Отзыв научного руководителя
на диссертацию Ыскака Тимура
"Устойчивость решений дифференциальных уравнений
с распределенным запаздыванием",
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук по специальности 01.01.02 —
Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Диссертационная работа Т. Ыскака посвящена изучению экспоненциальной устойчивости решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием.

Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом начала развиваться в середине прошлого столетия. Основы теории были заложены в работах А.А. Андронова, Р. Беллмана, А.М. Зверкина, Г.А. Каменского, Н.Н. Красовского, Н.Н. Меймана, А.Д. Мышкиса, Л.С. Понтрягина, Б.С. Разумихина, Я.З. Цыпкина, Н.Г. Чеботарева, Л.Э. Эльсгольца и др. Большой интерес математиков к уравнениям с запаздывающим аргументом в те годы был связан с необходимостью решения прикладных задач, в которых важную роль играл эффект запаздывания. В последующие годы уравнения такого типа возникали во многих задачах теории автоматического регулирования и управления, автоматики и телемеханики, радиофизики, при моделировании процессов иммунологии, при изучении генных сетей, экономики и т. д. Поэтому в настоящее время имеется огромное число работ, посвященных исследованиям различных задач для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в частности, задач об устойчивости решений. Однако несмотря на бурное развитие теории устойчивости, существует масса нерешенных вопросов. Особенно это касается уравнений с распределенным запаздыванием.

Отметим, что впервые дифференциальные уравнения с распределенным запаздыванием появились в двадцатые годы в работах В. Вольтерра при моделировании динамики популяций. Однако работ по проблеме устойчивости для таких уравнений пока не так много. В основном они касаются изучения конкретных уравнений (В.В. Малыгина, Т.Л. Сабатулина, S. Wu, S. Gan, M. Funacubo, T. Hara, S. Sakata, J.C.F. de Oliveira, L.A.V. Carvalho и др.).

Перед диссертантом была поставлена задача провести исследования устойчивости решений для некоторых классов систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием. В частности, установить условия асимптотической устойчивости, получить оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, а также дать описание областей притяжений нулевого решения для нелинейных уравнений. Эта тема является актуальной и представляет интерес как с теоретической точки зрения, так и с прикладной.

С поставленной задачей Т. Ыскак успешно справился, полученные им результаты составили основу настоящей диссертации, состоящей из четырех глав. Изложим вкратце их содержание.

В первой главе рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с постоянными или периодическими матричными коэффициентами следующего вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \tag{1}$$

где A, B — матрицы размера $n \times n$ с постоянными или с T-периодическими элементами (матрица B — по первому аргументу), $\tau > 0$ — параметр запаздывания. В обоих случаях Автором установлены достаточные условия на матричные коэффициенты, при которых имеет место экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (1). При этом установлены оценки, характеризующие экспоненциальное убывание решений при $t \to \infty$. Эти оценки являются аналогами известных оценок М.Г. Крейна для решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Во второй главе рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием с постоянными или периодическими матричными коэффициентами следующего вида

$$\frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds, \quad t > 0, \tag{2}$$

где D, A, B — матрицы размера $n \times n$ с постоянными или с T-периодическими элементами (матрица B — по первому аргументу), $\tau > 0$ — параметр запаздывания. Как и для системы (1), Автором установлены достаточные условия на матричные коэффициенты, при которых имеет место экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (2), а также получены оценки, характеризующие экспоненциальное убывание решений при $t \to \infty$.

Отметим, что в первой и во второй главах доказаны теоремы о робастной устойчивости для систем (1) и (2) соответственно.

В третьей главе рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с постоянными или периодическими матричными коэффициентами следующего вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds + F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t > 0, \tag{3}$$

где A, B — матрицы размера $n \times n$ с постоянными или с T-периодическими элементами (матрица B — по первому аргументу), $F(t, u, v)$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по u и оценке

$$\|F(t, u, v)\| \leq q_1\|u\|^{1+\omega_1} + q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_i \geq 0, \ \omega_i > 0, \ i = 1, 2, \tag{4}$$

$\tau > 0$ — параметр запаздывания. Предполагается, что матрицы A, B удовлетворяют условиям, указанным в главе 1, при которых решения систем линейных уравнений вида (1) экспоненциально устойчивы. При этих условиях установлены оценки решений, из которых вытекает разрешимость начальных задач для систем вида (3) на всей полуоси $\{t > 0\}$. Из этих оценок следует также экспоненциальная устойчивость нулевого решения, при этом указываются оценки областей притяжения.

В четвертой главе рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием с постоянными или периодическими матричными коэффициентами следующего вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) &= A(t)y(t) \\ &+ \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds + F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t > 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где D, A, B — матрицы размера $n \times n$ с постоянными или с T-периодическими элементами (матрица B — по первому аргументу), $F(t, u, v)$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по

u и оценке (4), $\tau > 0$ — параметр запаздывания. Предполагается, что матрицы D, A, B удовлетворяют условиям, указанным в главе 2, при которых решения систем линейных уравнений вида (2) экспоненциально устойчивы. При этих условиях установлены теоремы об экспоненциальной устойчивости нулевого решения систем вида (5), являющиеся аналогами соответствующих теорем из главы 3.

Следует отметить, что величины, характеризующие области притяжения и оценки решений (показатели в экспонентах, предэкспоненциальные множители) для систем (3), (5) указаны конструктивно.

Диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне. Автором получен ряд новых результатов, имеющих важное значение в теории дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием. Результаты диссертации обоснованы полными доказательствами, своевременно опубликованы, неоднократно докладывались на научных конференциях и семинарах. По теме диссертации имеется 13 публикаций, из которых 5 статей в журналах из списка ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

На мой взгляд, представленная диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, и ее автор Ыскак Тимур несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Научный руководитель
Заместитель директора по научной работе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН), доктор физико-математических наук (специальность 01.01.01), профессор

Демиденко Геннадий Владимирович

5 апреля 2021 г.

Адрес: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, д. 4
Тел.: +7(383)3297578, email: demidenk@math.nsc.ru

Подпись Демиденко Г. В.
удостоверяю
Зав. орготделом Н.З. Кондалева
ИМ СО РАН
„05" 04 2021 г.