

О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию Байбулатовой Гузель Дамировны на тему «Полулинейные вырожденные эволюционные уравнения с дробными производными. Задачи оптимального управления», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация Г.Д. Байбулатовой посвящена исследованию активно развивающейся области современной математики — разрешимости дифференциальных уравнений с дробными производными. Отметим актуальность данной тематики как с математической точки зрения, так и с точки зрения новых возможностей информационных технологий, сложных физических процессов, в частности, процессов с памятью, процессов во фрактальных средах и многих других. Применению дробного исчисления для различных приложений посвящено множество работ, теоретические исследования дробного интегро-дифференциального исчисления можно найти в работах М.М. Джрбашяна, К.В. Oldham, J. Spanier, С.Г. Самко, А.А. Килбаса, О.И. Маришева, А.А. Kilbas, Н.М. Srivastava, J.J. Trujillo, I. Podlubny, А.М. Нахушева, А.В. Псху, А.В. Глушака, F. Mainardi, K. Nishimoto, K. Diethelm и многих других.

Диссертационная работа Г.Д. Байбулатовой посвящена исследованию однозначной разрешимости в классическом и сильном смыслах начальных задач для линейных и полулинейных уравнений в банаховых пространствах с несколькими дробными производными. Следующими объектами исследования выбраны уравнения, не разрешенные относительно старшей производной Герасимова–Капуто по времени с младшими дробными производными в нелинейной части, а также разрешимости задач оптимального управления системами, состояние которых описывается уравнениями в банаховых пространствах. Уравнения с вырожденными линейными операторами при старшей производ-

ной в работе называются вырожденными. Вырожденные уравнения целых порядков рассматривались многими авторами. В последнее годы уравнения такого класса активно исследуются в работах И.А. Шишмарева, Н.А. Сидорова, Б.В. Логинова, М.В. Фалалеева, А.И. Кожанова, Г.В. Демиденко, А.Г. Свешникова, М.О. Корпусова, В.Е. Федорова, М.В. Плехановой и их учеников. Несмотря на немалое количество работ, можно утверждать, что однозначная разрешимость начальных задач для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка описанного выше класса изучена мало. В еще большей степени это касается задач оптимального управления для указанного класса уравнений.

Диссертационная работа объёмом 137 страниц состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, списка обозначений и соглашений, заключения и списка литературы. Введение содержит историю исследования, обоснована актуальность тем исследования, описаны научная новизна, теоретическая и практическая значимость, цели и задачи, методология и методы исследования. Сформулированы научные положения, выносимые на защиту. Приведен список семинаров, конференций, на которых докладывались и обсуждались представленные в диссертации результаты.

Первая глава начинается с введения и рассмотрения специальных функциональных пространств со значениями в банаховых пространствах (§1.1), определений и свойств дробных интегралов и производных (§1.2). §1.3 посвящен исследованию однозначной разрешимости в классическом смысле начальных задач Коши для нелинейных уравнений с многими дробными производными, разрешенных относительно старшей дробной производной в банаховых пространствах:

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \dots, D_t^{\alpha_n} z(t)), \quad (1)$$

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

где $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $D_t^\alpha, D_t^{\alpha_1}, \dots, D_t^{\alpha_n}$ — дробные производные Гerasимова-Капуто, Z — ба-

нахово пространство, $A \in \mathcal{L}(Z)$, оператор $B : Z \rightarrow Z$ — нелинейный, множество Z открыто в $\mathbb{R} \times Z^n$.

В §1.4, как пример применения полученных условий разрешимости в банаховых пространствах, рассмотрена начально-краевая задача для модифицированного уравнения распространения поверхностных волн с учетом вязкости дробного порядка по времени Осколкова-Бенджамина-Бона-Махони-Бюргерса. Дальнейшее рассмотрение вырожденных уравнений в некоторых случаях потребовало доказательства дополнительной гладкости решения невырожденного уравнения, которое получено в §1.5. Отметим, что §1.6 вспомогательный, где приведены полученные ранее результаты Г.А. Свиридюка и В.Е. Федорова.

Разрешимость начальных задач для нелинейного уравнения с относительно спектрально ограниченной парой операторов в линейной части разбита на три случая. Рассмотрены различные типы зависимости нелинейного оператора от дробных производных. В §1.7 содержится доказательство существования единственного локального решения задачи Шоултера-Сидорова для уравнений с условием принадлежности образа нелинейного оператора невырожденному подпространству, и соответственно, в случаях независимости (§1.9) и зависимости (§1.11) нелинейного оператора только от элементов подпространства вырождения с примером (§1.13). При этом существенно используются методы теории вырожденных уравнений, а также существование пар инвариантных подпространств при условии относительной спектральной ограниченности пары линейных операторов уравнения. Доказательства теорем опираются на классические теоремы о сжимающем отображении и о неявной функции. Путём сведения к начальной задаче для дробного дифференциального уравнения в банаховом пространстве с последующим использованием результатов главы исследован ряд уравнений дробного порядка по времени, встречающихся в математической физике (§§1.8, 1.12), а также некоторые системы уравнений дробного порядка по времени из теории вязкоупругости (§1.10).

