Отзыв официального оппонента о диссертационной работе
Ыскака Тимура «Устойчивость решений дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертационная работа Т. Ыскака посвящена исследованию устойчивости и асимптотическим оценкам решений автономных и периодических дифференциальных уравнений с запаздыванием, в общем виде следующих:

$$\frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) =$$
$$= A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)\,ds + F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)\,ds\right), \quad t > 0. \quad (1)$$

Теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом является сегодня активно развивающимся разделом общей теории динамических систем, что определяется ее растущей востребованностью в приложениях при богатых внутренних ресурсах развития. Основные задачи теории поставлены в середине XX в., а основные принципы и методы изложены в классических монографиях А. Д. Мышкиса, Н. Н. Красовского, Р. Беллмана и К. Кука, Л. Э. Эльсгольца, Дж. Хейла, Н. В. Азбелева, В. П. Максимова и Л. Ф. Рахматуллиной. В настоящее время области применимости методов теории быстро расширяются, что определяет необходимость развития формального аппарата.

Для динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием, как и для других видов динамических систем, одним из основных направлений исследования является изучение вопросов об устойчивости решений. Развитие теории уравнений с запаздыванием и, особенно, применение таких уравнений в решении прикладных задач показало, что эти вопросы не сводятся только к изучению условий устойчивости: эффективное описание асимптотического поведения решений требует асимптотических оценок решений, и ценность таких оценок тем выше, чем они более явные и конструктивные. Диссертация Т. Ыскака посвящена вопросам устойчивости именно в таком их понимании в применении к уравнениям вида (1).

Актуальность темы исследования определяется несколькими факторами.

1. Как известно, и как отмечено автором диссертации, спектральный критерий устойчивости автономной линейной системы даже в простейшем случае системы $\dot{x} = Ax$ сводит задачу устойчивости к, вообще говоря, плохо обусловленной задаче определения расположения корней характеристического уравнения. Для систем с запаздыванием проблема усугубляется тем, что множество корней характеристического уравнения бесконечно. Эффективные критерии устойчивости известны только для некоторых узких классов автономных уравнений с запаздыванием.

2. Уравнение (1) является уравнением с распределённым запаздыванием. Такие уравнения не так широко известны, как уравнения с сосредоточенным запаздыванием, хотя в последние годы становится очевидным, что для многих приклад-

ных задач (например, в математической биологии) именно уравнения с распределенным запаздыванием должны быть более востребованными. Это контрастирует с тем, что разрыв как в объеме проведенных исследований уравнений с сосредоточенным и с распределенным запаздыванием, так и в качестве результатов этих исследований продолжает оставаться значительным. В частности, за последние двадцать лет были получены аналоги известной оценки М. Г. Крейна решений уравнения $\dot{x} = Ax$ для уравнений с сосредоточенным запаздыванием, а для уравнений с распределенным запаздыванием такие оценки до работ диссертанта, по-видимому, были неизвестны.

3. Возможности использованного в диссертации метода исследования, а именно метода функционалов Ляпунова — Красовского, эффективность которого многократно продемонстрирована исследователями асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений с последействием, по-видимому, далеко не исчерпаны. Исследование возможностей этого метода применительно к изучаемым в диссертации классам уравнений — безусловно, необходимый шаг в развитии теории устойчивости.

Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Структура диссетации проста, что определяется характером результатов: во всех главах применяется единая методология исследования различных подклассов уравнений вида (1). Предметом исследования являются оценки решений, в частности, их экспоненциальная устойчивость.

В довольно обширном введении приводятся необходимые для понимания работы сведения из литературы, определена цель работы и подробно рассмотрено содержание диссертации, благодаря чему в ее тексте достаточно легко ориентироваться.

Первая глава посвящена линейным системам дифференциальных уравнений запаздывающего типа

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)\,ds, \quad t > 0, \tag{2}$$

в случаях: а) матрица A постоянна, матрица-функция B зависит только от второй переменной; б) матрица-функция A периодическая, и тот же период имеет матрица-функция B по первой переменной. Результатами главы являются:

- достаточное условие существования экспоненциальной оценки нулевого решения автономного (случай а) уравнения (2) с явно указанными коэффициентом и показателем, выраженное через положительную определенность матрицы того же порядка, что A и B, а также следствия этого условия;
- аналогичные результаты для периодического уравнения (случай б);
- теоремы о допустимости в случаях а) и б) возмущений матриц A и B экспоненциально устойчивой системы с явным указанием допустимых возмущений.

Во второй главе диссертации объект исследования существенно усложняется: теперь это уравнение нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)\,ds, \quad t > 0. \tag{3}$$

Структура второй главы повторяет структуру первой главы, но как ее результаты, так и техника их получения существенно тоньше. Отметим, что вопросы об оценке решений уравнения (3) в терминах используемого функционала Ляпунова—Красовского и о явной экспоненциальной оценке решений здесь разделены: сначала получена оценка первого вида, затем из нее выведены оценки второго вида.

В третьей и четвертой главах рассматриваются нелинейные уравнения, полученные добавлением к правой части уравнений (2) и (3) нелинейного члена вида $F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)\,ds\right)$, где вектор-функция $F(u_1, u_2)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по обеим переменным и оценке $\|F(u_1, u_2)\| \leqslant q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2}$, $\omega_1, \omega_2 > 0$. На основе результатов первой и второй глав исследуются условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, при этом для уравнений как запаздывающего, так и нейтрального типа получены явные экспоненциальные оценки нулевого решения для случая начальных данных из заданного множества $\mathbf{E}$, являющегося множеством притяжения нулевого решения, при этом множество $\mathbf{E}$ описано явно через значения параметров, обеспечивающих оценку решения.

