На правах рукописи

Шевляков Артём Николаевич

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НАД ПОЛУГРУППАМИ И БУЛЕВЫМИ АЛГЕБРАМИ

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Омск 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант:
Ремесленников Владимир Никанорович, доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:
Будкин Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Алтайский государственный университет, заведующий кафедрой алгебры и математической логики.
Мартынов Леонид Матвееевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Омский государственный педагогический университет, профессор кафедры математики и методике обучения матеметике.
Тимошенко Евгений Иосифович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Новосибирский государственный технический университет, профессор кафедры алгебры и математической логики.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова.

Защита состоится 30 ноября 2017г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН по адресу г. Новосибирск, пр. акад. Коптюга 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан _ сентября 2017.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент А.И. Стукачев

Актуальность темы. Диссертация посвящена алгебраической геометрии над алгебраическими системами, новому направлению математики, расположенному на стыке алгебры, геометрии и теории моделей. Внутри алгебраической геометрии над алгебраическими системами можно выделить универсальную алгебраическую геометрию, результатами которой являются утверждения, справедливые для всех алгебраических систем. Ознакомиться с основными результатами универсальной алгебраической геометрии можно по монографии Э. Данияровой, А. Мясникова, В. Ремесленникова [29] (или по серии статей этих же авторов [19]– [28]), а также по работам Б. Плоткина [74]–[83]. Следует отметить, что языки изложения основ универсальной алгебраической геометрии в работах Б. Плоткина и первой группы авторов существенно отличаются друг от друга, и в настоящей диссертации мы будем следовать монографии [29], а также нашим лекциям по универсальной алгебраической геометрии [129].

Универсальная алгебраическая геометрия исторически возникла как попытка обобщить результаты классической алгебраической геометрии (над полями) на класс всех алгебраических систем. Однако, дословное обобщение не всегда возможно. По этой причине для большинства результатов универсальной алгебраической геометрии выделяют область истинности то есть специальные классы алгебраических систем, для которых тот или иной результат останется истинным. К таким важнейшим классам алгебраических систем относится класс нетеровых по уравнениям алгебраических систем (и его различные обобщения), а также класс эквациональных областей. В связи с этим многие исследования данной диссертации направлены на изучение этих классов в различных многообразиях алгебраических систем.

Помимо результатов общего характера (относящихся к универсальной алгебраической геометрии) алгебраическая геометрия над алгебраическими системами представлена изучением алгебраических геометрий над конкретными алгебраическими системами. Полученные здесь результаты показывают (см., например, историю решения известной проблемы Тарского для свободной группы), что изучение алгебраической геометрии над некоторой алгебраической системой $\mathcal{A}$ является отправной точкой при исследовании элементарной теории $\mathcal{A}$. Таким образом, алгебраическая геометрии над алгебраическими системами имеет важнейшие приложения в математической логике и теории моделей.

Интерес современных исследователей к алгебраической геометрии над различными алгебраическими системами может продемонстрировать следующий (далеко не полный) перечень работ, посвященных изучению алгебраической геометрии над следующими алгебраическими системами:

1. свободной группой [5, 33, 48, 49, 50, 51, 57, 68, 70, 86, 107, 108, 109];
2. гиперболическими группами [3, 34, 35, 37, 36];
3. частично коммутативными группами (в различных многообразиях) [6, 7, 8, 40, 41, 42, 64, 65, 66, 112, 113, 114];
4. свободной метабелевой группой [9, 89, 90, 91, 93, 94, 95, 98];
5. разрешимыми группами [39, 71, 99, 100, 101, 102, 103, 104];
6. алгебрами Ли и антикоммутативными алгебрами [10, 15, 16, 18, 17, 31, 84, 92, 97, 92, 30];
7. свободной полугруппой [46, 58, 59, 60, 110].

Исследования настоящей диссертации продолжают указанный выше список работ и посвящены изучению алгебраической геометрии в различных классах полугрупп и булевых алгебр.

Важность свойства нетеровости по уравнениям при изучении алгебраической геометрии над алгебраической системой $\mathcal{A}$ была указана выше. К настоящему времени нетеровость по уравнениям (или ее отсутствие) доказана для многих алгебраических систем. Например, нетеровой по уравнениям является любая линейная группа над нетеровым кольцом (в частности, любая свободная группа, любая полициклическая группа, любая конечно порожденная метабелева группа) [1, 5, 38], любая гиперболическая группа без кручения [109], любая свободная разрешимая группа [39], любая частично коммутативная группа, граф которой не содержит треугольников [6], любая конечно порожденная метабелева (или нильпотентная) алгебра Ли [14]. Кроме того, отметим работу [97], посвященную нетеровости по уравнениям универсальной обертывающей алгебры сплетения абелевых алгебр Ли, и работу [43] о нетеровости вполне простых полугрупп.

С другой стороны, не являются нетеровыми по уравнениям все бесконечно порожденные нильпотентные группы [69], сплетение $A \wr B$ неабелевой группы A и бесконечной группы B [4], минимаксные алгебраические системы $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} = \langle \mathbb{R}; \max, \min, \cdot, +, -, 0, 1\rangle$ и $\mathcal{M}_{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}; \max, \min, +, 0, 1\rangle$ [32], конечно порожденные полугруппы с бесконечно убывающими цепочками идемпотентов (в частности, свободные инверсные полугруппы) [44], конечно порожденные нехопфовые группы (в частности, группа Баумслага-Солитэра) [44].

Особо отметим монографию [54], где строится много примеров нетеровых и не нетеровых по уравнениям полугрупп и изучаются их свойства.

Заметим, что открытым является вопрос о нетеровости по уравнения свободной антикоммутативной, свободной ассоциативной и свободной алгебры Ли. Кроме того, неизвестно, будет ли свободное произведение двух нетеровых по уравнениям групп нетеровой по уравнениям группой.

Понятия $\mathrm{q}_\omega(\mathrm{u}_\omega)$-компактности являются обобщениями свойства нетеровости по уравнениям и играют важную роль в исследованиях по универсальной алгебраической геометрии. В работе Б.И. Плоткина [77] строится пример группы, являющейся q_ω-компактной, но не нетеровой по уравнениям. В работе М.Котова [52] построен аналогичный пример в языке, состоящем из счетного множества унарных функциональных символов. Также работа [52] содержит необходимые условия q_ω- и u_ω-компактности алгебр произвольного языка $\mathcal{L}$.

В настоящей диссертации исследуются классы q_ω- и u_ω-компактных булевых алгебр и полурешеток.