Вторая глава диссертации посвящена исследованию однозначной разрешимости в сильном смысле, доказаны аналогичные первой главе утверждения для сильных решений. Несмотря на очевидную параллель с предыдущей главой, диссертантом преодолен ряд сложностей, связанных, главным образом, с нелокальностью сильных решений. Опираясь на полученные М.В. Плехановой результаты для линейного уравнения, описанные в §2.1, доказываем существование сильного решения сначала для уравнения, разрешенного относительно старшей дробной производной (§2.2), а затем для двух классов вырожденных нелинейных уравнений (§§2.5, 2.8). В §2.6 доказываем теорему разрешимости для одного линейного уравнения. Приведенные примеры в параграфах §2.3 и §2.7 начально-краевых задач для дробных по времени уравнений в частных производных иллюстрируют применение доказанных общих теорем. В §2.4 получены результаты о дополнительной гладкости решения. К примеру, в §2.9 рассматривается система Соболева, в случае целого порядка по времени описывающая динамику малых внутренних движений вращающейся стратифицированной жидкости в равновесном состоянии. В §2.10 исследуются начально-краевые задачи для уравнений с многочленами от самосопряженного эллиптического оператора. Отметим результаты §2.11 о разрешимости начально-краевых задач в параллелепипеде для уравнений с многочленами нескольких переменных от операторов частных производных первого порядка с периодическими граничными условиями на противоположных сторонах параллелепипеда.

В третьей главе устанавливаются условия разрешимости различных задач оптимального управления для систем управления, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка в банаховых пространствах, вырожденных (§§3.4, 3.5), либо разрешенных относительно старшей дробной производной по времени (§§3.2, 3.3). Исследуются задачи с распределённым, стартовым управлением (§§3.7–3.9) и задачи без учёта затрат на управление (§3.7). Исследования опираются на результаты А.В. Фурсикова об абстрактных задачах управле-

ния. Параграф §3.1 является вспомогательной, где введены специальные пространства банаховозначных функций, обобщающие пространства Соболева, для которых сформулированы известные результаты о компактных вложениях, а также пространства функций, старшие дробные производные которых лежат в пространстве Лебега-Бохнера. В §3.6 приведен пример задачи управления для одной системы уравнений дробной динамики вязкоупругой жидкости, в которой нелинейный оператор не является равномерно липшицевым, но работает предложенный в §3.5 подход. В последнем параграфе §3.10 абстрактные результаты из §3.9 проиллюстрированы на примере задачи стартового управления для одной системы, состояние которой описывается начально-краевой задачей для уравнения в частных производных, не разрешимого относительно старшей дробной производной по времени.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 15 работах, в том числе 8 статей опубликованы в журналах, входящих в Перечень ВАК, БД Web of Science, Scopus.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- 1) Найдены условия однозначной разрешимости в смысле классических и сильных решений задачи Коши для нелинейных уравнений в банаховых пространствах с несколькими дробными производными Герасимова-Капуто, разрешенных относительно старшей производной.

- 2) Доказаны теоремы о существовании и единственности классического и сильного решений обобщённой задачи Шоултера-Сидорова для полулинейных, а также линейных нестационарных уравнений в банаховых пространствах с вырожденным оператором при старшей производной дробного порядка.

- 3) Доказана разрешимость задач оптимального управления системами, состояние которых описывается уравнениями в банаховых пространствах указанных классов, с различными функционалами стоимости. Рассмотрены задачи с распределённым, стартовым управлением, задачи без учета затрат на управление.

По содержанию работы имеются замечания.

1. Отметим некоторые опечатки в работе.

На странице 24, 11 строка сверху упущена буква z .

На странице 70, 11 строка сверху написано «краевые условия», а указаны начальные. Скорее всего, имеются ввиду краевые условия (2.3.2) со страницы 63.

На странице 106, на 4 и 12 строках снизу вместо функции z должны быть написаны ψ .

2. Следовало бы в автореферате диссертации нумерацию лемм, теорем, следствий сохранить такими же как в диссертационной работе.

3. В работе рассматривается три вида условий на нелинейный оператор в первой главе и два вида — во второй и третьей главах. Однако, задача стартового управления в третьей главе исследована только для одного случая нелинейного оператора. Стоило в тексте диссертации объяснить такой выбор классов уравнений в различных главах.

4. В диссертации не хватает обсуждения границ применимости полученных результатов, контрпримеров к ним при нарушении условий теорем существования и единственности решения.

Приведённые замечания не влияют на общую положительную оценку работы. Работа оформлена аккуратно. Замечания 1,2 является редакционным, а остальные замечания не влияют на общую положительную оценку работы. Полученные в диссертационной работе результаты безусловно являются новыми, их формулировки — точными. Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, подтверждаются строгостью доказательств, большим числом приложений для уравнений в частных производных. Результаты апробированы на различных международных и российских научных конференциях и семинарах. В целом диссертация написана на высоком математическом уровне, представляет собой цельную научную работу на актуальную тему. Автореферат диссертации Г.Д. Байбулатовой соответствует содержанию диссертации.

Считаю, что диссертационная работа «Полулинейные вырожден-

29 октября 2021 г.

Попов Сергей Вячеславович

Домашний адрес: Попов С.В., ул. Автодорожная КИЗ ЯГУ, дом 44, кв.1, г. Якутск, 677021, Республика Саха (Якутия), Россия. Электронная почта: e-mail: guspopov@mail.ru

