Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Горно-Алтайский государственный университет»

На правах рукописи

СИМОНОВ АНДРЕЙ АРТЕМОВИЧ

Ограниченно точно транзитивные группы и алгебраические системы, связанные с псевдоматричным умножением

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Горно-Алтайск – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Горно-Алтайский государственный университет»

Научный руководитель: **Бардаков Валерий Георгиевич**
доктор физико-математических наук, доцент.

Официальные оппоненты: **Крылов Петр Андреевич**
доктор физико-математических наук, профессор. Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», механико–математический факультет, зав. каф. алгебры.

Сосновский Юрий Васильевич
кандидат физико-математических наук, доцент. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный педагогический университет», Институт физико-математического и информационно-экономического образования, директор.

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет».

Защита состоится «30» марта 2017 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д 003.015.02* при *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН)*, расположенном по адресу: *пр. Академика Коптюга 4, г. Новосибирск, 630090.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан «____» ______________ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент *Стукачев Алексей Ильич*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Изучение транзитивных групп преобразований различных множеств является классическим разделом теории групп. Напомним, что группа $G = G(M)$ преобразований множества M называется *транзитивной*, если для произвольных $x, y \in M$ существует $g \in G$ такой, что $y = g(x)$. Группа называется *n-транзитивной*, если для произвольных кортежей $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in M^n$, из попарно неравных элементов, существует $g \in G$ такой, что $y_i = g(x_i)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$ и *точно n-транзитивной* — если такой элемент $g \in G$ единственный.

К. Жордан [20] доказал, что если G конечная точно n-транзитивная группа при $n \geq 4$, то G является одной из следующих групп: симметрической S_n, S_{n+1}, знакопеременной A_{n+2} или группой Матьё M_{11}, M_{12} для $n = 4,\ 5$ соответственно. Г. Цассенхауз [31] показал, что любую точно 2-транзитивную группу можно представить как группу аффинных преобразований: $x \mapsto xb + a$, $b \neq 0$ конечного почти-поля, а точно 3-транзитивную группу — как группу дробно-линейных преобразований конечного поля или почти-поля.

М. Холл [19] обобщил результат К. Жордана на бесконечные группы, доказав, при некоторых дополнительных условиях на группу, что точно 2-транзитивная группа является группой аффинных преобразований планарного почти-поля. Напомним, что почти-поле F называется *планарным*, если уравнение $xa = xb + c$ при $a, b, c \in F$, $a \neq b$ имеет единственное решение в F. При этом Дж. Л. Земмер [32] показал, что некоторые точно 2-транзитивные группы возникают как группы аффинных преобразований непланарных почти-полей. Ж. Титс [29] изучал локально-компактные, связные группы, действующие на топологическом пространстве и доказал, что каждая такая точно 2-транзитивная группа изоморфна группе аффинных преобразований поля вещественных чисел $\mathbb{R}$, поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ или тела кватернионов $\mathbb{H}$. Такая группа, действующая точно 3-транзитивно изоморфна группе дробно-линейных преобразований поля $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. В этой же работе Ж. Титс показал, что если не требовать от группы локальной компактности и связности, то точно 2-транзитивная группа будет изоморфна группе преобразований некоторого псевдополя. *Псевдополем* Ж. Титс назвал алгебраическую систему $\langle B; +, \cdot \rangle$ для которой $\langle B; + \rangle$ — группоид, $\langle B \setminus \{0\}; \cdot \rangle$ — группа.

Г. Карзел [21] независимо от работ Ж. Титса определил *почти-область* как близкую к псевдополю алгебраическую систему и построил взаимно-однозначное соответствие между почти-областями и точно 2-транзитивными группами. Всякая почти-область является псевдополем, но не наоборот. Тем не менее, Ф.В. Вилк [30] показал, что любое псевдополе можно построить при помощи соответствующей почти-области. П. Кара, Р. Киебум, Т.囘ервлоет [26] определив категорию почти-областей и категорию точно 2-транзитивных групп доказали их эквивалентность.

В. Д. Мазуров [9], используя теоретико–групповые методы показал, что если стабилизатор точно 2-транзитивной группы содержит инволюцию и произведение некоторых двух инволюций имеет бесконечный порядок, то в стабилизаторе точки содержится подгруппа, изоморфная $\mathbb{Q}^*$ (мультипликативной группе поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$), а точно 2-транзитивная группа содержит подгруппу изоморфную группе аффинных преобразований поля $\mathbb{Q}$. Также точно 2-транзитивные группы, используя теоретико–групповые методы, изучали А.И. Созутов, Е.Б. Дураков, Е.В. Бугаева [18].

