На правах рукописи

ИЛЬЕВ Артем Викторович

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НАД ГРАФАМИ, РАЗРЕШИМОСТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ И АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ И МАТРОИДОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Ремесленников Владимир Никанорович

Официальные оппоненты:
Тимошенко Евгений Иосифович
доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет», профессор кафедры алгебры и математической логики;

Соломатин Денис Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный педагогический университет», доцент кафедры математики и методики обучения математике.

Ведущая организация:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Защита диссертации состоится 30 ноября 2017 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: пр. акад. Коптюга 4, Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан « » октября 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент А.И. Стукачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время алгебраические методы широко используются в теории графов и матроидов [1, 2, 5, 8, 12, 13]. Сформировалось целое направление исследований, которое получило название алгебраической теории графов. Хотя и в меньшей степени, но наряду с алгебраическими методами в теории графов успешно применяются также логические методы, прежде всего методы теории моделей. По аналогии с алгебраической теорией графов, можно говорить о формировании особого раздела теории графов — логической теории графов [8].

Решение систем уравнений над графами является новым направлением алгебраической геометрии. В монографии [4] подробно освещены вопросы о решении систем уравнений над произвольными алгебраическими системами, такие как проверка совместности системы уравнений, описание ее общего решения и т.д. Применение общих понятий и теорем из этой монографии дает возможность определить четкие алгоритмические процедуры решения систем уравнений над графами, что и сделано в данной диссертации.

Вопросы аксиоматизируемости и универсальной аксиоматизируемости различных классов графов и матроидов вызывают традиционный интерес [14, 15, 16, 19, 20]. Так, в [16] обсуждаются вопросы аксиоматизируемости наследственных классов графов, определенных в терминах запрещенных порожденных подграфов. В диссертации рассматривается задача поиска условий аксиоматизируемости наследственных классов графов, определенных в терминах всех возможных запрещенных подграфов, а не только порожденных.

Хорошо известно, что теория графов неразрешима [6, 9]. В связи с этим естественно возникают вопросы о разрешимости элементарных теорий наследственных классов графов, а также их универсальных теорий.

Изучение универсальных теорий особенно актуально в силу их значения в теории моделей. Ряд общих проблем разрешимости интерпретируется в качестве проблем разрешимости универсальных теорий [6]. Повышенный интерес к универсальным теориям вызывает их применение в логическом программировании и теории баз данных [3]. Наконец, многие комбинаторные задачи, в частности, задачи экстремальной комбинаторики, сформулированные на языке теории моделей, приводят к изучению моделей универсальных теорий первого порядка [18].

Цель работы. Построение алгоритмов решения систем уравнений над графами, исследование проблем аксиоматизируемости наследственных классов графов и матроидов, а также проблем разрешимости универсальных теорий наследственных классов графов.

Методы исследований. В работе использовались методы логики предикатов первого порядка, теории моделей, теории графов и теории матроидов.

Научная новизна. В диссертации исследованы системы уравнений над обыкновенными графами и построен алгоритм нахождения их общих решений. Предложены аксиоматики наследственных классов графов и доказана разрешимость универсальных теорий этих классов. Дано определение матроида в терминах поверхностей, с помощью которого получены аксиоматики наследственных классов матроидов. Все результаты являются новыми.

Основные результаты.

1. Предложены алгоритмы проверки совместности систем уравнений над конечными обыкновенными графами и алгоритмы построения общих решений таких систем уравнений.

2. Найдены критерии универсальной и конечной аксиоматизируемости монотонных наследственных классов графов. Доказана разрешимость универсальной теории графов и универсальной теории произвольного рекурсивно аксиоматизируемого наследственного класса графов.

3. Предложено эквивалентное определение матроида в терминах поверхностей различного ранга, удовлетворяющих заданным аксиомам инцидентности.