Укажем некоторые важнейшие результаты об эквациональных областях. В [22] были полностью описаны эквациональные области в классе алгебр Ли, антикоммутативных и ассоциативных алгебр. Отметим, что исторически первыми примерами эквациональных областей в классе групп являются свободные неабелевы группы (впервые было доказано Г. Гуревичем, доказательство см. в [57]), гиперболические группы без кручения [1, 73], конечные неабелевы простые группы (см. доказательство в [62]) и свободное произведение $G_1 * G_2$ произвольных групп G_1, G_2 (кроме случая $Z_2 * Z_2$) [2].

В настоящей диссертации исследуются эквациональные области в различных классах полугрупп.

В заключение укажем на нюанс, который возникает при переносе общих результатов универсальной алгебраической геометрии на конкретную группу (полугруппу, булеву алгебру, ...). Дело в том, что многие алгебро-геометрические свойства группы (полугруппы, булевой алгебры, ...) существенно зависят от языка, в котором она рассматривается как алгебраическая система. Зависимость алгебро-геометрических свойств от языка настолько сильная, что результаты, полученные для группы (полугруппы, булевой алгебры, ...) в языке $\mathcal{L}$, могут быть уже не верны при обеднении или обогащении языка $\mathcal{L}$. Например, если группа G в языке $\mathcal{L}$ является нетеровой по уравнениям (эквациональной областью), то G может уже не быть таковой при обогащении (обеднении) языка $\mathcal{L}$. В настоящей диссертации данный эффект наблюдается при изучении эквациональных областей в классе полугрупп, поскольку полугруппу S можно рассматривать в одном из следующих языков $\{\cdot\}$, $\{\cdot\} \cup \{s \mid s \in S\}$, $\{\cdot, {}^{-1}\}$, $\{\cdot, {}^{-1}\} \cup \{s \mid s \in S\}$.

Основные результаты. На защиту выносятся следующие результаты (ниже в виде ссылок указаны работы, где был опубликован соответствующий результат).

1. Для булевой алгебры, рассматриваемой в языке с константами, найдены необходимые и достаточные условия слабой нетеровости, а также q_ω- и u_ω-компактности. Получены результаты о геометрической эквивалентности булевых алгебр [117].

2. Доказано, что если полугруппа, рассматриваемая в языке без констант, является эквациональной областью, то она тривиальна [118].

3. Описаны эквациональные области в следующих классах полугрупп (во всех пунктах ниже полугруппы рассматриваются в языке с константами, и кроме того в пунктах (a)–(c) полугруппы рассматриваются с операцией обращения):

   (a) инверсные полугруппы [119];

   (b) клиффордовы полугруппы [121];

   (c) вполне простые полугруппы [122];

   (d) конечные простые полугруппы [120];

   (e) полугруппы с конечным минимальным идеалом (в частности, все конечные полугруппы) [125].

4. Доказано, что свободная полурешетка бесконечного ранга $\mathcal{F}$, рассматриваемая в языке с константами, нетерова по совместным системам. Описаны координатные полурешетки, соответствующие неприводимым алгебарическим множествам над $\mathcal{F}$. Указан критерий совместности систем уравнений над $\mathcal{F}$. Приведен алгоритм проверки совместности систем уравнений над $\mathcal{F}$ [123].

5. Развита универсальная алгебраическая геометрия над языками, содержащими предикатный символ $\neq$. Получена классификация ко-областей, нетеровых по уравнениям, q_ω- и u_ω-компактных алгебраических систем таких языков. Кроме того, для произвольной алгебраической системы $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$, содержащего предикатный символ $\neq$, описаны неприводимые множества и неприводимые координатные алгебры [127].

6. Для линейно упорядоченной полурешетки L_l из l элементов изучены свойства неприводимых алгебраических множеств. Кроме того, вычислено среднее число неприводимых компонент алгебраических подмножеств в L_l^n [126].

7. Найдена полурешетка порядка n, над которой число несовместных уравнений от m переменных максимально (минимально). Показано, что наиболее вероятным решением случайно выбранного уравнения от одной переменной над произвольной полурешеткой ранга $n \geq 6$ будет пустое множество [124].

Указанные выше результаты диссертации являются решениями следующих основных проблем алгебраической геометрии над алгебраической системой $\mathcal{A}$.

Проблема 1. ([29], параграф 2.4., задачи 1–2) *Классифицировать все алгебраические множества и координатные алгебры над $\mathcal{A}$.*

Проблема 2. ([29], параграф 2.4., задачи 3–4) *Классифицировать все неприводимые алгебраические множества и неприводимые координатные алгебры над $\mathcal{A}$.*

Для неприводимых алгебраических множеств авторами монографии [29] была поставлена следующая проблема.

Проблема 3. ([29], параграф 2.4., задача 5) *Выяснить, когда конечные объединения алгебраических множеств образуют алгебраическое множество над алгебраической системой $\mathcal{A}$.*

Согласно определению, любое конечное объединение алгебраических множеств над эквациональной областью $\mathcal{A}$ является алгебраическим множеством. Следовательно, решение следующей проблемы играет существенную роль при решении проблемы 3.

Проблема 4. *Выяснить, является ли алгебраическая система $\mathcal{A}$ эквациональной областью.*

В монографии [29] и в работах Б.И. Плоткина отмечается важность различных классов, содержащих в себе класс нетеровых по уравнениям алгебраических систем. Так, например, важность класса q_ω- и u_ω-компактных алгебраических систем следует из того, что для первых справедлива вторая Объединяющая теорема монографии [29], а для u_ω-компактных алгебраических систем справедливы обе Объединяющие теоремы из [29]. Таким образом, решение следующей проблемы является ключевым при изучении алгебраической геоетрии над алгебраической системой $\mathcal{A}$.