Долгое время оставался открытым вопрос существования почти-области не являющейся почти-полем. Этот вопрос эквивалент следующему: всякая ли точно 2-транзитивная группа содержит абелеву нормальную подгруппу [5, вопрос 11.52]? Недавно был построен пример [27, 28] точно 2-транзитивной группы без абелевой нормальной подгруппы. Отсюда следует существование примера почти-области, не являющейся почти-полем.

Для построения бесконечной точно 3-транзитивной группы В. Керби [22] определил КТ-поле. *КТ-поле* задаётся парой $(\mathcal{B}, \varepsilon)$, где $\mathcal{B}$ — почти-область, а ε

— автоморфизм её мультипликативной группы. Для ε справедливо равенство $\varepsilon(1-\varepsilon(x)) = 1-\varepsilon(1-x),\ x \in B^* \setminus \{1\}$. Произвольная точно 3-транзитивная группа является группой преобразований некоторого КТ-поля.

П.М. Кон [4, лемма 7.5.1] определил алгебраическую систему $R = \langle G; \cdot, ^{-1}, \varphi, 1\rangle$ при помощи, действующей на группе G унарной операции $\varphi : G^* \to G^*$, $G^* = G \setminus \{1\}$ аксиомами:

1. $\varphi(yxy^{-1}) = y\varphi(x)y^{-1},\ \ x \in G^*,\ \ y \in G$;
2. $\varphi\left(\varphi(x)\right) = x,\ \ x \in G^*$;
3. $\varphi(xy^{-1}) = \varphi\left(\varphi(x)\left(\varphi(y)\right)^{-1}\right)\varphi(y^{-1}),\ \ x, y \in G^*,\ x \neq y$;
4. элемент $b = \varphi(x^{-1})x\left(\varphi(x)\right)^{-1}$ не зависит от выбора $x \in G^*$,

и показал, что по R можно построить единственное тело $\langle P; +, \cdot\rangle$. При этом получается, что G — мультипликативная группа тела P, $\varphi(x) = 1 - x$, $b = -1$.

В. Лейснер [24] показал, что если в определении R оставить только аксиомы 2–4, то получим почти-поле, если оставить только аксиомы 2 и 3, то получим почти-область. В дальнейшем В. Лейснер [25] расширил алгебраическую систему R, включив в её сигнатуру инволюции $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2}$, порождающие симметрическую группу $S_{n-1} \subseteq Aut(G)$, причём $\langle\varphi, S_{n-1}\rangle = S_n$. Введённую алгебраическую систему он назвал *полем степени* n. С КТ-полем связано G*-поле степени 3*. В. Лейснер показал, что при помощи полей степени n можно построить точно n-транзитивные группы.

Г.Г. Михайличенко среди локальных групп Ли нашёл все $(n \cdot k)$-параметрические локально точно n-транзитивные группы преобразований множества $\mathbb{R}^k$ для $k = 1$ [11] и $k = 2$ [13, 14]. Все локальные группы при $k = 1$, с точностью до локального изоморфизма, совпадали с глобальными точно n-транзитивными группами с $n = 1,\ 2,\ 3$. Для $n > 3$ других групп нет. Необходимо отметить, что в отличие от точно n-транзитивных групп, прямое произведение локально точно n-транзитивных групп будет локально точно n-транзитивным.

Эти решения были получены Г.Г. Михайличенко в рамках изучения «феноменологически-симметричных геометрий на двух множествах» (далее, для простоты, ФСГ). Развиваемый подход долгое время работал с гладкими функциями над гладкими многообразиями. Первые шаги в изучении алгебраических систем, возникающих в ФСГ, были сделаны Е.Е. Витяевым [2] и В.К. Иониным [3]. Ими были получены алгебраические системы, связанные с ФСГ минимального ранга. Ю.И. Кулаковым [8] была высказана гипотеза об эквивалентном определении ФСГ произвольного ранга через ФСГ минимального ранга. При сопоставлении данной гипотезы и результатов В.К. Ионина [3] можно говорить о групповом умножении прямоугольных матриц [39], которое отличается от обычного матричного умножения — о *псевдоматричном умножении*.

Цели и задачи. Целью диссертационной работы является изучение псевдоматричной алгебраической системы и установление её связей с другими известными алгебраическими системами.

Исходя из поставленной цели, необходимо решить следующие задачи:

1. Построить категорную эквивалентность между точно n транзитивными группами и полями степени n, когда морфизмами категорий являются гомоморфизмы алгебраических систем. Расширить соответствующие алгебраические системы так, чтобы между ними по-прежнему оставалась категорная эквивалентность.

2. Построить псевдоматричную алгебраическую систему, расширяющую матричное умножение и найти примеры.

