

На правах рукописи

Лисицына Мария Александровна

**СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ ТРАНЗИТИВНЫХ
ГРАФОВ ОГРАНИЧЕННОЙ СТЕПЕНИ**

Специальность 01.01.09 –
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН).

Научный руководитель:

Августинович Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук.

Официальные оппоненты:

Кабанов Владислав Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН)

Чехонадских Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет», профессор кафедры Алгебры и математической логики.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук

Защита состоится 14 марта 2018 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 003.015.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, <http://math.nsc.ru>.

Автореферат разослан " ____ " _____ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д. 003.015.01, д.ф.-м.н.

Ю. В. Шамардин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации решаются задачи, находящиеся на стыке алгебраической комбинаторики и теории графов. Предмет исследования — совершенные раскраски транзитивных графов ограниченной степени.

Пусть $G = (V, E)$ — обыкновенный неориентированный граф. *Совершенной раскраской графа G* с матрицей параметров $M = (m_{ij})$ называется такая раскраска его вершин, что для каждой вершины цвета i число смежных с ней вершин цвета j равняется m_{ij} . Матрицу M назовем *допустимой для графа G* , если существует совершенная раскраска графа G с матрицей параметров M . В англоязычной литературе для совершенных раскрасок используют термины *partition designs* (схемы разбиения) или *equitable partitions* (равномерные разбиения).

Задача классификации совершенных раскрасок близка к проблемам теории кодирования. Одно из классических понятий теории кодирования — совершенный код — является частным случаем совершенной раскраски n -мерного двоичного куба E^n . Вершины цвета 1 в совершенной раскраске E^n с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$ образуют совершенный двоичный код с расстоянием 3. Приведенный пример показывает, что задача классификации совершенных раскрасок не может быть проще, чем задача классификации совершенных кодов.

Совершенные раскраски являются обобщением и других известных кодов, например, полностью регулярных и равномерно упакованных кодов, таких как коды Препараты.

Опишем структуру доказательств теорем, характеризующих совершенные раскраски графов. Всякое доказательство имеет позитивную часть (конструкции раскрасок), часто подкрепленную рисунками, и негативную составляющую, опирающуюся на необходимые условия существования и локальный перебор.

Поиск конструкций совершенных раскрасок обычно начинают с применения орбитного метода. Общая идея этого метода состоит в следующем. Пусть H является некоторой подгруппой группы автоморфизмов графа G . Действие группы H разбивает множество вершин графа G на непересекающиеся орбиты. Поставив орбитам в соответствие различные цвета, получим совершенную раскраску вершин G ¹. Совершенную раскраску вершин графа в минимальное количество цветов можно построить алгоритмом полиномиальной сложности, предложенным В. Г. Визингом². Согласно алгоритму Визинга такая минимальная раскраска регулярного графа является одноцветной.

¹Цветкович, Д. Спектры графов / Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс // Киев: Наукова Думка, 1984. — 383 с.

²Визинг, В. Г. Дистрибутивная раскраска вершин графа / В. Г. Визинг // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 1995. — Т. 2, № 4. — С. 3—12.

Классическим способом доказательства несуществования совершенных раскрасок с заданными параметрами является спектральный метод, суть которого заключается в следующем факте. Характеристический многочлен матрицы параметров совершенной раскраски делит характеристический многочлен матрицы смежности графа. Следовательно, матрица, собственные числа которой отличаются от собственных чисел графа G , не является для него допустимой.

Сформулированное необходимое условие не для всякого набора параметров позволяет сделать вывод о его допустимости. В таких случаях исследователям приходится прибегать к перебору. Здесь важную роль играют структурные свойства графа: двудольность, величина обхвата, наличие длинных циклов и локально жестких фрагментов. Графы, изучаемые в рамках данной работы, выбраны таким образом, чтобы объем перебора, необходимого для решения поставленных задач, был допустимым.

Объектами исследования диссертации являются транзитивные графы ограниченной степени. Транзитивным называется граф, группа автоморфизмов которого действует транзитивно на множестве его вершин. Очевидно, транзитивный граф является регулярным.

В работе изучаются транзитивные графы степени 3 и 4. Кубическим называется 3-регулярный граф. Первая глава посвящена совершенным 2-раскраскам кубических графов. В ней рассмотрены шесть бесконечных серий и граф Паппа. Во второй главе исследован граф, который является обобщением одной из таких серий на случай счетного числа вершин. Речь идет о графе бесконечной призмы P_∞ , являющимся прямым произведением бесконечной цепи на ребро. Для бесконечной призмы автором диссертации решена задача описания всех совершенных раскрасок в конечное число цветов. В третьей главе такая задача решена для другого бесконечного графа — графа Кэли группы Z с системой образующих $\{1, 2\}$. Назовем его *бесконечным циркулянтным графом с дистанциями 1 и 2* и обозначим $Si_\infty(2)$.

Ранее изучались совершенные раскраски ряда графов и классов графов: n -мерного двоичного куба, графа Джонсона, графов прямоугольной, гексагональной и треугольной решеток, циркулянтных графов.

В работе 2007 года Д. Г. Фон-Дер-Флаасс получил первые необходимые условия на параметры возможных совершенных 2-раскрасок булева куба, и построил рекурсивную конструкцию, дающую бесконечную серию таких раскрасок ³. Позднее этим же автором была получена так называемая граница корреляционной иммунности ⁴. Она позволила получить сильное необходимое условие существования совершенных раскрасок гиперкуба. Впоследствии Фон-Дер-Флаасс изучил раскраски, достигающие

³Фон-Дер-Флаасс, Д. Г. Совершенные 2-раскраски гиперкуба / Д. Г. Фон-Дер-Флаасс // Сиб. мат. журнал. — 2007. - Т. 48, № 4. — С. 923 — 930.