Проблема 5. *Выяснить, является ли алгебраическая система $\mathcal{A}$ q_ω- или u_ω-компактной.*

Научная новизна работы. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Методика исследований. В качестве методов исследования использовались методы теории полугрупп, теории булевых алгебр, теории моделей, универсальной алгебраической геометрии.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по универсальной алгебраической геометрии, теории полугрупп, булевых алгебр, при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов. Как было указано выше, нами были опубликованы записи лекций по универсальной алгебраической геометрии [129], в которых упоминаются многие результаты настоящей диссертации.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Омском алгебраическом семинаре (2011-2016), международных математических конференциях "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2011-2016), школе-конференции "Алгоритмические вопросы теории групп и смежных областей" (Эрлагол, 2012), конференции "Алгебра и линейная оптимизация", посвященной 100-летию Н.С. Черникова (Екатеринбург, 2012), нью-йоркском семинаре по теории групп (Нью-Йорк, США, 2014), алгебраическом семинаре в Stevens Institute of Technology (Хобокен, США, 2014), международном вебинаре по теории групп (2014), конференции "Аппроксимация логических моделей, алгоритмов и задач" (Омск, 2015), восьмой иранской международной конференции по теории групп (Тебриз, Иран, 2016), конференции "Groups, Algebras and Identities", посвященной 90-летию Б.И. Плоткина (Иерусалим, Израиль, 2016), Алгебра и Логика: Теория и Приложения (Красноярск, 2016), Общеинститутском семинаре ИМ СО РАН (Новосибирск, 2017).

Структура и объём работы. Диссертация изложена на 173 страницах, содержит введение, главу с предварительными сведениями, шесть глав с полученными результатами и список литературы. Главы разбиты на параграфы, список литературы содержит 130 наименований. Нумерация утверждений (теорем, лемм, следствий), определений и примеров сквозная внутри каждой главы и состоит из двух чисел: первое число — это номер главы, второе — порядковый номер внутри главы.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [115]–[127], входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Содержание работы

Диссертация начинается с **нулевой главы**, в которой даются основные определения теории полугрупп, теории булевых алгебр, теории моделей и универсальной алгебраической геометрии. Приведём лишь некоторые из них.

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебраическая система ($\mathcal{L}$-алгебра) некоторого языка $\mathcal{L}$. *Уравнением над языком $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-уравнением)* называется атомарная формула языка $\mathcal{L}$. Системой $\mathcal{L}$-уравнений ($\mathcal{L}$-системой) называется произвольное множество $\mathcal{L}$-уравнений, которые в совокупности зависят от конечного множества переменных X. Систему $\mathcal{L}$-уравнений $\mathbf{S}$ над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$ мы будем называть *E_k-системой*, если $|\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S})| = k$, но для любой конечной подсистемы $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ выполнено $|\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S})| = \infty$.

Пусть $\mathcal{A}$ является $\mathcal{L}$-алгеброй и $\mathbf{S}(X)$ — это система $\mathcal{L}$-уравнений от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Множество всех решений $\mathcal{L}$-системы $\mathbf{S}$ в алгебре $\mathcal{A}$ обозначается через $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}(X)) \subseteq \mathcal{A}^n$.

Множество $Y \subseteq \mathcal{A}^n$ называется *алгебраическим* над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$, если существует $\mathcal{L}$-система уравнений $\mathbf{S}$ от переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ такая, что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) = Y$. Пусть $Y \subseteq \mathcal{A}^n$ — алгебраическое множество над $\mathcal{L}$-алгеброй $\mathcal{A}$. *Радикал* множества Y определяется как $\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y) = \{t(X) = s(X) | Y \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X))\}$. Соответственно, *радикал системы $\mathcal{L}$-уравнений* $\mathbf{S}$ полагается равным радикалу множества $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S})$.

Непустое алгебраическое множество $Y \subseteq \mathcal{A}^n$ называется *неприводимым*, если Y нельзя представить в виде конечного объединения алгебраических множеств Y_i:

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k,\ Y_i \neq Y,\ Y_i \nsubseteq Y_j\ (i \neq j). \tag{1}$$

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ является *нетеровой по уравнениям* если любая бесконечная система $\mathcal{L}$-уравнений $\mathbf{S}$ эквивалентна над $\mathcal{A}$ некоторой своей конечной подсистеме $\mathbf{S}'$.

Любое алгебраическое множество Y над нетеровой по уравнениям алгеброй $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ допускает представление в виде объединения (1), где Y_i неприводимы, и данное представление единственно с точностью до перестановки множеств Y_i. Множества Y_i при этом называются *неприводимыми компонентами* множества Y.

Пусть Y — алгебраическое множество над алгеброй $\mathcal{A}$, определенной системой уравнений от переменных X. Обозначим через $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}(X)$ термальную алгебру всех $\mathcal{L}$-термов от переменных X. Фактор-алгебра $\Gamma_{\mathcal{A}}(Y) = \mathcal{T}_{\mathcal{L}}(X)/\theta_{\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)}$ по радикальной конгруэнции $\theta_{\mathrm{Rad}_{\mathcal{A}}(Y)}$ называется *координатной $\mathcal{L}$-алгеброй алгебраического множества Y*.

Две $\mathcal{L}$-алгебры $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ называются *геометрически эквивалентными*, если для любой системы $\mathcal{L}$-уравнений $\mathbf{S}$ координатные $\mathcal{L}$-алгебры множеств $\mathrm{V}_{\mathcal{A}_1}(\mathbf{S})$, $\mathrm{V}_{\mathcal{A}_2}(\mathbf{S})$ изоморфны друг другу.

$\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется q_ω*-компактной*, если для любой системы $\mathbf{S}$ и уравнения $t(X) = s(X)$ такого, что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X))$ существует конечная подсистема $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ со свойством $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}') \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X))$. $\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется u_ω*-компактной*, если для любой системы $\mathbf{S}$ и уравнений $\{t_i(X) = s_i(X) \mid 1 \leq i \leq m\}$ таких, что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X) = s_i(X))$ существует конечная подсистема $\mathbf{S}' \subseteq \mathbf{S}$ со свойством $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathbf{S}') \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X) = s_i(X))$. $\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется *нетеровой по совместным системам*, если для любой *совместной* системы $\mathcal{L}$-уравнений $\mathbf{S}$ существует эквивалентная ей конечная подсистема. $\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется *слабо нетеровой*, если для любой системы $\mathcal{L}$-уравнений $\mathbf{S}$ существует эквивалентная ей конечная система $\mathbf{S}_0$ (здесь мы уже не требуем, чтобы система $\mathbf{S}_0$ являлась бы подсистемой системы $\mathbf{S}$).

$\mathcal{L}$-алгебра $\mathcal{A}$ называется *эквациональной областью* (*ко-областью*), если любое конечное объединение алгебраических множеств $Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_n$ таких, что $Y_i \nsubseteq Y_j$ при $i \neq j$ и $n \geq 2$, (не) является алгебраическим множеством над $\mathcal{A}$.

