

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации В.В. Малыгиной «Асимптотические свойства решений линейных дифференциальных и разностных уравнений с последействием» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Актуальность темы исследования. Диссертация В.В. Малыгиной посвящена развитию теории устойчивости линейных уравнений с последействием в части методов установления свойств устойчивости решений, включая асимптотическую и экспоненциальную устойчивость, а также изучения их асимптотических свойств. Несмотря на внушительное число отечественных и зарубежных монографий, посвященных теории функционально-дифференциальных уравнений в различных ее аспектах, включая вопросы устойчивости, количество работ по устойчивости различных классов уравнений с последействием неуклонно возрастает. При этом давно появилась необходимость в принципиальных результатах, открывающих новые возможности эффективного исследования устойчивости уравнений с получением критериев и точных признаков, вскрывающих природу изучаемого свойства и дающих точное описание соответствующих классов уравнений в пространствах параметров, используемых для описания объекта исследования. Таким принципиальным результатом работы В.В. Малыгиной является разработанный ею новый метод исследования асимптотических свойств решений линейных уравнений с последействием, названный автором test-методом. Метод базируется на идее погружения рассматриваемого уравнения в семейство уравнений, содержащее так называемое test-уравнение. Полученные этим методом результаты диссертации убеждают в его эффективности и точности при получении признаков устойчивости решений рассматриваемых классов уравнений и описании их асимптотических свойств. Актуальность темы проведенного автором исследования не вызывает сомнений.

Основные результаты диссертации и их новизна. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка сокращений и обозначений и списка литературы, содержащего 178 наименований. Общий объем работы составляет 279 страниц, текст иллюстрируется тщательно выполненными 28 цветными рисунками.

Первая глава (с. 21-69) посвящена общему случаю линейной системы с распределенным запаздыванием и описанию той роли матрицы Коши, которую она играет в теории устойчи-

ности. В терминах матрицы Коши с единых позиций установлена связь между различными определениями устойчивости, включая устойчивость по начальным данным, асимптотическую и экспоненциальную устойчивость. Выделим здесь теорему 1.7, устанавливающую эквивалентность равномерной асимптотической устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости для систем с ограниченным последствием. Возможность замены разнообразных определений устойчивости соответствующими оценками функции Коши существенно упрощает исследование и делает возможным (теоремы 1.11-1.13) корректное сравнение полученных результатов с результатами других авторов.

Подробное описание предлагаемого автором test-метода и типичных test-уравнений (test-задач) для актуальных классов скалярных функционально-дифференциальных уравнений дается во второй главе диссертации (с. 70-101). Основное обсуждение здесь относится к уравнению с конечным числом распределенных ограниченных запаздываний и выделенным автономным слагаемым:

$$\dot{x}(t) = ax(t) - \sum_{k=1}^n (T_k x)(t) + f(t), \quad t \in R_+, \quad (1)$$

где

$$(T_k x)(t) = \int_{t-\omega_k}^t x(s) d_s r_k(t, s), \quad \int_{t-\omega_k}^t d_s r_k(t, s) = \rho_k = const.$$

Основу метода составляют специальные процедуры погружения исследуемого уравнения в семейство уравнений, параметризованных с помощью набора числовых параметров $\pi = \{a, \rho_1, \dots, \rho_n, \omega_1, \dots, \omega_n\}$, в терминах которых проводится эффективное исследование устойчивости решений test-задач. Такое исследование нетривиально и использует достаточно тонкие рассуждения, связанные с поведением решений автономных уравнений с постоянными характеристиками. Основные результаты этой главы сформулированы в виде теорем о необходимых и достаточных условиях равномерной устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости семейства (1) (итоговые теоремы 2.9 - 2.12, с. 98-99).