⁴Fon-Der-Flaass, D. G. A bound on correlation immunity / D. G. Fon-Der-Flaass // Sib. Electron. Math. Rep.— 2007. — № 4. — P. 133—135.

этой границы в 12-мерном кубе ⁵. Отметим, что понятие корреляционной иммунности широко используется в криптографии. Еще одна конструкция, которая позволила строить множество различных совершенных 2-раскрасок для большого количества матриц параметров, была предложена в совместной работе Д. Г. Фон-Дер-Флаасса и К. В. Воробьева ⁶. Заметим, что на сегодняшний день полного описания всех матриц совершенных раскрасок гиперкуба пока не найдено даже для случая двух цветов.

Графом Джонсона $J(n, w)$ называется граф, вершинами которого являются двоичные векторы длины n веса w , пара векторов соединяется ребром, если они отличаются ровно в двух координатах.

У. Мартин показал, что совершенную 2-раскраску $J(n, w)$ можно получить, покрасив блоки $(w-1)-(n, w, \lambda)$ -схемы в один цвет, а оставшиеся вершины $J(n, w)$ в другой цвет ⁷. Проблеме существования таких схем с различными параметрами посвящены работы многих выдающихся математиков. Отметим, что для большого количества наборов параметров такая проблема является открытой.

Систематическое исследование задачи существования совершенных 2-раскрасок графов Джонсона, включающее в себя вопросы существования $(w-1)-(n, w, \lambda)$ -схем выполнено в диссертации И. Ю. Могильных ⁸. В работе получен ряд (как бесконечных, так и спорадических) конструкций совершенных 2-раскрасок графов Джонсона, также установлено несколько необходимых условий существования таких раскрасок. С помощью таких конструкций и разработанных необходимых условий существования перечислены (теоретически, без использования компьютера) параметры всех совершенных 2-раскрасок графов Джонсона $J(n, w)$ для $n \leq 8$. А. Л. Гаврилюк и С. В. Горяинов получили полное описание допустимых матриц второго порядка графа $J(n, 3)$ для нечетных n ⁹. Таким образом, задача классификации совершенных раскрасок графа Джонсона $J(n, w)$ остается нерешенной для многих пар n и w даже в случае двух цветов.

Пусть $G = (V, E)$ - граф, $M = (m_{ij})$ - квадратная матрица порядка n , $r \geq 1$. Понятие *совершенной раскраски радиуса r* с матрицей M для графа G определяется аналогично понятию совершенной раскраски вершин этого графа с матрицей M с тем лишь отличием, что m_{ij} - количество вершин цвета j на расстоянии не более r от вершины x цвета i .

⁵Фон-Дер-Флаасс, Д. Г. Совершенные 2-раскраски 12-мерного куба, достигающие границы корреляционной иммунности / Д. Г. Фон-Дер-Флаасс // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — Т. 4. — С. 292 — 295.

⁶Воробьев, К.В. О совершенных 2-раскрасках гиперкуба / К. В. Воробьев, Д. Г. Фон-Дер-Флаасс // Сиб. электрон. мат. изв. — 2010. — Т. 7. — С. 65 — 75.

⁷Martin, W. J. Completely Regular Designs / W. J. Martin // J. Combin. Designs. — 1998. — V. 6, № 4. — P. 261 — 273.

⁸Могильных, И. Ю. Совершенные 2-раскраски графов Джонсона / И. Ю. Могильных // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск. — 2010.

⁹Gavrilyuk, A. L. On Perfect 2-Colorings of Johnson Graphs $J(v, 3)$ / A. L. Gavrilyuk, S. V. Goryainov // Journal of Combinatorial Designs. — 2013. — V. 21, № 6. — P. 232 — 252.

Для графа бесконечной прямоугольной решетки $G(Z^2)$ первые результаты получены М. А. Аксенович¹⁰: она перечислила все допустимые матрицы совершенных раскрасок радиуса 1 в 2 цвета и нашла некоторые необходимые условия для того, чтобы матрица была допустимой в случае $r \geq 2$. Параметры и свойства совершенных раскрасок такого графа в своей кандидатской диссертации изучала С. А. Пузынина¹¹. В своих работах она показала, что все совершенные раскраски радиуса $r > 1$ бесконечной прямоугольной решетки являются периодическими, а также доказала их периодизуемость в случае $r = 1$. Этим же автором описаны все допустимые матрицы третьего порядка графа $G(Z^2)$. Совершенные раскраски такого графа вплоть до 9 цветов получены Д. С. Кротовым¹².

Совершенная раскраска называется дистанционно регулярной, если ее матрица параметров приводима к трехдиагональному виду. Фактически это означает, что цвета в раскраске можно упорядочить так, что каждый из них, кроме себя, будет видеть лишь два соседних цвета, при этом каждый из крайних цветов (первый и последний) образует полностью регулярный код. Параметры всех дистанционно регулярных раскрасок бесконечной квадратной решетки перечислены С. В. Августиновичем, А. Ю. Васильевой и И. В. Сергеевой¹³.

Изучались совершенные раскраски и других бесконечных решеток: треугольной и гексагональной. С. А. Пузынина доказала периодизуемость совершенных раскрасок таких транзитивных решеток¹⁴. Дистанционно-регулярные раскраски бесконечной треугольной решетки были перечислены А. Ю. Васильевой¹⁵, гексагональной решетки — С. В. Августиновичем, Д. С. Кротовым и А. Ю. Васильевой¹⁶.

Граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, а ребрами соединены вершины, находящиеся на расстоянии $d \in \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ называется *бесконечным циркулянтным графом с дистанциями* d_1, d_2, \dots, d_n и обозначается $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$. По графу $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ можно построить соответствующий ему циркулянтный граф длины

¹⁰Axenovich, M. On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius / M. Axenovich // Discrete Mathematics. — 2003. — V. 268. — P. 31 — 49.

¹¹Пузынина, С. А. Совершенные раскраски бесконечной прямоугольной решетки / С. А. Пузынина // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск. — 2008.