В первой главе изучается алгебраическая геометрия над булевыми алгебрами, которые рассматриваются как алгебраические системы расширенного константами языка $\mathcal{L}_b(\mathcal{C}) = \{\vee^{(2)}, \cdot^{(2)}, \neg^{(1)}, 0, 1\} \cup \{c \mid c \in \mathcal{C}\}$, где $\mathcal{C}$ — некоторая булева алгебра. Выбор языка $\mathcal{L}_b(\mathcal{C})$ приводит к тому, что любая рассматриваемая в работе булева алгебра является $\mathcal{C}$*-алгеброй*, то есть содержит подалгебру изоморфную $\mathcal{C}$. В диссертации доказаны критерии слабой нетеровости, q_ω-компактности и u_ω-компактности булевых $\mathcal{C}$-алгебр.

Теорема 1. *Булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ слабо нетерова по уравнениям тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{C}$ полна в $\mathcal{B}$, то есть любое множество элементов $\{\mathbf{c}_j | j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ имеет точную нижнюю грань в алгебре $\mathcal{B}$, и эта точная нижняя грань принадлежит подалгебре $\mathcal{C}$.*

Теорема 2. *Булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ q_ω-компактна тогда и только тогда, когда над $\mathcal{B}$ не существует E_0- и E_1-систем.*

Теорема 3. *Булева $\mathcal{C}$-алгебра $\mathcal{B}$ u_ω-компактна тогда и только тогда, когда над $\mathcal{B}$ не существует E_k-систем для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Также в первой главе диссертации рассматриваются вопросы геометрической эквивалентности булевых алгебр и доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Две булевы $\mathcal{C}$-алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *любая несовместная над $\mathcal{B}_1$ система уравнений несовместна над алгеброй $\mathcal{B}_2$ и наоборот;*
2. *точная нижняя грань множества элементов $\{\mathbf{c}_j | j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ существует и равна 0 в $\mathcal{B}_1$ тогда и только тогда, когда она существует и равна 0 в $\mathcal{B}_2$.*

Вторая глава диссертации посвящена описанию эквациональных областей в различных классах полугрупп (и в различных полугрупповых языках).

Для полугрупп, рассматриваемых в языке без констант $\mathcal{L}_s = \{\cdot\}$, верна следующая теорема.

Теорема 5. *Если полугруппа является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s$, то она тривиальна.*

Для инверсных полугрупп в расширенном константами языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S) = \{\cdot,^{-1}\} \cup \{s \mid s \in S\}$ был получен следующий результат.

Теорема 6. *Если инверсная полугруппа S является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$, то S — группа.*

Отметим, что последняя теорема обобщает следующий результат работы [96].

Теорема 7. [96] *Если множество $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = x_2 \vee x_3 = x_4\}$ представимо в виде решения одного (а не системы уравнений как в теореме 6) уравнения языка $\mathcal{L}_{s-inv}(C) = \{\cdot,^{-1}\} \cup \{c_i \mid i \in I\}$ над некоторой инверсной полугруппой S, то S является группой.*

Приведем аналогичный результат для клиффордовых (вполне регулярных) полугрупп.

Теорема 8. *Если клиффордова полугруппа S является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S) = \{\cdot, ^{-1}\} \cup \{s | s \in S\}$, то S вполне проста.*

Далее в диссертации рассматриваются вполне простые полугруппы в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$. Как следует из приведенной ниже теоремы, в классе вполне простых полугрупп существуют нетривиальные примеры эквациональных областей.

Теорема 9. *Вполне простая полугруппа $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S) = \{\cdot, ^{-1}\} \cup \{s | s \in S\}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*

1. *сэндвич-матрица $\mathbf{P}$ не вырождена (то есть ее нормализованная форма не содержит одинаковых строк и столбцов);*
2. *структурная группа G является эквациональной областью в групповом языке $\mathcal{L}_g(G) = \{\cdot, ^{-1}, 1\} \cup \{g \mid g \in G\}$.*

Из последней теоремы следуют результаты о свободных вполне простых полугруппах и свободных произведениях.

Следствие 10. *Любая свободная вполне простая полугруппа $S = F_{css}(X)$ ранга $n \geq 2$ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$.*

Следствие 11. *Свободное произведение произвольных вполне простых полугрупп является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_{s-inv}(S)$.*

Отметим, что в отличие от многообразия групп, свободное произведение $Z_2 * Z_2$ в многообразии вполне простых полугрупп является эквациональной областью.

Как следует из указанной ниже теоремы, для конечных простых полугрупп языка $\mathcal{L}_s(S) = \{\cdot\} \cup \{s \mid s \in S\}$ мы имеем критерий аналогичный теореме 10.

Теорема 12. *Конечная простая полугруппа $S = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *матрица $\mathbf{P}$ не вырождена;*
2. *группа G является эквациональной областью в групповом языке $\mathcal{L}_g(G) = \{\cdot, ^{-1}, 1\} \cup \{g \mid g \in G\}$.*

Также в диссертации приведено несколько необходимых условий принадлежности произвольной полугруппы классу эквациональных областей в языке $\mathcal{L}_s(S)$.

Теорема 13. *Пусть I — левый (правый) идеал полугруппы S, элемент $e \in S$ коммутирует со всеми элементами идеала I, и существует элемент $a \in I$ для которого $ea \neq a$. Тогда полугруппа S не может быть эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$.*

Теорема 14. *Любая полугруппа S с нееденичным центром (то есть в S существуют центральный элемент e и $a \in S$ такие, что $ae \neq a$) не является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$.*

Следствие 15. *Верны следующие утверждения:*

1. *любая нетривиальная полугруппа S с нулем не является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$;*

2. *любая нетривиальная коммутативная полугруппа S не является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$;*

3. *если гомогруппа S является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$, то S — группа.*

Далее в диссертации рассматривается полугруппы, имеющие вполне простой минимальный двусторонний идеал (ядро). Заметим, что данный класс полугрупп достаточно широк: такими свойством обладают, например, все конечные полугруппы. Для полугрупп с вполне простым ядром получено следующее необходимое условие принадлежности классу эквациональных областей.

Теорема 16. *Пусть полугруппа S имеет ядро $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ и является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$, тогда ядро $K \subseteq S$, является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(K)$.*

Для формулировки дальнейших результатов нам понадобятся следующие определения. Пусть полугруппа S имеет двусторонний идеал I. Отображение $f_\alpha(x)\colon I \to I$ называется *внутренней левой (правой) трансляцией идеала* I, если существует такой $\alpha \in S$, что $f_\alpha(x) = \alpha x$ ($f_\alpha(x) = x\alpha$) для всех $x \in I$. Если элементы $\alpha, \beta \in S$ определяют одинаковые внутреннюю левую и правую трансляции, то такие элементы будем называть *эквивалентными* и обозначать $\alpha \sim_I \beta$. Отношение эквивалентности $\sim_I$ будем называть *тривиальным*, если каждый класс эквивалентности состоит ровно из одного элемента полугруппы S.