3. Доказать гипотезу вложимости ФСГ произвольного ранга в ФСГ минимального ранга. Построить категорную эквивалентность между алгебраической системой ФСГ и псевдоматричной алгебраической системой.

Научная новизна. Представленные в диссертации результаты являются новыми, получены автором самостоятельно или в неразделимом соавторстве с научным руководителем В. Г. Бардаковым (§ 2.1).

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет теоретический характер. Результаты диссертационной работы могут быть использованы специалистами в области теории групп, теории алгебраических систем, теоретической физики. Большая часть результатов может служить основой дальнейших исследований ограниченно точно транзитивных групп, псевдоматричного умножения и поиска новых решений ФСГ.

Методология и методы исследования. В работе использовались методы теории групп, алгебраических систем и теории категорий.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертации:

1. Введён класс *групп ограниченно точно n-транзитивных* и класс *n-псевдополей*. Установлена их категорная эквивалентность для категорий, когда морфизмами категорий являются гомоморфизмы соответствующих алгебраических систем. Поля степени n являются частным случаем n-псевдополей, отсюда получается категорная эквивалентность точно n-транзитивных групп и полей степени n [34, 36].

2. Построена псевдоматричная алгебраическая система, расширяющая матричное умножение. Построены примеры псевдоматричного умножения для квадратных и прямоугольных матриц. Установлено, что произвольная ограниченно точно n-транзитивная группа задаёт псевдоматричное умножение, равно как и произвольное псевдоматричное умножение задаёт ограниченно точно n-транзитивную группу [33, 35].

3. Установлена категорная эквивалентность алгебраических систем ФСГ и псевдоматричных алгебраических систем. Доказана гипотеза вложимости ФСГ произвольного ранга в ФСГ минимального ранга [33].

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

«Алгебра и логика», «Теория групп», «Эварист Галуа», семинаре имени А.И. Ширшова (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН и Новосибирского национального исследовательского государственного университета, г. Новосибирск). Научный семинар кафедры алгебры (Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, 2013, 2016 гг.). «Теория физических структур» (Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Горно-Алтайский государственный университет, г. Горно-Алтайск).

Докладывались на конференциях:

1. «Mathematics of Distances and Applications», Varna, Bulgaria, 2012.

2. 9-ая Международная летняя школа «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры», Эрлагол-2011, Республика Алтай, 2011.

3. Международная конференция «Мальцевские чтения» (ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, 2000, 2002, 2005, 2007, 2009 гг.).

4. Всероссийская конференция «Знания – Онтологии – Теории», Новосибирск, 2007.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 11 печатных работах. Из них пять статей в рецензируемых журналах [33–37], из которых четыре [33–36] входят в перечень ВАК.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты получены автором лично. Работа [35] выполнена совместно с научным руководителем В.Г. Бардаковым при равном участии обеих сторон.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, трех глав (разбитых на параграфы), заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 92 страницы. Список литературы содержит 43 наименования. Все утверждения (леммы, предложения, теоремы, следствия) пронумерованы в порядке возрастания. Формулы занумерованы двумя числами: первое соответствует номеру главы, второе — порядковому номеру формулы в данной главе.

Краткое содержание работы.

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы.

В первой главе рассматриваются ограниченно точно n-транзитивные группы и n-псевдополя, устанавливается их связь. Определим множество

$$F(M,n) = \{(m_1, \ldots, m_n) \in M^n | m_i \neq m_j \text{ при } i \neq j\}$$

и рассмотрим непустое подмножество $N \subseteq F(M,n)$. Введём новое понятие:

Определение 2. *Группа $G(M)$ называется N-ограниченно точно n-транзитивной, если для любых $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in N \subseteq F(M,n)$ существует единственный $g \in G$ такой, что $x_i \cdot g = y_i$ для $i = 1, \ldots, n$.*

Если $N = F(M,n)$, то $G(M)$ — *точно n-транзитивная группа.* Многие известные точно 2-транзитивные группы являются группами аффинных преобразований почти-полей. Рассмотрим правое почти-кольцо $\mathbb{K}$ с единицей 1. Множество обратимых элементов $K^* \subset K$ образует группу $\langle K^*; \cdot, ^{-1}, 1\rangle$. Определим подмножество $N \subseteq F(K,2)$: $N = \{(x,y) \in K^2 | x - y \in K^*\}$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{K}$ — правое почти-кольцо с мультипликативной группой $\langle K^*; \cdot, ^{-1}, 1\rangle$. Определим на N бинарную операцию:*

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (f(x_1, y_1, y_2), f(x_2, y_1, y_2)),$$

где функция $f : K \times N \to K$ определена равенством:

$$f(x, y_1, y_2) = x\,(y_1 - y_2) + y_2.$$

Тогда алгебраическая система $G = \langle N; \circ\rangle$ является группой, которая действует на $\mathbb{K}$ и это действие является N-ограниченно точно 2-транзитивным. При этом группа $G(K)$ изоморфна группе аффинных преобразований правого почти-кольца $\mathbb{K}$.

