней оценки числа 1-факторов графа через перманент его матрицы смежности на случай униформных гиперграфов. Доказана верхняя оценка на число 1-факторизаций полного d-униформного гиперграфа.

3. Найдена нижняя оценка числа трансверсалей в полностью разделимых квазигруппах нечетной арности. Доказано, что на множестве n-арных квазигрупп порядка 4 только квазигруппы, изотопные итерированной группе $\mathbb{Z}_4$ четной арности, не содержат трансверсалей. Для итерированных групп $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2^2$ произвольной арности вычислено количество трансверсалей.

Публикации. Результаты, полученные в данной диссертации, опубликованы в 14 работах, из которых 6 работ издано в журналах из списка ВАК, а 8 работ – в трудах и тезисах конференций.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- IX Молодежная научная школа по дискретной математике и ее приложениям. (Москва, 2013).
- Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory. (Москва, 2014).
- European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications 2015. (Берген, Норвегия, 2015).
- 39th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. (Брисбен, Австралия, 2015).
- 7th European Congress of Mathematics (Берлин, Германия, 2016).
- International Conference and PhD-Master Summer School on Graphs and Groups, Spectra and Symmetries. (Новосибирск, 2016).
- Семинар по теории кодирования Института проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН. (2014).
- Общеинститутский семинар Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН. (2016).
- Семинары «Теория кодирования» и «Дискретный анализ» Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН и кафедры теоретической кибернетики НГУ. (2013–2017).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 130 страниц. Список литературы содержит 66 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, приведен краткий обзор литературы по выбранной теме, сформулированы все основные определения и обозначения, поставлена цель диссертационной работы и перечислены основные результаты.

В **первой** главе приведены такие основные свойства перманента многомерных матриц, как полилинейность, монотонность на множестве неотрицательных матриц, разложение перманента по гиперграни, разложение на сумму перманентов матриц меньшей размерности и другие. В качестве примеров посчитаны перманенты равномерной матрицы, всех полистохастических матриц порядка 2 и матрицы, являющейся дополнением к диагональной матрице. Также рассмотрена конструкция неотрицательных многомерных матриц нечетной размерности и четного порядка с нулевым перманентом, в каждой одномерной грани которых половина элементов отлична от нуля. Глава завершается списком комбинаторных объектов, количество которых можно выразить как перманент некоторой многомерной матрицы или как число 1-факторов некоторого гиперграфа, с описанием соответствующих конструкций.

Во **второй** главе рассматриваются перманенты полистохастических матриц и исследуется возможность обобщения теорем для дважды стохастических матриц на многомерный случай. В частности, доказано, что перманент любой полистохастической матрицы порядка 3 отличен от нуля и что равномерная матрица будет локальным экстремумом для перманента на множестве полистохастических матриц. В многомерном случае на равномерной матрице уже не будет глобального максимума или минимума перманента среди всех полистохастических матриц, что, например, подтверждается конструкцией многомерных матриц четной размерности и достаточно большого порядка, перманент которых асимптотически меньше перманента равномерной матрицы.

В **третьей** главе получены верхние оценки на перманент полистохастических и многомерных (0,1)-матриц. Основной результат данной главы заключается в следующем.

Теорема 1. *Пусть $d \geq 3$ и пусть Ω_n^d есть множество всех d-мерных полистохастических матриц порядка n. Тогда*

$$\max_{A \in \Omega_n^d} \operatorname{per} A = \left((1 + o(1)) \frac{n^{d-2}}{e^{d-1}} \right)^n \quad \text{при } n \to \infty.$$

В частности, доказано, что максимум перманента полистохастических матриц асимптотически равен перманенту равномерной матрицы той же размерности и того же порядка. Аналогичная асимптотическая оценка верна и для многомерных матриц, достаточно близких к полистохастическим.

Для многомерных (0,1)-матриц доказано несколько верхних оценок перманента, основанных либо на числе единиц в гипергранях матрицы, либо на распределении единиц по граням всех размерностей.

Основной результат **четвертой** главы есть верхняя оценка числа 1-факторов в d-униформном гиперграфе с помощью перманента его матрицы смежности.

Теорема 2. *Пусть H есть простой d-униформный гиперграф на n вершинах, причем d делит n. Введем функцию $\mu(n,d)$ такую, что $\mu(n,2)=1$, $\mu(n,3)=\left(\frac{2^{3/2}}{3}\right)^n$ для всех n и*

$$\mu(n,d)=\left(\frac{d!^2}{d^d d!^{1/d}}\right)^n$$

для всех $d \geq 4$. Тогда число 1-факторов в гиперграфе H

$$\varphi(H) \leq \left(\frac{\mathrm{per} A(H)}{\mu(n,d)}\right)^{1/d}.$$

Данная теорема является обобщением на случай униформных гиперграфов аналогичного результата для графов, полученного Н. Алоном и С. Фридлендом[25]. С помощью теоремы 2 оценено число 1-факторизаций полного d-униформного гиперграфа H_n^d на n вершинах.