¹²Krotov, D. S. Perfect colorings of Z^2 : Nine colors / D. S. Krotov // E-print 0901.0004, arXiv.org. — 2009. — Available at <http://arxiv.org/abs/0901.0004>.

¹³Августинович, С. В. Дистанционно регулярные раскраски бесконечной квадратной решетки / С. В. Августинович, А. Ю. Васильева, И. В. Сергеева // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 3 — 10.

¹⁴Puzynina, S. A. On periodicity of perfect colorings of the infinite hexagonal and triangular grids / S. A. Puzynina // Sib Math. J. — 2011. — V. 52, № 1. — P. 91 — 104.

¹⁵Vasil'eva, A. Yu. Distance regular colorings of the infinite triangular grid / A. Yu. Vasil'eva // Collection of Abstracts of the International Conference "Mal'tsev Meeting". — Novosibirsk: Novosibirsk State University. — 2014. — P. 98.

¹⁶Avgustinovich, S. V. Completely regular codes in the infinite hexagonal grid / S. V. Avgustinovich, D. S. Krotov, A. Yu. Vasil'eva // Sib. Electron. Math. Rep. — 2016. — V. 13. — P. 987—1016.

t , обозначим его через $C_t(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Множество его вершин совпадает с множеством элементов группы Z_t , и для любой вершины мультимножество инцидентных ей ребер имеет вид $\{\{v, v \pm d_i \bmod t\} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$. Бесконечный циркулянтный граф, набор дистанций которого образует отрезок натуральных чисел от 1 до n , называется *бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором n дистанций* и обозначается $Ci_\infty(n)$.

Ряд результатов для совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов получен Д. Б. Хорошиловой^{17 18}. Полное описание совершенных раскрасок бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций в 2 цвета получено О. Г. Паршиной¹⁹. В 2015 году этим же автором сформулирована гипотеза, характеризующая совершенные раскраски графов $Ci_\infty(n)$ в произвольное конечное число цветов²⁰. В диссертации получены результаты, подтверждающие эту гипотезу для $n \leq 2$, для $n > 2$ задача еще не решена.

Рассматривая всевозможные совершенные раскраски заданного графа или класса графов, особое внимание уделялось случаю двух цветов, потому что в рамках этого случая представляется возможным разработать инструменты для изучения совершенных раскрасок объектов и собрать материал для обобщения, не перегружая исследование перебором большого числа параметров. В данной диссертации охарактеризованы все совершенные раскраски графа бесконечной цепи, графа P_∞ и $Ci_\infty(2)$ в любое конечное число цветов. Полученные результаты относятся к числу немногих известных описаний такого рода для бесконечных графов или бесконечных серий графов.

Цель и задачи исследования. Объектами исследования являются такие семейства транзитивных графов ограниченной степени, как транзитивные кубические графы, граф бесконечной призмы и бесконечный циркулянтный граф с дистанциями 1 и 2. **Цель работы** состоит в характеристике совершенных раскрасок таких графов.

Научная новизна и значимость. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и снабжены подробными доказательствами. Работа носит теоретический характер. Методы, предложенные в диссертации, могут быть использованы для изучения совершенных раскрасок двудольных и других семейств графов.

¹⁷Хорошилова, Д. Б. О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета / Д. Б. Хорошилова // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2009. — Т. 16, № 1. — С. 80–92.

¹⁸Хорошилова, Д. Б. О параметрах совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов / Д. Б. Хорошилова // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2011. — Т. 18, № 6. — С. 82–89.

¹⁹Паршина, О. Г. Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций / О. Г. Паршина // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2014. — Т. 21, № 2. — С. 76–83.

²⁰Parshina, O.G. Perfect k -colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances [Электронный ресурс] / O. G. Parshina // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School on Groups and Graphs, Algorithms and Automata. (August 9-15, 2015. Yekaterinburg, Russia). — P. 80. — Режим доступа: http://g2a2.imm.uran.ru/doc/G2A2_Abstracts.pdf.

Методы исследования. Для решения задач, сформулированных в диссертации, созданы и реализованы новые методы.

Для описания допустимых параметров совершенных 2-раскрасок исследуемых бесконечных семейств кубических графов в диссертационной работе разработан метод локально жестких фрагментов. Этот метод эффективен при изучении совершенных раскрасок конечных графов малого обхвата. В случае графа бесконечной призмы применение принципа индуцирования оказалось более рациональным. Предложенный в диссертации принцип индуцирования эффективен для решения задач характеристики совершенных раскрасок двудольных графов. Бесконечный циркулянтный граф с дистанциями 1 и 2 не является двудольным. Для описания всех его совершенных раскрасок автором диссертации был создан другой метод — метод минимальных расстояний в $(0,1)$ -разметках. Такая техника может быть использована для исследования совершенных раскрасок графов, в группах автоморфизмов которых есть элемент бесконечного или достаточно большого порядка.

Основные результаты диссертации.

1. Перечислены все допустимые параметры совершенных 2-раскрасок следующих бесконечных семейств кубических графов: конечных призм, лестниц Мебиуса, скрещенных призм, хордальных циклов, обобщенных графов Петерсена, усеченных графов.
2. Получено полное описание допустимых параметров совершенных 2-раскрасок всех транзитивных кубических графов с числом вершин, не превосходящим 18.
3. Для графа бесконечной призмы перечислены все совершенные раскраски в конечное число цветов.
4. Описаны все совершенные раскраски в конечное число цветов бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 6 работ, в том числе 4 статьи в журналах из списка ВАК.

Апробация работы. Результаты диссертации прошли апробацию на семинарах «Теория кодирования», «Факторные языки», «Теория графов» и «Дискретный анализ» Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (2015—2017 гг.), на семинаре по алгоритмической математике Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета, семинаре Добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН. Результаты диссертации также докладывались на Международной Студенческой Научной Конференции (НГУ, 2010 г.).