Теорема 17. *Пусть полугруппа S имеет двусторонний идеал I. Если отношение эквивалентности $\sim_I$ нетривиально, то полугруппа S не может быть эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$.*

Следующая теорема содержит необходимые и достаточные условия для того, чтобы произвольная полугруппа с конечным ядром являлась бы эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$.

Теорема 18. *Полугруппа S с конечным ядром $K = (G, \mathbf{P}, \Lambda, I)$ является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(S)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *ядро K является эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_s(K)$;*
2. *отношение эквивалентности $\sim_K$ тривиально*

(кроме того, из второго условия следует, что эквациональная область S с конечным ядром должна быть конечной полугруппой).

В **третьей главе** диссертации изучается алгебраическая геометрия над свободной полурешеткой бесконечного ранга $\mathcal{F}$, рассматриваемой в языке с константами $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$. Приведем лишь наиболее важные результаты, полученные в этом направлении.

Теорема 19. *Любая совместная система уравнений над $\mathcal{F}$ эквивалентна своей конечной подсистеме. Иными словами, полурешетка $\mathcal{F}$ нетерова по совместным системам. Однако над $\mathcal{F}$ существует бесконечная несовместная система, все конечные подсистемы которой конечны.*

Из общих результатов универсальной алгебраической геометрии следует, что любая координатная полурешетка алгебраического множества над $\mathcal{F}$ в языке $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$ должна содержать подполурешетку изоморфную $\mathcal{F}$ (то есть являться $\mathcal{F}$-полурешеткой). В следующей теореме описываются координатные $\mathcal{F}$-полурешетки неприводимых алгебраических множеств над $\mathcal{F}$.

Теорема 20. *Пусть $\mathcal{F}$ — свободная полурешетка бесконечного ранга, с множеством свободных порождающих $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$; S — конечно порожденная $\mathcal{F}$-полурешетка и множество $\mathcal{F}$-гомоморфизмов между полурешетками $S, \mathcal{F}$ не пусто. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *S является координатной $\mathcal{F}$-полурешеткой некоторого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{F}$;*
2. *S вложима (как алгебраическая система языка $\mathcal{L}_s(\mathcal{F})$) в $\mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ для некоторого $n < \omega$, где $\mathcal{F}[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ — свободная полурешетка, порожденная множеством $\{\mathbf{a}_i \mid i \in \mathcal{I}\} \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$;*
3. *на S истинны универсальные формулы $\Sigma = \{\varphi_i, \psi_i \mid i \in \mathcal{I}\}$,*

$$\varphi_i\colon\ \forall x, y\,(x\mathbf{a}_i = y\mathbf{a}_i \to (x\mathbf{a}_i = y \vee x = y\mathbf{a}_i \vee x = y))\,,$$

$$\psi_i\colon\ \forall x, y\,(xy \le \mathbf{a}_i \to (x \le \mathbf{a}_i \vee y \le \mathbf{a}_i))\,.$$

В **четвертой главе** диссертации рассматривается пополнение $\mathcal{L}_{\neq} = \mathcal{L} \cup \{\neq\}$ произвольного функционального языка $\mathcal{L}$ новым предикатным символом $\neq$ с естественной интерпретацией $\neq$ на алгебраической системе $\mathcal{A}$. Оказывается, алгебраическая геометрия над алгебраической системой языка $\mathcal{L}_{\neq}$ должна удовлетворять достаточно сильным условиям, которые сужают возможности для реализации ее тех или иных свойств. Например, алгебраические системы языка $\mathcal{L}_{\neq}$ обладают специфически устроенным семейством неприводимых алгебраических множеств (см. следующие две теоремы).

Теорема 21. *Алгебраическое множество $Y \subseteq A^n$ над алгебраической системой $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_{\neq}$ неприводимо тогда и только тогда, когда для любых термов $t(X), s(X)$ ровно одно из уравнений $t(X) = s(X)$, $t(X) \neq s(X)$ принадлежит радикалу множества Y.*

Теорема 22. *Алгебраическое множество $Y \subseteq A^n$ над алгебраической системой $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_{\neq}$ неприводимо тогда и только тогда, когда Y является атомом полурешетки алгебраических множеств пространства $\mathcal{A}^n$.*

Кроме того, для алгебраических систем языка $\mathcal{L}_{\neq}$ можно описать ко-области, нетеровые по уравнениям, q_ω- и u_ω-компактные алгебры.

Теорема 23. *Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_{\neq}$ является ко-областью тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_{\neq}$-алгебра $\mathcal{A}$ тривиальна, то есть $|A| = 1$.*

Теорема 24. *Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_{\neq}$ нетерова по уравнениям тогда и только тогда, когда для каждого $n \geq 1$ число алгебраических множеств пространства $\mathcal{A}^n$ конечно.*

Теорема 25. *Для алгебраической системы $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_{\neq}$ следующие три условия эквивалентны:*

1. *алгебраическая система $\mathcal{A}$ u_ω-компактна;*
2. *алгебраическая система $\mathcal{A}$ q_ω-компактна;*
3. *над $\mathcal{A}$ не существует бесконечной несовместной системы уравнений, у которой все конечные подсистемы совместны.*

Для алгебраической системы $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_{\neq}$ достаточно просто устроено семейство координатных алгебр неприводимых алгебраических множеств.

Теорема 26. *Пусть $\Gamma(Y)$ — координатная алгебра некоторого алгебраического множества Y над алгебраической системой $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}_{\neq}$. Алгебраическое множество Y неприводимо тогда и только тогда, когда в $\Gamma(Y)$ верна* *следующая универсальная формула*

$$\forall x \forall y((x = y) \leftrightarrow \neg((x \neq y)))$$

(то есть значения предикатов "равно" и "не равно" согласованы для каждой пары элементов координатной алгебры $\Gamma(Y)$*).*

Развитие алгебраической геометрии над алгебраическими системами приводит к появлению новых направлений исследований алгебро-геометрических свойств алгебраических систем. Одно из возникших направлений можно условно назвать комбинаторно-вычислительной алгебраической геометрией, которой и принадлежат исследования последних двух глав диссертации.