Теорема 3. *Если $d=3$, то число 1-факторизаций полного 3-униформного гиперграфа H_n^3 на n вершинах удовлетворяет неравенству*

$$\Phi(n,3) \leq \left((1+o(1))\frac{3n^2}{2^{3/2}\cdot e^3}\right)^{\frac{n^3}{6}} \quad \textit{при } n \to \infty,$$

а для всех $d \geq 4$ число 1-факторизаций H_n^d

$$\Phi(n,d) \leq \left((1+o(1))\left(\frac{d}{e}\right)^d \frac{n^{d-1}}{d!^{2-1/d}}\right)^{\frac{n^d}{d!}} \quad \textit{при } n \to \infty.$$

В **пятой** главе рассматриваются задачи о числе трансверсалей в квазигруппах, латинских квадратах и гиперкубах, которые эквивалентны вопросам о перманенте МДР-кодов. Проблема оценки максимального числа трансверсалей в латинских квадратах была поднята Я. М. Уонлессом на конференции Loops'03, а вопрос о трансверсалях в латинских гиперкубах был им сформулирован в виде следующей гипотезы[26].

[25] Alon, N. The maximum number of perfect matchings in graphs with a given degree sequence / N. Alon, S. Friedland // Electron. J. Combin. — 2008. — Vol. 15, N13. — P. 1–2.

[26] Wanless, I. M. Transversals in latin squares: a survey / I. M. Wanless // Surveys in Combinatorics 2011, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 392. — Cambridge: Cambridge University Press. — 2011. — P. 403–437.

Гипотеза 1. *Любой латинский гиперкуб нечетной размерности или нечетного порядка имеет трансверсаль.*

Простым следствием теоремы 1 является верхняя оценка числа трансверсалей в латинских гиперкубах и квадратах.

Теорема 4. *Пусть $T(n, d)$ – максимальное число трансверсалей в d-мерных латинских гиперкубах порядка n. Тогда*

$$T(n, d) \leq \left((1 + o(1))\frac{n^{d-1}}{e^d}\right)^n \text{ при } n \to \infty.$$

В частности, число трансверсалей в латинских квадратах порядка n асимптотически не превосходит $\left((1 + o(1))\frac{n}{e^2}\right)^n$.

Из работ[27] [28] следует, что дальнейшее улучшение асимптотики в теореме 4 невозможно. Предыдущая наилучшая верхняя оценка на число трансверсалей в латинских квадратах[29] имела вид $c^n\sqrt{n}n!$, где $c \approx 0,614$.

Также в этой главе доказана нижняя оценка на число трансверсалей в латинских гиперкубах $\mathcal{Q}_n^d$ и найдено количество трансверсалей в латинских гиперкубах порядка 2 и 3.

Вторая часть пятой главы посвящена трансверсалям в полностью разделимых квазигруппах и в квазигруппах порядка 4. Для полностью разделимых квазигрупп нечетной арности и для довольно широкого семейства полностью разделимых квазигрупп четной арности доказана нижняя оценка на число трансверсалей. Для одного класса квазигрупп порядка 4, известного как класс полулинейных квазигрупп, найдена характеризация всех возможных трансверсалей, что позволило посчитать количество трансверсалей в итерированных группах $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2^2$, оценить снизу число трансверсалей в квазигруппах порядка 4 и нечетной арности и описать все квазигруппы порядка 4, не содержащие трансверсалей.

Теорема 5. *Пусть f – m-арная квазигруппа порядка 4, не содержащая трансверсалей. Тогда m четно и f изотопна итерированной группе $\mathbb{Z}_4$.*

Полученные в этой главе результаты подтверждают гипотезу 1 для всех латинских гиперкубов порядка не более 4 и для всех полностью разделимых m-арных квазигрупп нечетной арности.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

Благодарности. Я глубоко признательна своему научному руководителю В. Н. Потапову за всестороннюю поддержку и проявленный интерес к

[27] Eberhard, S. Additive triples of bijections, or the toroidal semiqueens problem [Электронный ресурс] / S. Eberhard, F. Manners, R. Mrazović. — Режим доступа: `https://arxiv.org/pdf/1510.05987.pdf`.