4. Установлена конечная аксиоматизируемость класса матроидов фиксированного ранга r и двух классов матроидов ранга, не большего r. Доказано, что класс матроидов конечного ранга не является аксиоматизируемым.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа имеет теоретический характер и вносит вклад в теорию моделей. Полученные результаты о решении систем уравнений над обыкновенными графами расширяют имеющиеся сведения об алгебраической геометрии над алгебраическими системами. Кроме того, существует тесная связь между системами уравнений над графами и проблемами разрешимости теорий наследственных классов графов. Установленные в работах соискателя факты аксиоматизируемости и разрешимости универсальных теорий ряда монотонных наследственных классов графов существенно дополняют уже имеющуюся картину результатов, полученных для наследственных классов графов. Предложенные соискателем способы аксиоматизируемости наследственных классов матроидов средствами логики первого порядка позволяют изучать эти матроиды, не переходя к логике высших порядков. Практическая значимость результатов исследований состоит в том, что графы и матроиды являются адекватными моделями множеств допустимых решений большого числа практически важных задач. Теоретические результаты диссертации также могут быть использованы в учебном процессе.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на II Региональной конференции магистрантов, аспирантов и молодых ученых по физике и математике "ФМ ОмГУ 2014" (Омск, 2014), на Международной конференции "Аппроксимация логических моделей, алгоритмов и задач" (Омск, 2015), на Международной конференции "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2015), на IX Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем" (Москва и Подмосковье, 2015), на XII Международном семинаре "Дискретная математика и ее приложения" им. академика О.Б. Лупанова (Москва, 2016), на Международной конференции "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2016), а также на XVIII Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики" (Пенза, 2017).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 10 научных работ, из них 3 статьи в рецензируемых научных журналах из списка ВАК. Конфликт интересов с соавторами отсутствует, в совместных работах соискателю принадлежат доказательства результатов, включенных в диссертацию.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 51 наименование. Общий объем работы 97 страниц.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, формулируется цель исследования, приводятся основные определения и известные результаты, относящиеся к теме диссертации.

В **главе 1** исследуются системы уравнений над обыкновенными графами.

В параграфе 1.1 приводятся основные определения и теоретические факты.

Граф — это пара $\Gamma = (V, E)$, где V — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а E — множество неупорядоченных пар различных элементов из V, называемых *ребрами.* Если $(u, v) \in E$, то вершины u и v называются *смежными.* Графы без петель и кратных ребер называются *обыкновенными.*

Обыкновенный граф можно изучать как алгебраическую систему $\Gamma = \langle V, \mathrm{L} \rangle$, носитель которой V — непустое множество вершин, а язык L состоит из бинарного предиката смежности вершин и предиката равенства, причем предикат смежности $E(x, y)$ *иррефлексивен и симметричен*, т. е., удовлетворяет аксиоме:

$$\forall x \forall y \; [\neg E(x, x) \wedge (E(x, y) \to E(y, x))].$$

Случай, когда множество констант языка L взаимно однозначно соответствует множеству вершин графа, называется *диофантовым случаем.*

Пусть X — некоторое множество переменных. Множество $T_{\mathrm{L}}(X)$ *термов* произвольного языка L определяется рекурсивно:

(T1) все переменные $x \in X$ являются термами;

(T2) все константные символы языка L являются термами;

(T3) если $t_1, ..., t_n$ — термы и $F(x_1, ..., x_n)$ — функциональный символ языка L, то $F(t_1, ..., t_n)$ есть терм.

Так как язык графов не содержит функциональных символов, то термами языка графов являются только переменные x_i и константы $v_j \in V$.

Пусть $X = \{x_1, ..., x_k\}$ — конечное множество переменных. Множество $At_{\mathrm{L}}(X)$ *атомарных формул* языка L от переменных из множества X определяется следующим образом:

(A1) если $t_1, t_2 \in T_{\mathrm{L}}(X)$, то $t_1 = t_2$ — атомарная формула;

(A2) если $t_1, ..., t_n \in T_{\mathrm{L}}(X)$ и $R(x_1, ..., x_n)$ — предикатный символ языка L, то $R(t_1, ..., t_n)$ — атомарная формула.