В **пятой главе** для множества решений Y произвольного уравнения $t(X) = s(X)$ над линейно упорядоченной полурешеткой из l элементов L_l мы вычисляем неприводимые компоненты, а также находим среднее число неприводимых компонент множества решений всех уравнений от n переменных над L_l.

В **шестой главе** мы изучаем уравнения над полурешетками, находим полурешетку порядка n, над которой число несовместных уравнений от m переменных максимально (минимально) и доказываем следующий результат.

Теорема 27. *Пусть S — произвольная полурешетка, $|S| = n \geq 6$, и $Y \subseteq S$ — непустое алгебраическое множество над S. Тогда*

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| < |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|$$

($\mathrm{Eq}_1(Y)$ — множество уравнений от одной переменной с решением Y).

Список литературы

[1] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and ideal theory, J. Algebra, 219 (1999), 16–79.

[2] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Discriminating and co-discriminating groups, J. Group Theory, 3 (4) (2000), 467–479.

[3] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Discriminating completions of hyperbolic groups, Geometriae Dedicata, 92 (2002), 115–143.

[4] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Romankov, Two theorems about equationally Noetherian groups, J. Algebra, 194 (1997), 654–664.

[5] R. Bryant, The verbal topology of a group, J. Algebra, 48 (1977), 340–346.

[6] M. Casals-Ruiz, I. Kazachkov, Elements of algebraic geometry and the positive theory of partially commutative groups, to appear in Canadian J. Mathematics, arXiv:0710.4077

[7] M. Casals-Ruiz, I. Kazachkov, On systems of equations over free partially commutative groups, arXiv:0810.4867

[8] M. Casals-Ruiz, I. Kazachkov, On systems of equations over free products of groups, arXiv:0903.2096

[9] O. Chapuis, ∀- free metabelian groups, J. Symbolic Logic, 62 (1997), 159–174.

[10] И. В. Чирков, М. А. Шевелин, Делители нуля в свободных произведениях алгебр Ли с объединением, Сиб. мат. журн., 45 (1) (2004), 229–238.

[11] I. M. Chiswell, V. N. Remeslennikov, Equations in free groups with one variable, J. Group Theory, 3 (4) (2000), 445—466.

[12] A. H. Clifford, The free completely regular semigroup on a set, J. Algebra, 59 (1979), 434-451.

[13] A.H. Clifford, Semigroups admitting relative inverses, Ann. of Math., 42:4 (1941), 1037–1049

[14] Э. Ю. Даниярова, Основы алгебраической геометрии над алгебрами Ли, Вестник Омского университета, Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений (2007), 8–39.

[15] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли I: U-алгебры и универсальные классы, Фундам. и прикл. мат., 9 (3) (2003), 37–63.

[16] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли II: Случай конечного поля, Фундам. и прикл. мат., 9 (3) (2003), 65–87.

[17] Э. Ю. Даниярова, Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли III: Q-алгебры и координатные алгебры алгебраических множеств, Препринт, Омск: Изд-во ОмГУ (2005), 1–130.

[18] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, Полуобласти и метабелево произведение метабелевых алгебр Ли, Совр. мат. и ее прилож., 14 (2004), 3–10.

[19] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Unification theorems in algebraic geometry, Algebra and Discrete Mathematics, 1 (2008), 80–111.

[20] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. II. Основания, Фундамент. и прикл. матем., 17 (1) (2012), 65–106.

[21] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over algebraic structures III: Equationally Noetherian property and , South. Asian Bull. Math., 35 (1) (2011), 35–68.

[22] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. IV. Эквациональные области и ко-области, Алгебра и логика, 49 (6) (2010), 715–756

[23] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. V. Случай произвольной сигнатуры, Алгебра и логика, 51 (1) (2012), 41–60.

[24] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами VI: Геометрическая эквивалентность, Алгебра и логика, принята к печати.

[25] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами VII: Универсальная геометрическая эквивалентность, Сиб.мат.журн., послана в журнал.

[26] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами VIII: Геометрические эквивалентности и особые классы алгебраических систем, Фунд. и прикл. матем., послана в журнал.

[27] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами IX: Главные универсальные классы и Dis-пределы, Алгебра и логика, послана в журнал.

[28] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over algebraic structures X: Ordinal dimension, Int. J. Algebra Comput., submitted.

[29] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами, Новосибирск, издательсво СО РАН (2016), 243c.

[30] Э. Ю. Даниярова, И. В. Онскуль, Линейные и билинейные уравнения над свободной антикоммутативной алгеброй, Вестник Омского университета, Комбинаторные методы алгебры и сложноть вычислений (2008), 38–49.

[31] Э. Ю. Даниярова, В. Н. Ремесленников, Ограниченная алгебраическая геометрия над свободной алгеброй Ли, Алгебра и логика, 44 (3) (2005), 269–304.

[32] Ю. С. Дворжецкий, М. В. Котов, Минимаксные алгебраические системы, Вестник Омского университета, Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений (2008), 130–136.

[33] R. I. Grigorchuk, P. F. Kurchanov, On quadratic equations in free groups, Contemp. Math., 131 (1) (1992), 159–171.

[34] D. Groves, Limits of (certain) CAT(0) groups, I: Compactification, Algebraic and Geometric Topology, 5 (2005), 1325–1364.

[35] D. Groves, Limits of (certain) CAT(0) groups, II: The Hopf property and the shortening argument, arXiv: math/0408080

[36] D. Groves, Limit groups for relatively hyperbolic groups, I: The basic tools, Algebraic and Geometric Topology, 9 (2009), 1423–1466.

[37] D. Groves, Limit groups for relatively hyperbolic groups, II: Makanin-Razborov diagrams, Geometry and Topology, 9 (2005), 2319–2358.

[38] V. Guba, Equivalence of infinite systems of equations in free groups and semigroups to finite subsystems, Mat. Zametki, 40 (3) (1986), 321–324.

[39] Ч. К. Гупта, Н. С. Романовский, Нетеровость по уравнениям некоторых разрешимых групп, Алгебра и логика, 46 (1) (2007), 46–59.

[40] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность, Алгебра и логика, 48 (3) (2009), 309–341.

[41] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Об универсальных теориях частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, 50 (1) (2011), 3–25.

[42] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, Свойства и универсальные теории частично коммутативных метабелевых нильпотентных групп, Алгебра и логика, 51 (4) (2012), 429–457.

[43] T. Harju, J. Karhumaki, M. Petrich, Compactness of systems of equations on completely regular semigroups, Structures in Logic and Computer Science, LNCS 1261 Springer, Berlin, (1997), 268–280.