В третьей главе (с. 102-163) с помощью разработанного во второй главе test-метода автором получены эффективно проверяемые условия устойчивости некоторых классов уравнений с числом параметров, не более четырех (два коэффициента, два запаздывания). Во всех рассматриваемых случаях продемонстрирована конструктивность метода и точность получаемых условий, при этом сравнение с ранее известными результатами выделено в отдельный пункт 3.5.3 и проводится очень подробно и убедительно. Для сравнения выбраны

более десяти очень известных работ (Т. Yoneyama; F. Atkinson, J. Haddock; J. So, J. Yu, M. Chen и др.), признаки, полученные в них, уступают по точности условиям автора, а в одной из них при сравнении обнаружена ошибка. В случае двухпараметрического описания семейства уравнений (параграфы 3.3, 3.4) получено точное описание областей устойчивости. Выделим параграф 3.5, где автором предлагаются приемы и процедуры, расширяющие сферу применения test-метода до неавтономных уравнений достаточно общего вида.

В четвертой главе (с. 164-212) основная идея test-метода используется для его распространения на линейные разностные уравнения с последствием

$$x(n+1) - x(n) = a_0 x(n) - \sum_{k=1}^N a_k(n) x(n - h_k(n)) + f(n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Здесь предлагаются и обосновываются аналоги основных утверждений второй главы, что оказывается далеко не тривиальным делом. В частности, рассмотрение соответствующих test-задач и отдельных классов их решений приводит к необходимости восполнения некоторых пробелов теории разностных уравнений, связанных с условиями положительности функции Коши для автономного случая уравнения (2). Связь с известными результатами и специфика утверждений диссертации подробно описаны на с. 186-187. Устойчивость полуавтономных уравнений (2) ($a_k(n) = a_k$) исследуется test-методом в параграфе 4.3. Основные результаты этой главы сформулированы в виде теорем 4.16, 4.17, 4.19, 4.20. Эти утверждения основаны на детальном и всестороннем исследовании решения $y(n)$ разностной параметризованной test-задачи (задача (4.22)):

$$y(n+1) - y(n) = a_0 y(n) - \sum_{k=1}^N a_k x(n - h_k), \quad n = 1, 2, \dots; \quad y(\nu) = 1, \quad \nu \leq 0 \quad (3)$$

и используют ее основные характеристики: число ℓ , точку M и поверхность F . В терминах этих характеристик получены критерии равномерной устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости семейства (2). При этом представлена полная картина, охватывающая как монотонные, так и осциллирующие решения test-задачи. Упомянутые теоремы открывают принципиальную возможность получения эффективных признаков устойчивости решений разностных уравнений.

Такая возможность реализована в заключительной пятой главе диссертации (с. 213-258). Здесь количество изменяемых параметров (по числу коэффициентов уравнения и по числу запаздываний) позволяет дать точное и исчерпывающее описание областей устойчивости

в пространстве рассматриваемых параметров (теоремы 5.7 – 5.14). Что касается конкретных признаков (которым посвящена обширная литература), то автор на примере теорем 5.3, 5.4 проводит корректное сравнение с результатами известных работ (L. Berezansky, E. Braverman; I. Kovacsolgui; J. Yu) и показывает, что они уступают результатам автора. Отметим еще, что в случае двух постоянных коэффициентов и одного переменного запаздывания (параграф 5.3) признаки устойчивости, сравнимые с полученными в диссертации, в литературе не обнаружены. Отдельный интерес представляет в этой главе описание областей абсолютной устойчивости. Этот термин, введенный автором для рассматриваемых уравнений в качестве рабочего, не противоречит общепринятому по отношению к асимптотической устойчивости нелинейных систем термину, подразумевающему устойчивость при любом характере нелинейности в пределах фиксированного класса нелинейностей. Здесь фиксируется один из параметров, а второй может принимать любые допустимые значения.

Все описанные выше результаты являются новыми.

Замечания.

1. В списке обозначений отсутствуют символы R_s и (R_s) , играющие важную роль при описании «s-урезанных» уравнений.