Для определения n-псевдополя рассмотрим группу $B_1 = \langle B_1; \bullet, ^{-1}, e_1\rangle$ которая действует на множестве A, $A \cap B_1 = \emptyset$. Будем рассматривать правое действие группы B_1 на A. Действие элемента $b \in B_1$ на элемент $a \in A$ обозначим символом $a \cdot b \in A$. Продолжим это действие на множество $B = A \cup B_1$, по правилу:

$$c \cdot b = \begin{cases} c \cdot b, & \text{если } c \in A, \\ c \bullet b, & \text{если } c \in B_1. \end{cases}$$

Таким образом, операция «$\cdot$» является частичной операцией на множестве B.

На множестве B действуют инволюции $\varphi_i : B \to B$, $i = 1, \dots, n$, разбивающие множество B на непересекающиеся подмножества. Обозначим $A_i \subseteq A$, $B_i \subseteq B_1$ — инвариантные относительно φ_i подмножества, т. е. $A_i^{\varphi_i} \subseteq A_i$, $B_i^{\varphi_i} \subseteq B_i$. Дополнения соответствующих множеств: $\overline{A_i} = A \setminus A_i$, $\overline{B_i} = B_1 \setminus B_i$.

Определение 4. *Алгебраическую систему* $\mathbb{B}_n = \langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \dots, \varphi_n, e_1 \rangle$ *с частичной операцией «$\cdot$» будем называть n-псевдополем если справедливы аксиомы:*

(A1) $\varphi_i\big(\varphi_i(x) \cdot \varphi_i(y)\big) = \varphi_i\big(x \cdot \varphi_i(y^{-1})\big) \cdot y,\ x \in B,\ y \in B_i,\ i = 2, \dots, n;$

(A2) *для произвольных* $i \neq j \in \{2, \dots, n\}$ *выполняется равенство* $\varphi_i\varphi_j\varphi_i = \varphi_j\varphi_i\varphi_j$*;*

(A3) *для* $\sigma_i = \varphi_2\varphi_i\varphi_2$ *справедливы равенства* $\sigma_i(x \cdot y) = \sigma_i(x) \cdot \sigma_i(y)$, *где* $i = 3, \dots, n$ *и* $x \in B, y \in B_1$*;*

(A4) $\varphi_i\varphi_j(e_1) = \varphi_j(e_1)$ *при* $i \neq j \in \{2, \dots, n\}$.

Символом $K\mathbb{B}_n$ обозначим класс n-псевдополей $\mathbb{B}_n$. Для построения групп ограниченно точно n-транзитивных в классе $K\mathbb{B}_2$ 2-псевдополей выделим подкласс $K\mathbb{B}_2^*$ для которых выполняется условие

(A5) Для произвольных $x \in \overline{B_2}$ и $y \in B_2$ справедливо $xy \in B_2$.

Для 2-псевдополя $\mathbb{B}_2 \in K\mathbb{B}_2^*$ определим множество

$$N_2 = \{(x, y) \in B^2 | \varphi_2(x \cdot y^{-1}) \in B_1 \text{ или } \varphi_2(\varphi_2(x) \cdot E\varphi_2(y)) \in B_1\}$$

и функцию $f_2 : B \times N_2 \to B$:

$$f_2(x, y_1, y_2) = \begin{cases} \varphi_2\big(x\varphi_2(y_1y_2^{-1})\big)y_2, & \text{при } y_2 \in B_1, \\ \varphi_2\Big(\varphi_2\Big(\varphi_2(x)\varphi_2\big(\varphi_2(y_1)E\varphi_2(y_2)\big)\Big)\varphi_2(y_2)\Big), & \text{при } y_2 \in \overline{A_2}. \end{cases}$$

Лемма 5. *Алгебраическая система* $\langle N_2; \circ \rangle$ *с операцией:*

$$[x_1, x_2] \circ [y_1, y_2] = [f_2(x_1, y_1, y_2), f_2(x_2, y_1, y_2)],$$

построенной при помощи функции f_2 определённой выше, является N_2-ограниченно точно 2-транзитивной группой, действующей на $\mathbb{B}_2 \in K\mathbb{B}_2^*$.