[44] T. Harju, J. Karhumaki, W. Plandowski, Compactness of systems of equations in semigroups, International Colloquium on Automata, Languages and Programming, (ICALP 1995, Szeged, Hungary) LNCS 944, Springer, (1995), 444–454.

[45] Howie J. M. Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford: Clarendon Press (1995), 351 p.

[46] A. Jez, Recompression: a simple and powerful technique for word equations, arXiv:1203.3705

[47] P. R. Jones, Completely simple semigroups: free products, free semigroups and varieties, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 88A (1981), 293–313.

[48] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, Irreducible affine varieties over free group I: Irreducibility of quadratic equations and Nullstellensatz, J. Algebra, 200 (2) (1998), 472–516.

[49] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, Irreducible affine varieties over free group II: Systems in trangular quasi-quadratic form and description of residually free groups, J. Algebra, 200 (2) (1998), 517–570.

[50] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, Algebraic geometry over free groups: Lifting solutions into generic points, Contemp. Math., 378 (2005), 213–318.

[51] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, Elementary theory of free nonabelian groups, J. Algebra, 302 (2) (2006), 451–552.

[52] M. V. Kotov, Equationally Noetherian property and close properties, Southeast Asian Bulletin Math., 35 (3) (2011), 419–429.

[53] Kryvyi S. L. Compatibility of systems of linear equations over the set of natural numbers // Cybernetics and Systems Analysis, 38(1) (2002), 17–28.

[54] M. Lothaire, Combinatorics on words, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 17, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass (1983), 437p.

[55] Е.С. Ляпин, Полугруппы, М., Изд-во физико-математической литературы (1960), 592с.

[56] Г. С. Маканин, Уравнения в свободной группе, Изв. АН СССР, сер. мат., 46 (6) (1982), 1199–1273.

[57] Г. С. Маканин, Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы, Изв. АН СССР. Сер. матем., 48 (4) (1984), 735–749.

[58] G. S. Makanin, Equations in a free semigroup, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 117 (1981), 1–6.

[59] Г. С. Маканин, Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. I, Матем. сб., 195 (2) (2004), 41–90.

[60] Г. С. Маканин, Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. II, Матем. сб., 195 (4) (2004), 65–96.

[61] D. Marker, Model theory: An introduction, Springer-Verlag New York (2002), 345p.

[62] W. Maurer, J. Rhodes, A property of finite simple non-abelian groups, Proc. Am. Math. Soc., 16 (1965), 552–554

[63] А. А Мищенко, А. В. Трейер, Графы коммутативности для частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп, SEMR, 4 (2007), 460–481.

[64] А. А Мищенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп, Вестник Омского университета, Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений (2008), 61–68.

[65] А. А Мищенко, Структура координатных групп для алгебраических множеств в частично коммутативных двуступенно нильпотентных группах, Алгебра и логика, 48(3), (2009), 378–399.

[66] А. А Мищенко, Е. И. Тимошенко Универсальная эквивалентность частично коммутативных нильпотентных групп, Сиб. матем. журн., 52:5 (2011), 1113–1122.

[67] D. Monk, Handbook of Boolean algebras, v.1-3, Elsevier (1989) 1348p.

[68] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Exponential groups 2: Extension of centralizers and tensor completion of CSA-groups, International J. Algebra and Computation, 6 (6) (1996), 687–711.

[69] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups II: Logical foundations, J. Algebra, 234 (2000), 225–276.

[70] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, D. Serbin, Regular free length functions on Lyndon's free $\mathbb{Z}(t)$- group $F^{\mathbb{Z}(t)}$, Contemp. Math., 378 (2005), 37–77.

[71] A. Myasnikov, N. Romanovskii, Krull dimension of solvable groups, J. Algebra, 324 (10) (2010), 2814–2831

[72] А. Г. Мясников, Н. С. Романовский, Об униерсальных теориях жестких разрешимых групп, Алгебра и логика, 50:6 (2011), 802–821.

[73] A.Yu.Ol'shanskii, On residualing homomorphisms and G-subgroups of hyperbolic groups, Int. J. Algebra Comput., 3 (4) (1993), 365–409.

[74] B. Plotkin, Varieties of algebras and algebraic varieties, Izrael J. Math., 96 (2) (1996), 511–522.

[75] B. Plotkin, Varieties of algebras and algebraic varieties. Categories of algebraic varieties, Siberian Advances in Math., 7 (2) (1997), 64–97.

[76] Б. И. Плоткин, Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре, Алгебра и анализ, 9 (4) (1997), 224–248.

[77] B. Plotkin, E. Plotkin, A. Tsurkov, Geometrical equivalence of groups, Commun. Algebra, 24 (1999), 4015–4025.

[78] B. Plotkin, Seven lectures on the universal algebraic geometry, (2002), arXiv:math.0204245.

[79] B. Plotkin, Algebras with the same (algebraic) geometry, Proc. Steklov Inst. Math., 242 (2003), 165–196,

[80] Б. И. Плоткин, Проблемы алгебры, инспирированные универсальной алгебраической геометрией, Фунд. и прикл. мат., 10 (3) (2004), 181–197.

[81] B. Plotkin, Geometrical equivalence, geometrical similarity and geometrical computability of algebras, Зап. науч. сем. Санкт-Петербург. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ), 330, (2006), 201–222.

[82] B. Plotkin, Some results and problems related to universal algebraic geometry, Int. J. Algebra Comput., 17 (5–6) (2007), 1133–1164.

[83] B. I. Plotkin, Geometrical equivalence, geometrical similarity, and geometrical compatibility of algebras, J. Math. Sciences (New York), 140 (5) (2007), 716–728.

[84] E. N. Poroshenko, E. I. Timoshenko, Universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras, Journal of Algebra, 384 (2013), 143–168

[85] Rasin, V.V.,Free completely simple semigroups, Res. in Contemporary Algebra, Matem. Zapiski (Sverdlovsk) (1979), 140–151 (Russian)

[86] А. А. Разборов, О системах уравнений в свободной группе, Изв. АН СССР, сер. мат., 48 (4) (1982), 779–832.

[87] A. Razborov, On the parametrization of solutions for equations in free groups, Intern. J. Algebra Comp. 3 (1993), 251–273.

[88] В. Н. Ремесленников, $\exists$-свободные группы, Сиб. мат. журн., 30(6) (1989), 153–157.