Каждый параграф диссертации завершается примером применения полученных в параграфе результатов к конкретным уравнениям (в диссертации 10 параграфов: по три в главах 1 и 2 и по два в главах 3 и 4). Эти примеры играют важную роль в содержании работы: именно они в первую очередь позволяют оценить силу полученных условий устойчивости решений исследуемых уравнений и их оценок.

По рецензируемой работе имеется несколько замечаний.

1. Автор диссертации не уделяет специального внимания постановке общей задачи об исследовании дифференциальных уравнений с последействием, в частности, вопросу об определении решения такого уравнения. Этот вопрос не относится напрямую к теме работы, однако следует заметить, что от обращения к нему работа могла бы только выиграть. По-видимому, можно расширить класс функций, на которых определяются решения исследуемых уравнений, до класса локально абсолютно непрерывных на полуоси функций, и тогда начальную функцию достаточно считать суммируемой, а условие $y(+0) = \varphi(0)$ «непрерывной стыковки» решения с начальной функцией становится ненужным. Отметим, что такое обобщение принципиально как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

2. В диссертации несколько неаккуратно решен вопрос об определении понятий устойчивости. Проще всего этот вопрос можно было решить тем, что дать определение экспоненциальной устойчивости для уравнения общего вида (1), а о других видах устойчивости не упоминать, поскольку в работе они не исследуются. Нужное определение в диссертации фактически вводится на с. 37, но формально оно отнесено только к уравнению (2). Для этого уравнения также даются определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости и отмечено, что для линейной автономной системы в определении асимптотической устойчивости можно не вводить Δ-окрестность нулевой начальной функции, а говорить о всех решениях. В данном месте естественно было бы не останавливаться на полдороге и сказать, что для асимптотической устойчивости линейной системы условие устойчивости по Ляпунову также не требуется. Для уравнений, исследуемых в главах 2—4, определения устойчивости в явном виде не даются, и это вызывает сразу ряд вопросов, поскольку соотношения разных видов устойчивости у автономных и неавтономных уравнений, у уравнений

запаздывающего и нейтрального типа, у линейных и нелинейных уравнений существенно различаются. Возникают вопросы и о зависимости устойчивости от сдвига начальной точки.

3. Уравнения нейтрального типа в диссертации записываются в виде, который предлагается в известной монографии Дж. Хейла: все производные функции y находятся под общим знаком дифференцирования. Следует заметить, что исследователи функционально-дифференциальных уравнений, использующие такую запись, как правило, считают решением уравнения нейтрального типа удовлетворяющую уравнению функцию, не обязательно являющуюся непрерывной. В диссертации полагается, что решения не могут иметь разрывов, поэтому лучше представлять левую часть уравнения (1), например, в виде $\dot{y}(t) + D(t)\dot{y}(t-\tau)$.

4. В примере 1.1.1 рассматривается простейшее из уравнений рассматриваемых классов — уравнение вида

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + b\int\limits_{t-1}^{t} y(s)\,ds. \tag{4}$$

Сам по себе пример достаточно нагляден, но следует заметить, что устойчивость уравнения (4) изучалась во многих работах, и сравнить полученный в примере результат с известными было бы весьма уместным. Полученную в примере область устойчивости можно заметно расширить, а в пользу результата диссертации остается экспоненциальная оценка с явным указанием коэффициента и показателя.

5. Аналогичное замечание можно сделать к примерам в целом: они были бы более информативны, если бы сопровождались сравнениями с известными областями устойчивости, особенно полученными другими методами. Отдельно упомянем пример 2.1.1, где рассмотрена система второго порядка, устойчивость которой может быть исследована покомпонентно, поскольку компонента y_2 не зависит от y_1. Полученные в диссертации конструктивные оценки решений, а также (в главах 3 и 4) области притяжения нулевого решения обеспечивают то, что такие сравнения не обесценят примеры.

6. В теореме 1.3.2 наложено условие периодичности возмущений $A_1(t)$ и $B_1(t)$. Это непринципиально для справедливости полученного результата, и на с. 59 автор указывает это. Естественней было бы не вводить лишнее условие в теореме, иначе она производит ненужное впечатление «хрупкости» результата (здесь уместно напомнить о тонкой связи между типом уравнения и соотношениями между разными видами асимптотического поведения его решений). Аналогичное замечание относится к теореме 2.3.3.

7. Диссертация содержит опечатки и неудачные формулировки. Впрочем, их число невелико, а контекст во всех случаях позволяет без труда понять смысл.

Изложенные замечания носят дискуссионный, рекомендательный и редакционный характер и не влияют на общую научную ценность работы.

На основании вышесказанного считаю нужным сделать следующие выводы.

Тема диссертационной работы Т. Ыскака является актуальной.

Все результаты диссертации являются новыми, их достоверность обосновывается строгостью доказательств, а значимость подтверждается апробацией на нескольких международных научных конференциях и семинарах под руководством ведущих специалистов в области теории дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений.

Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих рецензируемых изданиях, в том числе в пяти работах в изданиях, рекомендуемых ВАК.

Автореферат в достаточной мере отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация Т. Ыскака «Устойчивость решений дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием» в полной мере соответствует критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней» для кандидатских диссертаций, а автор диссертации Ыскак Тимур заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент
кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.02,
доцент кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Чудинов Кирилл Михайлович

7 июня 2021 г.

614990, г. Пермь, Комсомольский просп., 29,
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», кафедра вычислительной математики, механики и биомеханики,
тел. +7(342)239-15-64, e-mail: cyril@list.ru

Подпись К. М. Чудинова заверяю

Ученый секретарь ПНИПУ

В.И. Макаревич