Введём подкласс n-псевдополей $K\mathbb{B}_n^* \subseteq K\mathbb{B}_n$ такой, что для произвольного n-псевдополя $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\rangle \in K\mathbb{B}_n^*$ соответствующее ему 2-псевдополе: $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi_2\rangle$ лежит в $K\mathbb{B}_2^*$.

Для n-псевдополя $\mathbb{B}_n \in K\mathbb{B}_n^*$ определим множество N_n и функцию $f_n : B \times N_n \to B$ индукцией по n. Множество N_2 и функция f_2 определены ранее для леммы 5. Пусть определено множество N_{n-1} для $(n-1)$-псевдополя. Тогда определим множество N_n:

$$N_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in B^n | \big(\varphi_n(x_1 x_n^{-1}), \ldots, \varphi_n(x_{n-1} x_n^{-1})\big) \in N_{n-1}, x_n \in B_1\} \cup \\ \cup_{k=2}^{n} \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in B^n | \Big(\varphi_n\big(\varphi_k(x_1) E \varphi_k(x_n)\big), \ldots \\ \ldots, \varphi_n\big(\varphi_k(x_{n-1}) E \varphi_k(x_n)\big)\Big) \in N_{n-1}, x_n \in \overline{A_k}\Big\}.$$

Пусть определена функция f_{n-1} для $(n-1)$-псевдополя. Тогда определим функцию f_n:

$$f_n(x, y_1, \ldots, y_n) = \varphi_k\Big(\varphi_n\Big(f_{n-1}\Big(\varphi_n\big(\varphi_k(x_1) E \varphi_k(x_n)\big), \ldots, \\ \ldots, \varphi_n\big(\varphi_k(x_{n-1}) E \varphi_k(x_n)\big)\Big)\Big)\varphi_k(y_n)\Big), \text{ где } k = \begin{cases} 1, \text{ если } y_n \in B_1, \\ m, \text{ если } y_n \in \overline{A_m}. \end{cases}$$

Теорема 3. *Алгебраическая система $\langle G_n; \circ\rangle$, $n = 3, \ldots, n$ с операцией, определённой равенством:*

$$[x_1, \ldots, x_n] \circ [y_1, \ldots, y_n] = [f_n(x_1, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x_n, y_1, \ldots, y_n)],$$

является N_n-ограниченно точно n-транзитивной группой, действующей на $\mathbb{B}_n \in K\mathbb{B}_n^*$.

Для построения n-псевдополя по N-ограниченно точно n-транзитивной группе $G_n(B)$ фиксируем произвольный $(e_1, \ldots, e_n) \in N \subseteq B^n$. По множеству N строим множество кортежей $\widetilde{G_n} = \{[g_1, \ldots, g_n] \big| (g_1, \ldots, g_n) \in N\}$. Определим соответствие $\psi : G_n \to \widetilde{G_n}$ по правилу $g \mapsto [g_1, \ldots, g_n]$, где $g_i = e_i \cdot g$. Определим на $\widetilde{G_n}$ произведение в виде:

$$[g_1, \ldots, g_n] \circ [h_1, \ldots, h_n] = [g_1 \cdot [h_1, \ldots, h_n], \ldots, g_n \cdot [h_1, \ldots, h_n]].$$

Лемма 6. *Соответствие ψ задаёт изоморфизм групп $\langle G_n; \cdot\rangle$ и $\langle \widetilde{G_n}; \circ\rangle$.* Для нейтрального элемента $\varepsilon \in G_n$ соответствующий $\psi(\varepsilon) = E = [e_1, \dots, e_n]$.

Для произвольного множества B рассмотрим его декартово произведение B^n и определим операции проектирования $\mathrm{Pr}_i : B^n \to B$ так, что если $(x_1, \dots, x_n) \in B^n$, то $\mathrm{Pr}_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Для произвольного $X = (x_1, \dots, x_n) \in B^n$ определим X_{ij}, который получается из X перестановкой i-й и j-й компонент.

Далее будем рассматривать N-ограниченно точно n-транзитивные группы с дополнительным условием:

(T1) если $X \in N$, то $X_{ij} \in N$ для всех $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$.

В классе KT_2 рассмотрим подкласс KT_2^*, состоящий из групп G_2 для которых выполнено условие:

(T2) для любых $(y_1, y_2) \in N$ и $x \in \mathrm{Pr}_1(N)$ справедливо, по крайней мере, одно из условий $(x, y_2) \in N$ или $(y_1, x) \in N$.