[89] В. Н. Ремесленников, Размерность алгебраических множеств над свободной метабелевой группой, Фунд. и прикл. мат., 7 (2001), 873–885.

[90] V. Remeslennikov, R. Stöhr, On the quasivariety generated by a non-cyclic free metabelian group, Algebra Colloq., 11 (2004), 191–214.

[91] V. Remeslennikov, R. Stöhr, On algebraic sets over metabelian groups, J. Group Theory, 8 (2005), 491–513.

[92] V. Remeslennikov, R. Stöhr, The equation $[x, u] + [y, v] = 0$ in free Lie algebras, Intern. J. Algebra and Computation, 17 (5/6) (2007), 1165–1187.

[93] В. Н. Ремесленников, Н. С. Романовский, О метабелевых произведениях групп, Алгебра и логика, 43 (3) (2004), 341–352.

[94] В. Н. Ремесленников, Н. С. Романовский, Неприводимые алгебраические множества в метабелевой группе, Алгебра и логика, 44 (5) (2005), 601–621.

[95] В. Н. Ремесленников, Е. И. Тимошенко, О топологических размерностях u групп, Сиб. мат. журн., 47 (2) (2006), 415–431.

[96] B. Rosenblat, On equations in inverse semigroups, Algebra Universalis, 47 (2) (2002), 153–156.

[97] Н. С. Романовский, И. П. Шестаков, Нетеровость по уравнениям универсальной обертывающей сплетений абелевых алгебр Ли, Алгебра и логика, 47 (4) (2008), 475–490.

[98] Н. С. Романовский, Алгебраические множества в метабелевой группе, Алгебра и логика, 46 (4) (2007), 503–513.

[99] Н. С. Романовский, Нетеровость по уравнениям жестких разрешимых групп, Алгебра и логика, 48 (2) (2009), 258–279.

[100] Н. С. Романовский, Неприводимые алгебраические множества над делимыми распавшимися жесткими группами, Алгебра и логика, 48:6 (2009), 793–818.

[101] Н. С. Романовский, Копроизведения жестких групп, Алгебра и логика, 49 (6) (2010), 803–818.

[102] Н. С. Романовский, Об универсальной теории свободной разрешимой группы, Алгебра и логика, 51 (3) (2012), 385-391.

[103] Н. С. Романовский, О неприводимости аффинного пространства в алгебраической геометрии над группой, Алгебра и логика, 52 (3) (2013), 386–391.

[104] Н. С. Романовский, Теорема Гильберта о нулях (Nullstellensatz) в алгебраической геометрии над жесткими разрешимыми группами, Изв. РАН. Сер. матем, 79 (5) (2015), 201–214.

[105] V. Roman'kov, Equations over groups, Groups Complexity Cryptology, 4 (2012), 191–239.

[106] S. Rudeanu, Lattice Functions and Equations. Springer-Verlag, London (2001), 435p.

[107] Z. Sela, Diophantine geometry over groups I: Makanin-Razborov diagrams, Publications Mathematiques de l'IHES, 93 (2001), 31–105.

[108] Z. Sela, Diophantine geometry over groups VI: The elementary theory of a free group, GAFA, 16 (2006), 707–730.

[109] Z. Sela, Diophantine geometry over groups VII: The elementary theory of a hyperbolic group, Proc. LMS, 99 (2009), 217–273.

[110] Z. Sela, Word Equations I: Pairs and their Makanin-Razborov Diagrams, arXiv:1607.05431.

[111] Общая алгебра т.2 под. ред. Л.А. Скорнякова, М. Наука (1991), 480с.

[112] Е. И. Тимошенко, Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп, Алгебра и логика, 49 (2) (2010), 263–290.

[113] Е. И. Тимошенко, Квазимногообразия, порожденные частично коммутативными группами, Сибирский математический журнал, 54 (4) (2013), 902–913.

[114] Е. И. Тимошенко, Эндоморфизмы и универсальные теории разрешимых групп, Монографии НГТУ, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск (2011), 327с.

Работы автора по теме диссертации, опубликованные в журналах, из списка ВАК

[115] А. Н. Шевляков, Размерность Зарисского алгебраических множеств над коммутативными идемпотентными полугруппами, Вестник Омского Университета, 4 (2010) 45–49.

[116] А. Н. Шевляков, Nullstellensatz и моноид натуральных чисел, Вестник Омского Университета, 2 (2011), 49–55.

[117] А. Н. Шевляков, Элементы алгебраической геометрии над булевыми алгебрами с выделенными элементами, Фундаментальная и прикладная математика, 18 (4) (2013), 197–218

[118] А. Н. Шевляков, Об объединении решений систем уравнений в полугрупповом языке без констант, Вестник Омского государственного университета, 4 (2013), 60–62.

[119] А. Н. Шевляков, Об объединении решений систем уравнений в инверсных полугруппах, Вестник Омского государственного университета, 4 (2013), 63–66.

[120] А. Н. Шевляков, Об объединении решений систем уравнений в конечных простых полугруппах, Алгебра и логика, 53 (1) (2014), 109–129.

[121] А. Н. Шевляков, Об объединении решений систем уравнений в клиффордовых полугруппах, Вестник Омского университета, 3 (2014), 18–21.

[122] А. Н. Шевляков, Уравнения над вполне простыми полугруппами, Алгебра и логика, 53 (6) (2014), 790–796.

[123] А. Н. Шевляков, Элементы алгебраической геометрии над свободной полурешеткой, Алгебра и логика, 54 (3) (2015), 399–420.

[124] А. Н. Шевляков, Эквивалентные уравнения над полурешетками, Сиб. электр. мат. изв., 13 (2016), 478–490.

[125] А. Н. Шевляков, Об объединении решений систем уравнений в полугруппах с конечным идеалом, Алгебра и логика, 55 (1) (2016), 87–105.

[126] A. N. Shevlyakov, On irreducible algebraic sets over linearly ordered semilattices, Groups, Complexity and Cryptology, 8 (2) (2016), 187–196.

[127] А. Н. Шевляков, Универсальная алгебраическая геометрия с отношением $\neq$, Алгебра и логика, 55 (4) (2016) 498–511.

Прочие публикации

[128] A. N. Shevlyakov, Algebraic geometry over linear ordered semilattices, Algebra and Model Theory 8, Collection of papers edited by A.G. Pinus et al, Novosibirsk, NSTU (2011), 116-131.

[129] A. N. Shevlyakov, Lectures notes in universal algebraic geometry, preprint, arXiv:1601.02743 (2016), 67pp.