Личный вклад соискателя. Работы [1] и [3] написаны в соавторстве с С. В. Августиновичем. В данных работах С. В. Августиновичу принадлежат постановки задач и выбор методов исследования. Соискателю принадлежат доказательства основных результатов. Работа [4] написана в соавторстве с О. Г. Паршиной. Вклад соискателя в получение результата этой работы является определяющим.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Нумерация теорем, лемм и следствий сквозная. Список литературы включает в себя 30 наименований, в том числе 6 работ автора по теме диссертации, приведенные в конце списка. Текст работы изложен на 70 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сформулированы необходимые определения, сделан краткий обзор известных результатов по теме исследования, обсуждается содержание диссертации по главам.

Приведем краткое описание результатов настоящей диссертации. **Первая глава** диссертации посвящена описанию параметров совершенных 2-раскрасок кубических графов. Рассмотрены такие бесконечные семейства кубических графов, как конечные призмы, лестницы Мебиуса, скрещенные призмы, хордальные циклы, обобщенные графы Петерсена, усеченные графы.

Нетрудно показать, что матрицами параметров совершенных 2-раскрасок кубического графа G могут быть только следующие шесть матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Везде в дальнейшем используются именно эти обозначения для рассматриваемых матриц.

Формальные определения исследуемых семейств кубических графов будем сопровождать для наглядности схемами их локального строения.

Конечной призмой $P(n)$ называется граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$ и ребер $E = \{(i, i + 1) \mid i = \overline{0, 2n - 1}, i \text{ четное}\} \cup \{(i, i + 2) \mid i = \overline{0, 2n - 1}\}$ (сложение по модулю $2n$). А граф с тем же множеством вершин и множеством ребер $E = \{(i, i + 1), (i, i + n) \mid i = \overline{0, 2n - 1}\}$ (сложение по модулю $2n$) называется *лестницей Мебиуса* $M(n)$.

Заметим, что лестница Мебиуса $M(n)$ локально устроена как призма $P(n)$ (рис. 1), отличие состоит в том, что у лестницы Мебиуса концы полосы перед соединением перекручиваются на один оборот.

Параметры совершенных раскрасок в 2 цвета конечных призм и лестниц Мебиуса перечислены в следующих теоремах.

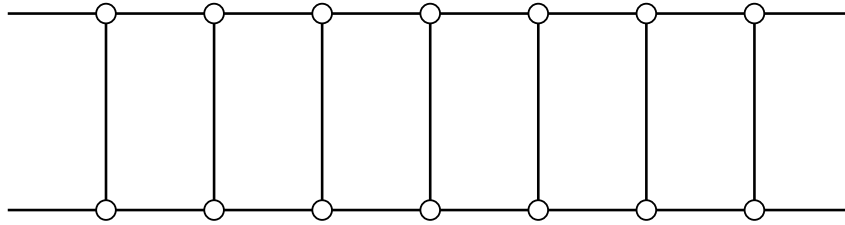


Рис. 1: Локальное строение призмы

Теорема 1. Допустимые матрицы второго порядка для конечной призмы $P(n)$ исчерпываются следующим списком:

1. A_1 при любых n ;
2. A_2 при n , кратных 3;
3. A_3 и A_6 при четных n ;
4. A_4 при n , кратных 4;
5. A_5 не является допустимой ни при каких n .

Теорема 2. Допустимые матрицы второго порядка для лестницы Мебиуса $M(n)$ исчерпываются следующим списком:

1. A_1 при n , кратных 4;
2. A_2 при n , кратных 3;
3. A_3 при четных n ;
4. A_4 при $n = 2p$, где p — нечетное число;
5. A_6 при нечетных n ;
6. A_5 не является допустимой ни при каких n .

Определим элементы следующей бесконечной серии. Граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$ и ребер $E = \{(i, i + 1), (i, i + 2) \mid i = \overline{0, 2n - 1}, i \text{ четное}\} \cup \{(i, i + 4) \mid i = \overline{0, 2n - 1}, i \text{ нечетное}\}$ (сложение по модулю $2n$) называется обобщенным графом Петерсена $GP(n)$.

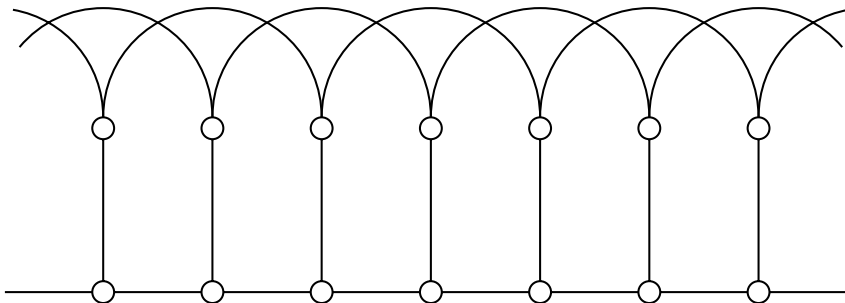


Рис. 2: Локальное строение обобщенного графа Петерсена

Допустимые матрицы совершенных 2-раскрасок таких графов охарактеризованы в теореме 3.

Теорема 3. Допустимые матрицы второго порядка для обобщенного графа Петерсена $GP(n)$ исчерпываются следующим списком:

1. A_1 при любых n ;
2. A_2 при n , кратных 3;
3. A_5 при n , кратных 5;
4. A_3 , A_4 и A_6 не являются допустимыми ни при каких n .

Скращенной призмой $CP(n)$ называется граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 4n - 1\}$ и ребер

$$E = \{(i, i + 2) \mid i = \overline{0, 4n - 1}\} \cup \{(i, i + 3) \mid i = 4p, p = \overline{0, n - 1}\} \cup \{(i, i - 1) \mid i = 4p + 2, p = \overline{0, n - 1}\} \text{ (сложение по модулю } 4n\text{)}.$$

Локальное строение скрещенных призм изображено на рис. 3.