Атомарные формулы множества $At_{\mathrm{L}}(X)$ называются *уравнениями* языка L с переменными из X. Всякое подмножество $S \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$ называется *системой уравнений* языка L. Уравнениями языка графов являются формулы: $x_i = x_j$, $x_i = v_j$, $v_i = v_j$, $E(x_i, x_j)$, $E(x_i, v_j)$ и $E(v_i, v_j)$.

Точка $v = (v_1, ..., v_n) \in V^n$ называется *решением уравнения* φ над графом $\Gamma = \langle V, \mathrm{L} \rangle$, если $\Gamma \models \varphi(v)$. Точка $v = (v_1, ..., v_n) \in V^n$ является *решением системы уравнений* $S \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$, если она является решением каждого уравнения из S.

Множество $V_\Gamma(S)$ всех решений системы S называется *алгебраическим множеством* над графом Γ, определенным системой уравнений S. Если $V_\Gamma(S) = \emptyset$, то система уравнений S называется *несовместной* над графом Γ; иначе она называется *совместной.*

Две системы уравнений S_1 и S_2 называются *эквивалентными* над графом Γ, если $V_\Gamma(S_1) = V_\Gamma(S_2)$.

Для любой системы уравнений S над Γ существует единственная эквивалентная ей максимальная система уравнений над Γ, которая называется *радикалом* системы S и обозначается $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$. Если система S несовместна над Γ, то $\mathrm{Rad}_\Gamma(S) = At_{\mathrm{L}}(X)$. Атомарные формулы из $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ называются *следствиями* системы уравнений S над Γ.

Координатный граф $CG_\Gamma(S)$ однозначно определяется радикалом $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ следующим образом.

Отношение θ_S на множестве термов $T_{\mathrm{L}}(X)$, заданное по правилу

$$t_1 \sim_{\theta_S} t_2 \longleftrightarrow (t_1 = t_2) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S),\ t_1, t_2 \in T_{\mathrm{L}}(X),$$

является отношением эквивалентности, а константные и предикатные символы языка графов L интерпретируются на фактор-множестве $T_{\mathrm{L}}(X)/\theta_S$ по правилам:

(1) $c/\theta_S = c$ для любого константного символа c;

(2) $E(t_1/\theta_S, t_2/\theta_S) = \text{И} \longleftrightarrow E(t_1, t_2) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$.

Построенный на фактор-множестве $T_{\mathrm{L}}(X)/\theta_S$ граф $CG_\Gamma(S)$ называется *координатным графом* алгебраического множества $V_\Gamma(S)$. Если система S несовместна над Γ, то $CG_\Gamma(S)$ является тривиальной системой $\mathcal{E}$, т. е. графом, состоящим из единственной вершины и петли.

Отметим, что роль координатного графа фиксированной системы уравнений S аналогична роли общего решения системы линейных уравнений над полем в линейной алгебре.

В параграфе 1.2 предложена процедура проверки совместности системы уравнений.

Пусть $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ — конечный обыкновенный граф и S — конечная система уравнений над Γ от переменных из множества $X = \{x_1, ..., x_k\}$. *Информационная база* системы S состоит из набора конечных множеств и натуральных чисел, определяемых по группам:

1) $X = \{x_1, ..., x_k\}$ — множество переменных, $S = \{s_1, ..., s_l\}$ — множество уравнений с переменными из X; k, l — числовые параметры.

2) $W_1, ..., W_k$ — подмножества $V(\Gamma)$. W_i состоит из вершин графа Γ, которые содержатся в записи уравнений вида $E(x_i, v)$ системы S; $\alpha_i = |W_i|$ — числовые параметры, где $i = 1, ..., k$.

3) $W_1^\perp, ..., W_k^\perp$ — подмножества $V(\Gamma)$. $W_i^\perp$ состоит из вершин графа Γ, которые смежны с каждой из вершин множества W_i, и содержит все возможные значения переменной x_i (если $W_i = \emptyset$, то по определению полагаем $W_i^\perp = V(\Gamma)$); $\beta_i = |W_i^\perp|$ — числовые параметры, где $i = 1, ..., k$.