Лемма 7. *Если группа $G_2(B) \in KT_2^*$, то на множестве B индуцировано 2-псевдополе $\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, e_1\rangle \in K\mathbb{B}_2^*$, где $\phi_2(x) = x \cdot [e_2, e_1]$.*

Определим класс $KT_n^* \subseteq KT_n$ состоящий из ограниченно точно n-транзитивных групп $G_n(B)$, стабилизаторы $St_{G_n(B)}(e_3, \dots, e_n) = G_2(B)$ которых лежат в классе KT_2^*. Тогда, справедлива

Теорема 4. *Если группа $G_n(B) \in KT_n^*$, то на множестве B можно определить n-псевдополе $\langle B; \cdot, ^{-1}, \phi_2, \dots, \phi_n, e_1\rangle \in K\mathbb{B}_n^*$, где $\phi_i(x) = x \cdot E_{1i}$.*

Теорема 5. *Категории n-псевдополей $\mathcal{C}\mathbb{B}_n^*$ и ограниченно точно n-транзитивных групп $\mathcal{C}T_n(B)^*$ эквивалентны.*

Результаты первой главы опубликованы в работах [34, 36]

Во второй главе рассматривается псевдоматричное умножение. В § 2.1 строится пример псевдоматричного умножения.

Для определения псевдоматричного умножения рассмотрим прямоугольные матрицы $A, B \in M_{m,n}$ размера $m \times n$, где m — число строк, n — число столбцов матрицы с элементами из множества R. Псевдоматричным умножением двух матриц A и B является матрица C, построенная при помощи

$$f : R^n \times R^m \to R.$$

Элемент c_{ij} матрицы C есть функция f от n элементов i–ой строки матрицы A и m элементов j–го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = f(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj}).$$

Отображение $f : \Omega_R \times \Sigma_R \to R$ задаёт *псевдоматричное умножение* на множестве G. Трёхсортную алгебраическую систему $\langle \Omega_R, \Sigma_R, R; f \rangle$ будем называть *псевдоматричной алгебраической системой*, если выполнены аксиомы:

AM1. Для произвольных матрицы $A \in G$ и столбца $C^j \in \Sigma_R$ существует единственный $B^j \in \Sigma_R$, для которого справедливо равенство $A \cdot_f B^j = C^j$;

AM2. Для произвольных матрицы $B \in G$ и строки $C_i \in \Omega_R$ существует единственная строка $A_i \in \Omega_R$, для которой справедливо равенство $A_i \cdot_f B = C_i$;

AM3. Умножение матриц ассоциативно. Иными словами, для произвольных $A, B, C \in G$ справедливо равенство $(A \cdot_f B) \cdot_f C = A \cdot_f (B \cdot_f C)$.

Теорема 9. *Псевдоматричное умножение для матриц размера $m \times n$ можно записать при помощи псевдоматричного умножения матриц–столбцов с функцией f^m или псевдоматричного умножения матриц–строк с функцией f^n.*

Результаты второй главы опубликованы в работах [33, 35].

В первом параграфе **третьей главы** даётся определение:

Трёхсортную алгебраическую систему $\langle M, N, B; f, g \rangle$ с операциями

$$f : M \times N \to B, \;\; g : B^{n+mn+m} \to B,$$

определенными на множествах $M \times N, B$ будем называть *алгебраической системой ФСГ ранга (m, n)*, если на подмножествах $\Sigma_M \subseteq M^m$, $\Sigma_B \subseteq B^m$, $\Omega_N \subseteq N^n$, $\Omega_B \subseteq B^n$ выполнены аксиомы:

АК1. Для любых $(i_1, \ldots, i_m) \in \Sigma_M$, $(b_1, \ldots, b_m) \in \Sigma_B$ найдётся единственный $\alpha \in N$, для которого справедливо равенство $f(i_j, \alpha) = b_j$, $j = 1, \ldots, m$;

АК2. Для любых $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Omega_N$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \Omega_B$ найдётся единственный $i \in M$, для которого справедливо равенство $f(i, \alpha_j) = b_j$, $j = 1, \ldots, n$;

АК3. Для любых $(i_0, i_1, \ldots, i_m) \in M \times \Sigma_M$, $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N \times \Omega_N$ справедливо равенство $f(i_0, \alpha_0) = g\left(f(i_0, \alpha_1), \ldots, f(i_m, \alpha_n)\right)$. В последнем равенстве функция g от $n+mn+m$ переменных рассматривается над элементами $f(i_j, \alpha_k) \in B$, построенными над всеми парами (i_j, α_k), за исключением (i_0, α_0).