[28] Glebov, R. On the maximum number of Latin transversals / R. Glebov, Z. Luria // J. Combin. Theory Ser. A. — 2016. — Vol. 141. — P. 136–146.

[29] McKay, B. D. The number of transversals in a Latin square / B. D. McKay, J. C. McLeod, I. M. Wanless // Des. Codes Cryptogr. — 2006. — Vol. 40. — P. 269–284.

данной работе. Я благодарна С. В. Августиновичу за полезные обсуждения и идеи по развитию темы работы. Также я благодарна рецензентам своих печатных работ, замечания которых позволили существенно улучшить их тексты и исправить несколько ошибок. В заключение хочу поблагодарить сотрудников лаборатории алгебраической комбинаторики Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН за оказанную поддержку.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых журналах из списка ВАК

[1] Тараненко, А. А. Перманенты многомерных матриц: свойства и приложения / А. А. Тараненко // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2016. — Т. 23, № 4. — С. 35–101. (Перевод: Taranenko A. A. Permanents of multidimensional matrices: properties and applications / A. A. Taranenko // J. Appl. Ind. Math. — 2016. — V. 10, № 4. — P. 567–604.)

[2] Тараненко, А. А. О количестве трансверсалей в n-арных квазигруппах порядка 4 / А. А. Тараненко // Математические заметки. — 2017. — Т. 101, вып. 5. — С. 798–800.

[3] Taranenko, A. A. Upper bounds on the permanent of multidimensional (0,1)-matrices / A. A. Taranenko // Сиб. электрон. матем. изв. — 2014. — Т. 11. — С. 958–965.

[4] Taranenko, A. A. Multidimensional permanents and an upper bound on the number of transversals in latin squares / A. A. Taranenko // J. Combin. Des. — 2015. — V. 23. — P. 305–320.

[5] Taranenko, A. A. Upper bounds on the numbers of 1-factors and 1-factorizations of hypergraphs / A. A. Taranenko // Electron. Notes Discrete Math. — 2015. — V. 49. — P. 85–92.

[6] Taranenko, A. A. On the numbers of 1-factors and 1-factorizations of hypergraphs / A. A. Taranenko // Discrete Math. — 2017. — V. 340. — P. 753–762.

Тезисы и материалы конференций

[7] Тараненко, А. А. Верхняя оценка числа трансверсалей латинского квадрата / А. А. Тараненко // Материалы 51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», математика. (Новосибирск, 12–18 апреля, 2013). — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ. — 2013. — С. 236.

[8] Тараненко, А. А. Перманенты многомерных матриц / А. А. Тараненко // Материалы IX молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям. (Москва, 16–21 сентября, 2013). — М.: Изд-во ИПМ РАН. — 2013. — с. 106-111.

[9] Тараненко, А. А. О перманентах многомерных матриц / А. А. Тараненко // Материалы 52-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», математика. (Новосибирск, 11–18 апреля, 2014). — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ. — 2014. — С. 223.

[10] Тараненко, А. А. О количестве 1-факторов в гиперграфах / А. А. Тараненко // Материалы 53-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», математика. (Новосибирск, 11–17 апреля, 2015). — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ. — 2015. — С. 130.

[11] Taranenko, A. Multidimensional permanents and an upper bound on the number of transversals in latin squares / A. Taranenko // Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory. Program and Abstracts. (January 27 – February 2, 2014. Moscow, Russia). — Moscow: MIPT. — 2014. — P. 37.

[12] Taranenko, A. On transversals in multidimensional arrays [Электронный ресурс] / A. Taranenko // 39th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. Abstract list. (December 7–11, 2015. Brisbane, Australia). — Brisbane: University of Queensland. — 2015. — P. 45. — Режим доступа: `http://39accmcc.smp.uq.edu.au/AbstractsList.pdf`.

[13] Taranenko, A. On the length of partial transversals in latin hypercubes and in multidimensional arrays [Электронный ресурс] / A. Taranenko // 7th European Congress of Mathematics. Conference Scientific Program. (July 18–22, 2016. Berlin, Germany). — Berlin: Technische Universität Berlin. — 2016. — P. 74. — Режим доступа: `http://www.7ecm.de/program/contributed_talks.html`.

[14] Taranenko, A. On transversals in completely reducible quasigroups and in quasigroups of order 4 [Электронный ресурс] / A. Taranenko // Abstract for the International Conference and PhD-Master Summer School on Graphs and Groups, Spectra and Symmetries. (August 15–28, 2016. Akademgorodok, Novosibirsk, Russia). — C. 105. — Режим доступа: `http://math.nsc.ru/conference/g2/g2s2/exptext/Book%20of%20abstract-G2S2-2016.pdf`.