4) $W_1^{\perp\perp}, ..., W_k^{\perp\perp}$ — подмножества $V(\Gamma)$. $W_i^{\perp\perp} = (W_i^{\perp})^{\perp}$; $\gamma_i = |W_i^{\perp\perp}|$ — числовые параметры, причем $\gamma_i \geq \alpha_i$ для любых $i = 1, ..., k$.

Если в информационной базе хотя бы одно из чисел β_i равняется нулю при $\alpha_i \neq 0$, то информационная база является *несогласованной*, а система S несовместна над Γ. Иначе запускается процедура проверки системы уравнений S на совместность.

Процедура 1 (проверка системы уравнений S на совместность).

Данная процедура строит классы эквивалентности $Y(t_i)$ на $T_{\mathrm{L}}(X)$, где t_i— переменная x_i либо константа v_i, и преобразует систему уравнений S над графом Γ в эквивалентную систему $\overline{S}$, не содержащую уравнений вида $t_i = t_j$. В начале работы процедуры каждое множество $Y(t_i)$ состоит только из одного терма t_i, а система $\overline{S}$ совпадает с S. В процессе работы процедуры происходит переопределение множеств $W_1^{\perp}, ..., W_k^{\perp}$. Система уравнений S над графом Γ является несовместной в следующих случаях.

1) Две разные константы v_i и v_j попали в один класс эквивалентности.

2) Некоторым переменным не могут быть присвоены никакие значения на графе Γ. Так будет, в частности, если:

— одно из переопределенных множеств $W_i^{\perp}$ стало пустым;

— после преобразований система $\overline{S}$ содержит уравнение вида $E(t_i, t_i)$;

— после преобразований система $\overline{S}$ содержит уравнение $E(v_i, v_j)$, при этом ребра (v_i, v_j) нет в графе Γ.

Теорема 1.1. *Процедура 1 корректно проверяет систему уравнений S на совместность.*

В параграфе 1.3 описываются процедуры построения радикала системы S и нахождения ее общего решения — координатного графа.

Процедура 2 (построение радикала).

Если система S несовместна над Γ, то $\mathrm{Rad}_{\Gamma}(S) = At_{\mathrm{L}}(X)$. В противном случае при построении радикала используются последние версии множеств $W_1^{\perp}, ..., W_k^{\perp}$, полученные при выполнении процедуры проверки совместности системы S. С их помощью заново определяются множества $W_1^{\perp\perp}, ..., W_k^{\perp\perp}$.

Далее радикал $\mathrm{Rad}_{\Gamma}(S)$ строится с помощью следующих действий.

1) К системе $\overline{S}$ добавляются все уравнения $E(x_i, v_j)$, где $v_j \in W_i^{\perp\perp}$.

2) К полученному множеству атомарных формул добавляются все равенства, обусловленные классами эквивалентности $Y(t)$: если $t_i, t_j \in Y(t)$, то $t_i = t_j \in \mathrm{Rad}_{\Gamma}(S)$.

3) Полученное множество атомарных формул дополняется всеми следствиями из него.

Процедура 3 (построение координатного графа).

Множество вершин координатного графа $\Delta = CG_\Gamma(S)$ совпадает с множеством индексов t_i классов эквивалентности $Y(t_i)$ и является подмножеством $V(\Gamma) \cup X$, а множество ребер выглядит так:

$$E(\Delta) = E(\Gamma) \cup E(x_i, x_j) \cup E(x_i, v_m), \text{где } E(x_i, x_j), E(x_i, v_m) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S).$$

Если система S несовместна над Γ, то $\Delta = \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — граф, состоящий из одной вершины и петли. В противном случае процедура выполняет следующие построения.

1) К множеству вершин графа Γ добавляются все вершины, помеченные элементами множества X.