Ю.И. Кулаков в [8] сформулировал гипотезу:

Гипотеза 1. *Всякая алгебраическая система $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}; f, g\rangle$ ранга (m, n) вложима в некоторую алгебраическую систему $\left\langle \mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R}^{mn}; \widetilde{f}, \widetilde{g} \right\rangle$ ранга (1,1), но построенную над матрицами $\mathbb{R}^{mn}$.*

Данная гипотеза доказана для произвольных множеств M, N, B:

Теорема 11. *Алгебраическая система ФСГ $\langle M, N, B; f, g\rangle$ ранга (m, n) вложима в некоторую $\langle M^m, N^n, B^{mn}; \widetilde{f}, \widetilde{g}\rangle$ ранга (1,1).*

Теорема 12. *Категории алгебраических систем ФСГ и псевдоматричных алгебраических систем эквивалентны.*

Результаты третьей главы опубликованы в работе [33].

В Заключении приводятся основные результаты диссертации.

Список литературы завершает изложение работы.

Благодарность. Автор выражает искреннюю признательность своему учителю Юрию Ивановичу Кулакову за интересную и плодотворную тему, благодарность научному руководителю Валерию Георгиевичу Бардакову за помощь в работе и скрупулезность. Автор благодарит участников Горно–Алтайской школы ТФС, участников семинаров им. А.И. Ширшова, «Эварист Галуа» и «Теория групп» за полезные обсуждения и лично руководителей семинаров Геннадия Григорьевича Михайличенко, Леонида Аркадьевича Бокутя, Виктора Даниловича Мазурова за щедрые советы и стимулирование работы.

Список литературы

1. Артамонов, В. А. Общая алгебра. Т. 2 / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков и др. – М.: Наука Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991 – 480 с.
2. Витяев, Е.Е. Числовое, алгебраическое и конструктивное представления одной физической структуры. / Е.Е. Витяев // Логико-математические основы проблемы МОЗ. Новосибирск, 1985. Вып. 107: Вычислительные системы. – С. 40–51.
3. Ионин, В.К. Абстрактные группы как физические структуры. / В.К. Ионин // Системология и методологические проблемы информационно–логических систем. Новосибирск, 1990. Вып. 135: Вычислительные системы. – С. 40–43.
4. Кон, П.М. Свободные кольца и их связи. / П.М. Кон – Москва, Мир, 1975, – 334–336 с.
5. Коуровская тетрадь. Издание 18–е дополненное, включающее Архив решённых задач. Новосибирск. 2014.
6. Кулаков, Ю.И. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики. / Ю.И. Кулаков // ДАН СССР, 193 – 1970, 1, – С. 72–75.
7. Кулаков, Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур / Ю.И. Кулаков // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12, № 5 – С. 1142–1145.
8. Кулаков, Ю.И. Новая формулировка теории физических структур / Ю.И. Кулаков // Методологические и технологические проблемы информационно–логических систем, Вычислительные системы, № 125, 1988 – С. 3–32.
9. Мазуров, В.Д. О точно дважды транзитивных группах. / В.Д. Мазуров // Вопросы алгебры и логики. (Труды Института математики СО РАН, Т. 30). Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996 — С. 114–118.
10. Маклейн, С. Категории для работающего математика / С. Маклейн – М., Физматлит, 2004 – 352 с.
11. Михайличенко, Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физи-

ческих структур / Г.Г. Михайличенко // ДАН СССР, 1972, т. 206, 5 – С. 1056–1058.

12. Михайличенко Г.Г. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физ. структур) / Г.Г. Михайличенко // ДАН СССР, 1985, т. 284, № 1, стр. 39–41.
13. Михайличенко, Г.Г. Двуметрические физические структуры и комплексные числа / Г.Г. Михайличенко // ДАН СССР, 321, 1991, 4 – С. 677–680.
14. Михайличенко, Г.Г. Двуметрические физические структуры ранга (n+1,2) / Г.Г. Михайличенко // Сиб. матем. журн., 34:3, 1993 – С. 132–143.
15. Михайличенко, Г.Г. Групповая симметрия физических структур / Г.Г. Михайличенко – Барнаул: БГПУ, 2003 – 204 с.
16. Пирс, Р. Ассоциативные алгебры / Р. Пирс – М.: Мир, 1986 – 543 с.
17. Плоткин, Б.И. Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных / Б.И. Плоткин – М.: Наука, 1991 – 448 с.
18. Созутов, А.И. О некоторых почти-областях и точно дважды транзитивных группах / А.И. Созутов, Е.Б. Дураков, Е.В. Бугаева // Тр. ИММ УрО РАН, 20, № 2, 2014 – С. 277–283.
19. Hall, M. On a theorem of Jordan / M. Hall // Pacific J. Math. 4:2, 1954 – P. 219–226.
20. Jordan, C. Recherches sur les substitutions / C. Jordan // J. Math. Pures Appl. (2) 17, 1872 – P. 351–363.
21. Karzel, H. Inzidenzgruppen / H. Karzel // I. Lecture Notes by Pieper, I. and Sorensen, K., University of Hamburg (1965), 123–135.
22. Kerby, W. Uber eine scharf 3–fach transitiven Gruppen zugeordnete algebraische Struktur / W. Kerby, H. Wefelscheid // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 37, 1972 – P. 225–235.
23. Krantz, D.H. Foundations of measurement. V.1 / D.H. Krantz, R.D. Luce, P. Suppes, A. Tversky – New York and London: Academic Press, 1971 – 576 p.
24. Leissner, W. Ein Stufenaufbau der Fasthereiche, Fastkorper und Korper aus

ihrer multiplikativen Gruppe / W. Leissner // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 46, 1977 – P. 55–89.

25. Leissner, W. On sharply n–ply transitive groups / W. Leissner // The Eighteenth International Symposium on Functional Equations, August 26–September 6, 1980, Waterloo and Scarborough, Ontario, Canada.
26. Cara, P A categorical approach to loops, neardomains and nearfields / P. Cara, R. Kieboom, T. Vervloet // Bulletin of the Belgian Mathematical Society — Simon Stevin, V. 19, № 5, 2012 – P. 845–857.
27. Rips, E. A sharply 2-transitive group without a non-trivial abelian normal subgroup / E. Rips, Y. Segev, K. Tent // arXiv:1406.0382v3, 2014 – P. 14.
28. Tent, K. Sharply 2-transitive groups / K. Tent, M. Ziegler // Adv. Geom., 16, no. 1, 2016 – P. 131–134.
29. Tits, J. Sur les groupes doublement transitif continus / J. Tits // Comment. Math, Helv. 26, 1952 – P. 203–224.

    Sur les groupes doublement transitif continus: correction et complements, Comment. Math, Helv. 30, 1956 – P. 234–240.
30. Wilke, F.W. Pseudo–fields and doubly transitive groups / F.W. Wilke // Bull. Austral. math. soc. V. 7, 1972 – P. 163–168.
31. Zassenhaus, H. Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen / H. Zassenhaus // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 11, 1936 – P. 17–40
32. Zemmer, J.L. Near–fields, planar and non–planar / J.L. Zemmer // Math. Stud., 31, 1964 – P. 145–150.

Работы автора по теме диссертации

33. Симонов, А.А. Псевдоматричные группы и физические структуры / А.А. Симонов // Сиб. матем. журн., 56:1, 2015 – С. 211–226.
34. Симонов, А.А. Обобщение точно транзитивных групп / А.А. Симонов // Изв. РАН. Сер. матем., 78:6, 2014 – С. 153–178.
35. Бардаков, В.Г. Кольца и группы матриц с нестандартным произведением / В.Г. Бардаков, А.А. Симонов // Сиб. Матем. журнал, 2013, т. 54, №3 – С. 504–519.
36. Симонов, А.А. О соответствии между почтиобластями и группами / А.А. Симонов // Алгебра и Логика. 2006, 45, 2 – С. 239–251
37. Simonov, A.A. On an algebraic definition of laws / A.A. Simonov, Y.I. Kulakov, E.E. Vityaev // Journal of Mathematical Psychology, 58, 2014 – P. 13–20.
38. Simonov, A.A. The generalization of matrix multiplication / A.A. Simonov // MDA 2012 – «Mathematics of Distances and Applications», 02-05.07.2012, Varna, Bulgaria, Abstracts – P. 52.
39. Симонов, А.А. Физические законы и обобщение матричного умножения / А.А. Симонов // Всероссийская конференция Знания – Онтологии – Теории, 14–16 сентября 2007 г., Новосибирск, Т. 1 – С. 104–113.
40. Симонов, А.А. Алгебраическая теория биформ. Случай ранга (n+1,2) / А.А. Симонов, И.А. Фирдман – Препринт № ВМ07-02, Омского государственного технического университета, 2007 – 35 с.
41. Симонов, А.А. О группах близких к точно транзитивным / А.А. Симонов // Тезисы Мальцевские чтения, 2007, Новосибирск.
42. Симонов, А.А. Построение групп Матье M_{11} и M_{12} / А.А. Симонов // Тезисы Мальцевские чтения, 2005, Новосибирск.
43. Симонов, А.А. Обобщённое матричное умножение / А.А. Симонов // Тезисы Мальцевские чтения, 2002, Новосибирск.

Научное издание

СИМОНОВ АНДРЕЙ АРТЕМОВИЧ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

Ограниченно точно транзитивные группы и алгебраические системы, связанные с псевдоматричным умножением

Подписано в печать 27.01.2017. Формат 60×90 1/16. Тираж 100 экз. Заказ 16.