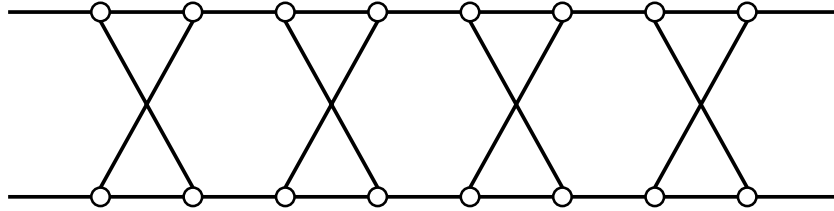


Рис. 3: Локальное строение скрещенной призмы

Теорема 4 содержит полное описание параметров совершенных 2-раскрасок скрещенных призм.

Теорема 4. Допустимые матрицы второго порядка для скрещенной призмы $CP(n)$ исчерпываются следующим списком:

1. A_1 , A_3 и A_6 при любых n ;
2. A_4 при четных n ;
3. A_2 и A_5 не являются допустимыми ни при каких n .

Следует отметить интересное свойство, которым обладают графы $CP(n)$ в случае четного n : число различных совершенных раскрасок таких графов с матрицей параметров A_4 экспоненциально зависит от n .

Определим элементы пятого бесконечного семейства кубических графов. Хордальным циклом $H(n)$ назовем граф с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 2n - 1\}$ и ребер

$$E = \{(i, i + 1) \mid i = \overline{0, 2n - 1}\} \cup \{(i, i + 5) \mid i = \overline{0, 2n - 1}, i \text{ четное}\}$$

(сложение по модулю $2n$). Локальное строение таких графов проиллюстрировано на рис. 4.

Для хордальных циклов справедлива следующая теорема.

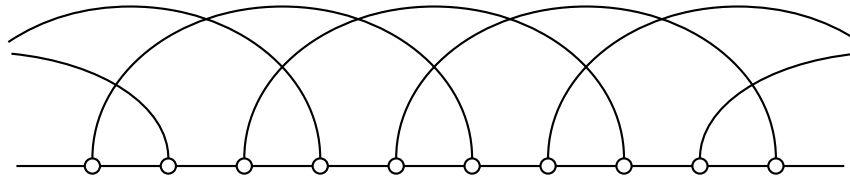


Рис. 4: Локальное строение хордального цикла

Теорема 5. *Допустимые матрицы второго порядка для хордального цикла $H(n)$ исчерпываются следующим списком:*

1. A_1 и A_3 при четных n ;
2. A_4 при n , кратных 4;
3. A_6 при любых n ;
4. A_2 и A_5 не являются допустимыми ни при каких n .

Шестая бесконечная серия, исследованная в диссертации — усеченные кубические графы. Условие транзитивности здесь не требуется. Пусть G — произвольный кубический граф. Граф, полученный из графа G вставкой вместо каждой вершины треугольника (см. рис. 5), будем называть *усеченным графом* (*truncated graph*) и обозначать через $T(G)$. В некотором смысле граф $T(G)$ получен отсечением вершин графа G .

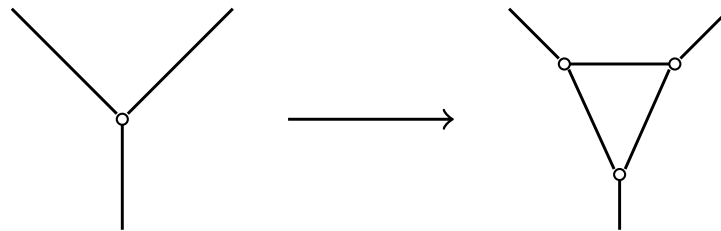


Рис. 5: Локальное строение усеченных кубических графов

Теорема 6 отражает связь параметров совершенных 2-раскрасок графа $T(G)$ с параметрами совершенных раскрасок и структурными свойствами графа G .

Теорема 6. *Пусть G — произвольный кубический граф. Допустимые матрицы второго порядка для графа $T(G)$ исчерпываются следующим списком:*

1. A_1 допустима для графа $T(G)$, если и только если A_6 допустима для графа G ;
2. A_2 допустима для графа $T(G)$, если и только если в G есть совершенное паросочетание;
3. A_3 допустима для графа $T(G)$, если и только если A_3 допустима для графа G ;

4. A_4 допустима для графа $T(G)$, если и только если A_4 допустима для графа G ;

5. A_5 и A_6 не являются допустимыми ни для какого графа $T(G)$.

Определенные таким образом бесконечные серии графов вместе с графом Паппа позволяют накрыть все транзитивные кубические графы с числом вершин, не превосходящим 18.

Для графа Паппа справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Допустимыми матрицами второго порядка для графа Паппа являются лишь матрицы A_2 и A_6 .*

Результатом первой главы является полное описание допустимых параметров совершенных 2-раскрасок следующих серий кубических графов: конечных призм, лестниц Мебиуса, обобщенных графов Петерсена, скрещенных призм, хордальных циклов, усеченных графов и транзитивных кубических графов с числом вершин, не превосходящим 18. Результаты первой главы опубликованы в работе [1].

Во **второй главе** диссертации изучаются совершенные раскраски графов призмы и лестницы Мебиуса. Рассмотрены два случая: трех и произвольного количества цветов. Параграф 2.1 посвящен совершенным 3-раскраскам конечных графов призм $P(n)$ и лестниц Мебиуса $M(n)$, а в параграфе 2.2 описаны совершенные раскраски графа бесконечной призмы P_∞ в произвольное количество цветов. Заметим, что полное описание допустимых параметров совершенных 3-раскрасок графов $P(n)$ и $M(n)$ может быть получено в качестве следствия параграфа 2.2. Однако результат для случая трех цветов получен иначе, чем в случае их произвольного количества, вследствие чего заслуживает отдельного внимания.

В решении задачи полной характеристики матриц совершенных 3-раскрасок конечных графов призмы и лестницы Мебиуса большую роль играет гомоморфизм бесконечной прямоугольной решетки на тороидальный граф. Такая связь исследуемых графов с бесконечной прямоугольной решеткой позволяет использовать результаты, полученные для совершенных 3-раскрасок последней ²¹, и тем самым существенно сократить перебор. Согласно списку матриц, допустимых для графа $G(Z^2)$, матрицами параметров совершенных 3-раскрасок призм $P(n)$ и лестниц Мебиуса $M(n)$ могут быть только следующие восемь матриц:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

²¹ Пузынина, С. А. Совершенные раскраски вершин графа $G(Z^2)$ в три цвета / С. А. Пузынина // Дискретн. анализ и исслед. опер. — Сер. 2, 2005. — Т. 12, № 1. — С. 37 – 54.

Параметры совершенных 3-раскрасок конечных призм перечислены в следующей теореме.

Теорема 8. *Допустимые матрицы третьего порядка для конечной призмы $P(n)$ исчерпываются следующим списком:*

1. B_1 и B_8 при n кратных 6;
2. B_3 и B_5 при n , кратных 4;
3. B_4 и B_6 при n , кратных 3;
4. B_7 при n , кратных 5;
5. B_2 не является допустимой ни при каких n .

Теорема 9 характеризует параметры совершенных 3-раскрасок лестниц Мебиуса.

Теорема 9. *Допустимые матрицы третьего порядка для лестницы Мебиуса $M(n)$ исчерпываются следующим списком:*

1. B_1 при $n = 3r$, где r - нечетное число;
2. B_3 при $n = 2r$, где r - нечетное число;
3. B_5 при n , кратных 4;
4. B_6 при n , кратных 3;
5. B_7 при n , кратных 5;
6. B_8 при n , кратных 6;
7. B_2 и B_4 не являются допустимыми ни при каких n .

Полное описание совершенных раскрасок графа P_∞ в конечное число цветов получено применением введенного автором диссертации принципа индуцирования. Этот принцип использует двудольность исследуемого графа и в корне отличается от подхода, реализованного в предыдущем параграфе. Приведем основные определения и утверждения, касающиеся этого принципа.

Пусть $G(V_1, V_2)$ — двудольный граф с долями V_1 и V_2 . Раскраску вершин одной доли графа G далее будем называть *полураскраской* этого графа. Полураскраска графа G называется *допустимой*, если существует совершенная раскраска вершин всего графа, частью которой она является. Две допустимые полураскраски графа G назовем *сопряженными*, если они дополняют друг друга до совершенной раскраски всего графа.

Пусть f_1 — произвольная раскраска вершин множества V_1 . *Операция индуцирования* продолжает полураскраску f_1 до раскраски всего графа следующим образом: вершины множества V_2 с одинаковым цветовым составом окружения окрашиваются одинаково, а имеющие разные цветовые составы — в разные цвета. При этом используются новые цвета, которых не было в начальной полураскраске. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *(Об индуцировании) Полураскраска произвольного двудольного графа G допустима тогда и только тогда, если соответствующая ей индуцированная раскраска является совершенной.*

Совершенную раскраску графа G будем называть *двудольной*, если множества цветов соответствующих полураскрасок не пересекаются. В противном случае, совершенная раскраска этого графа называется *недвудольной*. Заметим, что множества цветов полураскрасок совпадают в недвудольном случае, если G — связный.

Для полного описания совершенных раскрасок двудольного графа G предлагается *принцип индуцирования*:

1. получить полное описание допустимых полураскрасок графа G , используя лемму 1;
2. для каждой допустимой полураскраски найти все сопряженные ей дополнения в двудольном и недвудольном случаях.

Для исследования параметров совершенных раскрасок конечных призм в 2 и 3 цвета автор опирался на локальное строение призмы, изображенное на рис. 6 а (см. [1] и [2]). Т.к. для описания совершенных раскрасок графа бесконечной призмы существенно используется его двудольность, то локальное строение в форме, представленной на рис. 6 б, оказывается более наглядным. Поэтому далее будем использовать именно его.

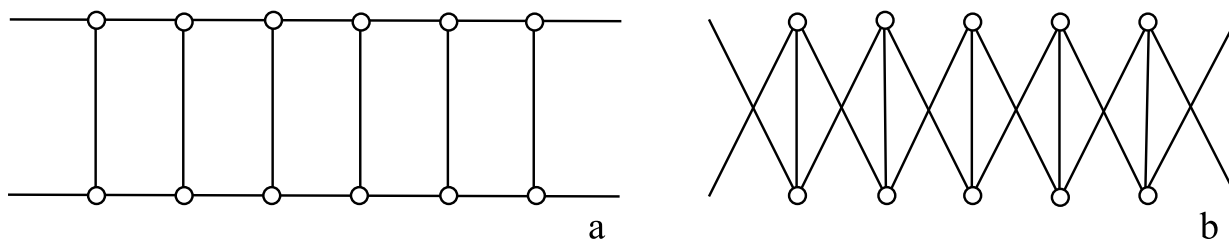


Рис. 6: Локальное строение бесконечной призмы

Легко понять, что всякая совершенная раскраска графа P_∞ является периодической. Значит, для описания такой раскраски достаточно указать ее наименьший период. Записывать период будем таблицей размера $2 \times l$, где l — длина периода, первая строка таблицы соответствует раскраске верхней доли, вторая — нижней. Аналогичное утверждение справедливо и для допустимой полураскраски призмы. Ее период будем записывать заключенной в квадратные скобки строкой.