2) К полученному графу добавляются всевозможные ребра (x_i, x_j) и (x_i, v_m), для которых $E(x_i, x_j), E(x_i, v_m) \in \mathrm{Rad}_\Gamma(S)$.

3) В полученном графе для каждого класса эквивалентности $Y(t_i)$ все вершины, находящиеся в этом классе, стягиваются в одну вершину, а кратные ребра заменяются одним ребром.

В результате получается координатный граф Δ.

Теорема 1.2. *Радикал* $\mathrm{Rad}_\Gamma(S)$ *и координатный граф* Δ *корректно строятся процедурами 2 и 3.*

В **главе 2** рассматриваются вопросы аксиоматизируемости различных классов графов на языке логики первого порядка.

В параграфе 2.1 приводятся основные определения и утверждения теории моделей [7, 11, 17].

Алгебраическая система $\mathcal{M} = \langle M, \mathrm{L} \rangle$ языка L называется *подсистемой* алгебраической системы $\mathcal{N} = \langle N, \mathrm{L} \rangle$ и обозначается $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, если

1) $M \subseteq N$;

2) функции и предикаты в $\mathcal{M}$ являются ограничениями на M соответствующих функций и предикатов в $\mathcal{N}$;

3) множество M замкнуто относительно функций.

Под *классом алгебраических систем* понимается *абстрактный класс*, т. е. такое семейство L-систем, которое вместе с любой алгебраической системой содержит все изоморфные ей L-системы. Класс алгебраических систем, замкнутый относительно подсистем, называется *наследственным классом*. Класс $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений Z языка L, что для любой системы $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \in \boldsymbol{K} \longleftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi \text{ для всех } \varphi \in Z.$$

Множество предложений Z называется *множеством аксиом* для $\boldsymbol{K}$. Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует конечное множество аксиом, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *конечно аксиоматизируемым.*

Предложение φ называется *универсальным предложением* или $\forall$-*предложением*, если $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n\ \psi$, где ψ — бескванторная формула, не содержащая других переменных, кроме $x_1, \ldots, x_n$. Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует множество аксиом, состоящее только из $\forall$-предложений, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *универсально аксиоматизируемым* или $\forall$-*аксиоматизируемым.*

Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует *рекурсивное множество аксиом* Z, т. е. существует алгоритм, который по любому предложению языка L позволяет узнать, принадлежит оно множеству Z или нет, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *рекурсивно аксиоматизируемым.*

Пусть $S(\mathrm{L})$ — множество всех предложений языка L, $\boldsymbol{K}$ — некоторый класс L-систем. *Элементарной теорией* или просто *теорией класса* $\boldsymbol{K}$ называется множество $Th(\boldsymbol{K})$ всех предложений из $S(\mathrm{L})$, истинных во всех системах из $\boldsymbol{K}$. Если существует алгоритм, который позволяет ответить на вопрос, принадлежит или нет произвольное предложение из $S(\mathrm{L})$ теории $Th(\boldsymbol{K})$, то эта теория называется *разрешимой.* Множество всех $\exists$-предложений теории $Th(\boldsymbol{K})$ называется *экзистенциальной теорией* или $\exists$-*теорией класса* $\boldsymbol{K}$. Множество всех $\forall$-предложений теории $Th(\boldsymbol{K})$ называется *универсальной теорией* или $\forall$-*теорией класса* $\boldsymbol{K}$.

В параграфе 2.2 рассматриваются вопросы аксиоматизируемости наследственных классов графов.

Очевидно, что класс всех обыкновенных графов является конечно $\forall$-аксиоматизируемым.

Граф $H = \langle V_H, \mathrm{L}\rangle$ называется *подграфом* графа $G = \langle V_G, \mathrm{L}\rangle$, если $V_H \subseteq V_G$ и любая пара смежных вершин графа H смежна в графе G. Подграф H называется *порожденным подграфом* графа G, если любые две вершины $u, v \in V_H$ смежны в графе H тогда и только тогда, когда они смежны в графе G. Очевидно, что всякий порожденный подграф является подсистемой графа, и наоборот, любая подсистема графа является его порожденным подграфом. Поэтому класс графов, замкнутый относительно порожденных подграфов, является *наследственным классом графов.* Наследственный класс графов называется *монотонным* [10], если он замкнут относительно любых подграфов (не только порожденных).