2. Не вполне удачным представляется выбор автором символа π для обозначения совокупности фиксируемых параметров (с. 73), приводящий в дальнейшем к термину π -устойчивость, так как в тексте работы встречается и обычное использование символа π (например, с. 123, формула (3.20), с. 174). Возможной двусмысленности можно было бы избежать, используя, например, полужирный шрифт при специальном использовании этого символа.

3. В тексте имеются отдельные опiski и опечатки. Ограничимся списком соответствующих страниц: 9, 21, 26, 40, 51, 64, 69, 112, 265, 276, 278.

Приведенные замечания носят технический и редакционный характер и не оказывают существенного влияния на общую высокую оценку работы.

Общая оценка работы. Тема диссертации актуальна и соответствует специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Результаты работы являются новыми, получены автором самостоятельно и представляют большой научный интерес. Автором разработан новый метод исследования асимпто-

тических свойств решений линейных дифференциальных и разностных уравнений с последствием.

Все утверждения строго сформулированы и снабжены подробными доказательствами, обоснованность выносимых на защиту результатов не вызывает сомнений.

Материал диссертации изложен в строгой логической последовательности, авторские комментарии, обсуждение полученных результатов и сравнение их с многочисленными ранее полученными результатами других авторов подчеркивают достоинства разработанного подхода, все иллюстрирующие примеры удачно дополняют и детализируют общую картину. Текст диссертации тщательно отредактирован, диссертация прекрасно оформлена.

Основные результаты диссертации с достаточной полнотой опубликованы в 34 статьях в рецензируемых журналах, включенных в Перечень ВАК, из них 21 работа – в журналах, входящих в международные базы цитирования WoS и Scopus и хорошо известных специалистам. Кроме того, результаты В.В. Малыгиной докладывались и обсуждались на известных профильных семинарах и на представительных российских международных и научных конференциях.

Автореферат диссертации соответствует своему назначению, полно и правильно отражает ее содержание.

В диссертацию включены и выносятся на защиту только результаты, полученные автором лично. Приводимые в диссертации результаты работ других авторов все без исключения сопровождаются корректными ссылками с полным библиографическим описанием источников.

Теоретические положения и выводы диссертации представляют значительный интерес и могут быть рекомендованы к использованию в научных исследованиях, проводимых в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Уральском федеральном университете. Полученные В.В. Малыгиной результаты, несомненно, заслуживают включения в специальные курсы по Теории устойчивости, читаемые на математических факультетах университетов.

Имея в виду широкую распространенность математических моделей в виде различных классов уравнений с последствием, можно рекомендовать результаты диссертации для применения при исследовании моделей реальных процессов и явлений. Полученные описания областей устойчивости расширяют возможности выбора моделей при конструировании

соответствующих механизмов и устройств.

Заключение. Диссертация В.В. Малыгиной «Асимптотические свойства решений линейных дифференциальных и разностных уравнений с последействием» представляет собой самостоятельно выполненную научно-квалификационную работу, которая удовлетворяет критериям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук (пп. 9 – 14 Положения ВАК). Совокупность полученных в ней результатов можно квалифицировать как научное достижение, имеющее принципиальное значение для развития теории устойчивости линейных уравнений с последействием. Считаю, что Вера Владимировна Малыгина заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор,

профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике

ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Максимов Владимир Петрович

1

-

10.02.2022

Контактные данные:

тел.: +7(342) 239-68-48, e-mail: maksimov@econ.psu.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Адрес места работы:

614068, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15,

ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Тел: +7(342) 239-64-35, e-mail: info@psu.ru

Подпись профессора ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет» В.П. Максимова удостоверяю:

Ученый секретарь

ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ФЕДЕРАЛЬНОГО АГЕНТСТВА
ПО ОБРАЗОВАНИЮ
И НАУКЕ
ОБРАЗОВАНИЕ
И НАУКА
ОБРАЗОВАНИЕ
И НАУКА

Е.П. Андронов