Характеристическим циклом доли призмы назовем граф, множество вершин которого совпадает с множеством вершин этой доли, две вершины соединены ребром, если они принадлежат одному 4-циклу графа P_∞ . Допустимую полураскраску призмы будем называть *стандартной*, если она является совершенной раскраской своего характеристического цикла. В [3] доказано, что допустимые полураскраски призмы исчерпываются четырьмя бесконечными сериями стандартных полураскрасок и двумя нестандартными — $[0\ 0\ 0\ 1]$ и $[0\ 0\ 1\ 2]$.

Множество совершенных раскрасок графа бесконечной призмы разбивается на три подмножества: стандартные бесконечные серии, спорадические стандартные раскраски и нестандартные раскраски.

Раскраски стандартных бесконечных серий получены из стандартных полураскрасок по шаблону, применимому ко всем таким полураскраскам. Стандартные двудольные раскраски призмы получаются применением операции штрих-дублирования к некоторой стандартной полураскраске. *Операция штрих-дублирования* продолжает полураскраску графа P_∞ до двудольной раскраски всего графа посредством комплиментарной штрих-копии исходной полураскраски во вторую долю (без сдвига и зеркального отражения). Например, результатом применения такой операции к полураскраске $[0 \ 1 \ 2 \ \dots \ n-1]$ является следующая совершенная раскраска бесконечной призмы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0' & 1' & 2' & \dots & (n-2)' & (n-1)' \end{pmatrix}.$$

Недвудольную совершенную раскраску графа бесконечной призмы считаем стандартной, если она получена сопряжением двух одинаковых стандартных полураскрасок (одна может быть переведена в другую некоторым сдвигом и, возможно, отражением).

Спорадическими назовем раскраски, получаемые сопряжением стандартных полураскрасок, но не входящие в бесконечные серии. Наконец, нестандартные полураскраски порождают нестандартные совершенные раскраски призмы.

Основные результаты параграфа 2.2 сформулированы в следующих двух теоремах. Теорема 10 характеризует двудольные совершенные раскраски графа P_∞ .

Теорема 10. *Двудольные совершенные раскраски графа бесконечной призмы исчерпываются следующим списком:*

1. стандартные бесконечные серии;
2. четыре спорадические стандартные раскраски:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & a & b \end{pmatrix};$$

3. две нестандартные раскраски:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ a & b & c & c \end{pmatrix}.$$

Недвудольные совершенные раскраски графа P_∞ описаны в теореме 11.

Теорема 11. *Недвудольные совершенные раскраски графа бесконечной призмы исчерпываются следующим списком:*

1. стандартные бесконечные серии;
2. три спорадические стандартные раскраски:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

3. три нестандартные раскраски:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результаты второй главы опубликованы в работе [3].

В **третьей** главе диссертации исследуются совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2. Локальное строение этого графа приведено на рис 7).

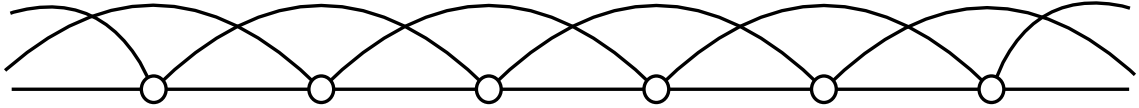


Рис. 7: Локальное строение бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2

Определим некоторые необходимые понятия. Любая совершенная раскраска графа $Ci_\infty(d_1, \dots, d_n)$ является периодической¹⁷, значит, для описания совершенной раскраски достаточно указать ее наименьший период. Записывать такой период будем заключенной в квадратные скобки строкой, количество элементов в которой равно длине периода.

Пусть $k \geq 1$. Совершенные раскраски циркулянтных графов $Ci_\infty(n)$ с периодами $S(k) = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k]$, $S_{11}(k) = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ (k-1) \ k \ (k-1) \ \dots \ 3 \ 2]$, $S_{12}(k) = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ (k-1) \ k \ k \ (k-1) \ \dots \ 3 \ 2]$ и $S_{22}(k) = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ (k-1) \ k \ k \ (k-1) \ \dots \ 3 \ 2 \ 1]$ будем называть *стандартными*.

Совершенные раскраски графов $Ci_\infty(n)$ с длинами периодов $2n$, $2n + 1$ и $2n + 2$, которые не являются стандартными, назовем *нестандартными*. Существует взаимнооднозначное соответствие между совершенной раскраской графа $Ci_\infty(n)$ с периодом длины t и совершенной раскраской конечного циркулянта $Ci_t(n)$. Значит, для характеристики нестандартных раскрасок бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором n дистанций достаточно описать совершенные раскраски графов $Ci_{2n}(n)$, $Ci_{2n+1}(n)$ и $Ci_{2n+2}(n)$ и исключить из полученных периодов стандартные. На рис. 8 изображены диаграммы графов $Ci_4(2)$, $Ci_5(2)$ и $Ci_6(2)$.

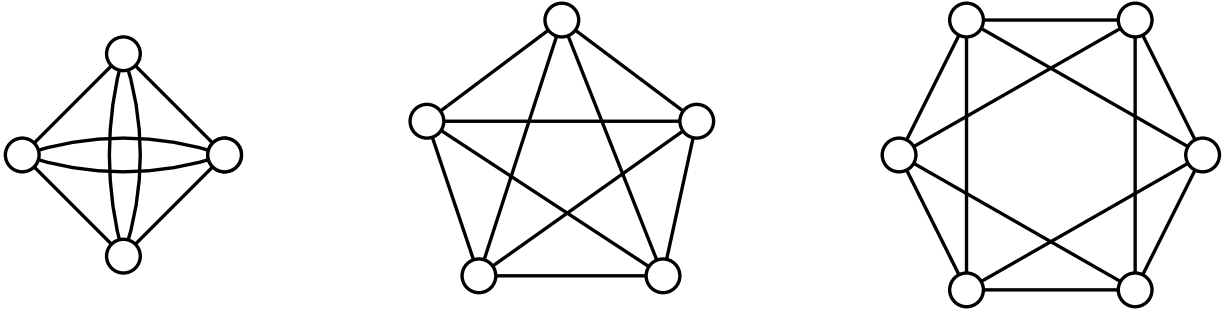


Рис. 8: Диаграммы графов $Ci_4(2)$, $Ci_5(2)$ и $Ci_6(2)$

Граф $Ci_{2n+1}(n)$ является полным графом с $2n + 1$ вершинами. По определению совершенной раскраски любая раскраска его вершин является совершенной.