Пусть $\boldsymbol{H}$ — некоторый класс графов. Обозначим через $Forb(\boldsymbol{H})$ класс, состоящий из всех графов, не содержащих подграфов из $\boldsymbol{H}$. Графы из $\boldsymbol{H}$

называются *запрещенными подграфами* для класса $Forb(\boldsymbol{H})$.

В диссертационной работе доказан следующий критерий универсальной аксиоматизируемости монотонного наследственного класса графов.

Теорема 2.7. *Монотонный наследственный класс графов универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах конечных запрещенных подграфов.*

Следствие 2.1. *Класс конечных графов неаксиоматизируем.*

Примерами $\forall$-аксиоматизируемых монотонных наследственных классов графов являются классы планарных и двудольных графов. Граф называется *планарным*, если любой его конечный подграф можно так уложить на плоскости, что его ребра не будут пересекаться вне вершин. Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 (*доли*) так, что каждое ребро графа соединяет вершины из разных долей.

Утверждение 2.1. *Классы планарных и двудольных графов рекурсивно аксиоматизируемы.*

Доказан следующий критерий конечной аксиоматизируемости монотонного наследственного класса графов

Теорема 2.10. *Монотонный наследственный класс графов конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах конечного множества конечных запрещенных подграфов.*

В параграфе 2.3 исследуются вопросы разрешимости универсальных теорий наследственных классов графов.

Главным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.11. 1) *Универсальная теория графов разрешима.*

2) *Универсальная теория произвольного рекурсивно аксиоматизируемого наследственного класса графов разрешима.*

Следствие 2.3. *Универсальные теории планарных и двудольных графов разрешимы.*

В **главе 3** исследуются вопросы аксиоматизируемости наследственных классов матроидов на языке логики первого порядка.

В параграфе 3.1 приводятся необходимые понятия и утверждения теории матроидов.

Матроид конечного ранга — это пара $M = (U, \mathcal{I})$, где U — непустое множество, $\mathcal{I}$ — непустое семейство его подмножеств (называемых *независимыми*), обладающее свойствами:

(I1) если $A \in \mathcal{I}$, $B \subseteq A$, то $B \in \mathcal{I}$ (наследственность);

(I2) для любых $A, B \in \mathcal{I}$ таких, что $|B| = |A| + 1$, существует элемент $b \in B \setminus A$, для которого $A \cup \{b\} \in \mathcal{I}$ (пополнение);

(I3) существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что для любого $A \in \mathcal{I}$ выполнено $|A| \leq r$ (конечность ранга).

В параграфе 3.2 дается новое определение комбинаторной предгеометрии в терминах поверхностей и доказывается эквивалентность этого определения определению матроида в терминах независимых множеств.

Поверхность ранга k однозначно определяется любым независимым множеством A мощности k следующим образом:

$$F(A) = A \cup \{u \in U \mid A \cup \{u\} \notin \mathcal{I}\}.$$

Семейство поверхностей матроида определяется по следующему правилу:

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq U \mid \exists A \in \mathcal{I} \; (\, F = F(A) \,)\,\}. \tag{1}$$

Определение комбинаторной предгеометрии в терминах поверхностей выглядит так.

Комбинаторная предгеометрия конечного ранга — это пара $(U, \mathcal{F})$, где U — непустое множество *точек*, $\mathcal{F}$ — семейство его подмножеств — *поверхностей*, каждой из которых приписан *ранг* $k \in \mathbb{Z}_+$ — целое неотрицательное число, обладающих следующими свойствами:

(G1) поверхность ранга 0 существует;

(G2) никакая поверхность ранга k не лежит в поверхности ранга $k-1$;

(G3) всякая поверхность ранга k и точка, не лежащая на ней, лежат в единственной поверхности ранга $k+1$;

(G4) любые k точек, не лежащие ни в какой поверхности ранга, меньшего k, лежат в единственной поверхности ранга k;

(G5) существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что ранг любой поверхности не превосходит r.

Множество точек $\{a_1, ..., a_k\}$ комбинаторной предгеометрии $(U, \mathcal{F})$ называется *независимым множеством* точек, если оно не лежит ни в какой поверхности ранга, меньшего k. Тогда семейство $\mathcal{I}$ независимых множеств точек определяется следующим образом:

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq U \mid \forall F \in \mathcal{F} \; (\, (r(F) < |A|) \to (A \nsubseteq F) \,)\,\}. \tag{2}$$

Эквивалентность определения матроида конечного ранга предложенному определению конечномерной комбинаторной предгеометрии вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3.3. 1) *Пусть* $M = (U, \mathcal{I})$ — *матроид, где* U — *непустое множество его элементов,* $\mathcal{I}$ — *семейство его независимых множеств. Тогда семейство* $\mathcal{F}$*, определенное по правилу (1), обладает свойствами (G1)–(G5), причем имеет место равенство (2).*

2) *Пусть* $(U, \mathcal{F})$ — *комбинаторная предгеометрия, где* U — *непустое множество точек, а* $\mathcal{F}$ — *семейство ее поверхностей. Тогда семейство* $\mathcal{I}$*, определенное по правилу (2), обладает свойствами (I1)–(I3), причем имеет место равенство (1).*

Определение матроида как комбинаторной предгеометрии используется в параграфе 3.3 для исследования аксиоматизируемости различных классов матроидов.

В параграфе 3.3 рассматриваются вопросы аксиоматизируемости различных классов матроидов конечного ранга.

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$ — фиксированное число. *Матроид* M *ранга, не большего* r, — это пара $M = (U, \mathcal{F})$, где U — непустое множество *точек*, $\mathcal{F}$ — семейство его подмножеств — *поверхностей*, каждой из которых приписан *ранг* $k \in \mathbb{Z}_+$, причем выполнены свойства (G1)–(G4), а также свойство (G5$'$):

(G5$'$) ранг любой поверхности не превосходит r.

Чтобы определить *матроид фиксированного ранга* $r \in \mathbb{Z}_+$, в приведенное выше определение нужно добавить свойство (G6):

(G6) существует поверхность ранга r.

Теорема 3.5. 1) *Класс матроидов ранга, не большего* r*, является конечно* $\forall$*-аксиоматизируемым.*

2) *Класс матроидов фиксированного ранга* r *конечно аксиоматизируем, но не является* $\forall$*-аксиоматизируемым.*

Для матроидов конечного ранга справедлива следующая теорема.

Теорема 3.6. *Класс матроидов конечного ранга не является аксиоматизируемым.*

Список литературы

[1] Айгнер М. *Комбинаторная теория.* — М.: Мир, 1982. — 558 с.

[2] Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. *Дискретная математика: Графы, матроиды, алгоритмы.* — СПб.: Лань, 2010. — 368 с.

[3] Горбунов В.А. *Алгебраическая теория квазимногообразий.* — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 368+xii с.

[4] Даниярова Э.Ю., Мясников А.Г., Ремесленников В.Н. *Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами.* — Новосибирск: Издательство СО РАН, 2016. — 243 с.

[5] Емеличев В.А., Мельников О.И. Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов.* — М.: Наука, 1990. — 384 с.

[6] Ершов Ю.Л., Лавров И.А., Тайманов А.Д., Тайцлин М.А. *Элементарные теории* // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20, № 4. — С. 37–108.

[7] Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. *Математическая логика.* — М.: Наука, 1987. — 336 с.

[8] Зыков А.А. *Основы теории графов.* — М.: Вузовская книга, 2004. — 664 с.

[9] Лавров И.А. *Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий* // Алгебра и логика. — 1963. — Т. 2, № 1. — С. 5–18.