Граф $Ci_{2n}(n)$ – это граф K_{2n} с дополнительными ребрами, образующими совершенное паросочетание, а граф $Ci_{2n+2}(n)$ представляет собой граф K_{2n+2} , из которого такое паросочетание удалено. Следовательно, задача характеристики совершенных раскрасок таких циркулянтов сводится к описанию совершенных раскрасок паросочетаний.

Пусть $M = (V, E)$ – граф совершенного паросочетания на множестве вершин V . Построим раскраску его вершин в k цветов. Для этого множество цветов $I = \{1, 2, \dots, k\}$ разобьем на два непересекающихся подмножества I_1 и I_2 так, чтобы $|I_2| = 2l$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Цвета множества I_2 разобьем на пары: $(\alpha_i, \bar{\alpha}_i), i = 1, \dots, l$. Концы каждого элемента паросочетания красим одним из двух доступных способов: одинаково – цветом α ($\alpha \in I_1$) или цветами α_i и $\bar{\alpha}_i$, где $(\alpha_i, \bar{\alpha}_i)$ – пара из разбиения I_2 . Описанную конструкцию назовем *антиподальной* раскраской паросочетания. Легко видеть, что совершенные раскраски паросочетания M исчерпываются его антиподальными раскрасками.

Описание совершенных раскрасок графа $Ci_\infty(n)$ с периодами $2n, 2n + 1$ и $2n + 2$, таким образом, завершено. Исключив из этих раскрасок стандартные, получим множество его нестандартных совершенных раскрасок.

Ранее была выдвинута гипотеза о том, что все совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа со сплошным набором n дистанций исчерпываются стандартными бесконечными сериями и нестандартными совершенными раскрасками ²⁰.

Основной результат третьей главы, сформулированный в следующей теореме, доказывает, что гипотеза верна в случае $n = 2$.

Теорема 12. *Совершенные раскраски графа $Ci_\infty(2)$ с точностью до переобозначения цветов исчерпываются следующим списком:*

1. стандартные бесконечные серии;

2. пятнадцать нестандартных раскрасок:

$N_1 = [11112]$, $N_2 = [11122]$, $N_3 = [11212]$, $N_4 = [11123]$, $N_5 = [11213]$,
 $N_6 = [11223]$, $N_7 = [12123]$, $N_8 = [11234]$, $N_9 = [12134]$, $N_{10} = [111222]$,
 $N_{11} = [112113]$, $N_{12} = [123145]$, $N_{13} = [112334]$, $N_{14} = [123124]$,
 $N_{15} = [121323]$.

Результат третьей главы опубликован в работе [4].

В **заключении** приведены основные результаты диссертации.

Благодарности. Я выражаю глубокую признательность своему научному руководителю Сергею Владимировичу Августиновичу за постановку интересных задач, терпение и проявленное внимание к работе. Благодарю Ольгу Геннадьевну Паршину за плодотворное сотрудничество, а также рецензентов своих печатных работ, замечания которых позволили существенно улучшить тексты. Я сердечно благодарю семьи моих друзей в г. Новосибирске за всестороннюю поддержку и помощь.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых журналах из списка ВАК

- [1] Августинович С. В., Лисицына М. А. Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов / С. В. Августинович, М. А. Лисицына // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2011. — Т. 18, № 2. — С. 3–17. (Перевод: Avgustinovich S. V., Lisitsyna M. A. Perfect 2-colorings of transitive cubic graphs / S. V. Avgustinovich, M. A. Lisitsyna // J. Appl. Industr. Math. — 2011. — V. 5, № 4. — P. 519–528.)
- [2] Лисицына М. А. Совершенные 3-раскраски графов призмы и лестницы Мебиуса / М. А. Лисицына // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 28–36. (Перевод: Lisitsyna M. A. Perfect 3-colorings of prism and Mobius ladder graphs / M. A. Lisitsyna // J. Appl. Industr. Math. — 2013. — V. 7, № 2. — P. 215–220.)
- [3] Лисицына М. А., Августинович С. В. Совершенные раскраски призмы / М. А. Лисицына, С. В. Августинович // Сиб. электрон. мат. изв. — 2016. — Т. 13. — С. 1116–1128.
- [4] Лисицына М. А., Паршина О. Г. Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 / М. А. Лисицына, О. Г. Паршина // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 20–34. (Перевод: Lisitsyna M. A. Perfect colorings of the infinite circulant graph with distances 1 and 2 / M. A. Lisitsyna, O. G. Parshina // J. Appl. Industr. Math. — 2017. — V. 11, № 3. — P. 381–388.)

Тезисы и материалы конференций

- [5] Лисицына М. А. Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов / М. А. Лисицына // Материалы 48-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс», математика. (Новосибирск, 12-13 апреля 2010). — Новосибирск: Редакционно-издательский центр НГУ.— 2010. — С. 166.
- [6] Lisitsyna M. A. Induction principle in perfect colorings theory [Электронный ресурс] / M. Lisitsyna // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School on Groups and Graphs, Spectra and Symmetries. (August 15-28, 2016. Akademgorodok, Novosibirsk, Russia). — P. 77. — Режим доступа: <http://math.nsc.ru/conference/g2/g2s2/exptext/Book\%20of\%20abstract-G2S2-2016.pdf>.