[10] Малышев Д.С. *Критические классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании* // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2013. — Т. 20, № 6. — С. 59–76.

[11] Мальцев А.И. *Алгебраические системы.* — М.: Наука, 1970. — 392 с.

[12] Харари Ф. *Теория графов.* — М.: Мир, 1973. — 304 с.

[13] Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. *Спектры графов. Теория и применение.* — Киев: Наук. думка, 1984. — 384 с.

[14] Bozapalidis A., Kalampakas A. *An axiomatization of graphs* // Acta inform. — 2004. — Vol. 41. — P. 19–61.

[15] Bruhn H., Diestel R., Kriesell M., Pendavingh R., Wollan P. *Axioms for infinite matroids* // Advances in Mathematics. — 2013. — Vol. 239. — P. 18–46.

[16] Caicedo X. *Finitely axiomatizable quasivarieties of graphs* // Algebra Universalis. — 1995. — Vol. 34, No. 2. — P. 314–321.

[17] Marker D. *Model Theory: An Introduction.* — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2002. — 342 p.

[18] Razborov A.A. *Flag algebras* // J. of Symbolic Logic. — 2007. — Vol. 72, No. 4. — P. 1239–1282.

[19] Taylor W. *Atomic compactness and graph theory* // Fundamenta Mathematicae. — 1969. — Vol. LXV. — P. 139–145.

[20] Yamamoto M., Nishizaki S., Hagiya M., Toda Y. *Formalization of planar graphs* // 8th Int. Workshop on Higer-Order Logic, Theorem Proving and Its Applications. LNCS. — 1995. — Vol. 971. — P. 369–384.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых журналах из списка ВАК

[21] Ильев А.В. *Об аксиоматизируемости наследственных классов графов и матроидов* // Сибирские электронные математические известия. — 2016. — Т. 13. — С. 137–147.

[22] Ильев А.В. *Разрешимость универсальных теорий и аксиоматизируемость наследственных классов графов* // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 1. — С. 100–111.

[23] Ильев А.В., Ильев В.П. *Характеризация матроидов в терминах поверхностей* // Прикладная дискретная математика. — 2016. — № 3(33). — С. 5–15.

Другие публикации

[24] Ильев А.В. *О разрешимости универсальных теорий некоторых классов графов* // Труды II Региональной конф. магистрантов, аспирантов и молодых ученых "ФМ ОмГУ 2014". — Омск, 2014. — С. 24–27.

[25] Ильев А.В. *Аксиоматизируемость классов матроидов предписанного ранга* // Труды Междунар. конф. "Аппроксимация логических моделей, алгоритмов и задач". — Омск, 2015. — С. 33.

[26] Ильев А.В. *Разрешимость универсальных теорий классов матроидов ограниченного ранга* // Электронный сборник трудов Междунар. конф. "Мальцевские чтения". — Новосибирск, 2015. — С. 184.

[27] Ильев А.В., Ильев В.П. *Аксиоматизируемость наследственных классов графов и матроидов* // Труды IX Междунар. конф. "Дискретные модели в теории управляющих систем". — Москва, 2015. — С. 87–89.

[28] Ильев А.В., Ильев В.П. *Определение матроида как геометрической конфигурации* // Материалы XII Междунар. семинара "Дискретная математика и ее приложения" им. академика О.Б. Лупанова. — Москва, 2016. — С. 246–249.

[29] Ильев А.В. *О разрешимости универсальных теорий и аксиоматизируемости двух классов комбинаторных геометрий* // Электронный сборник трудов Междунар. конф. "Мальцевские чтения". — Новосибирск, 2016. — С. 186.

[30] Ильев А.В. *Исследование систем уравнений над обыкновенными графами* // Материалы XVIII Междунар. конф. "Проблемы теоретической кибернетики". — Москва, 2017. — С. 105–108.

Ильев Артем Викторович

Исследование систем уравнений над графами, разрешимости универсальных теорий и аксиоматизируемости наследственных классов графов и матроидов

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук