ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию
Баландина Антона Сергеевича
“Асимптотические свойства решений линейных
автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа”,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

В диссертационной работе А.С. Баландина изучаются асимптотические свойства решений классов линейных автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Основы теории дифференциальных уравнений с запаздыванием были заложены в середине прошлого века в работах Н.В. Азбелева, А.А. Андронова, Р. Беллмана, А.М. Зверкина, Г.А. Каменского, Н.Н. Красовского, Н.Н. Меймана, А.Д. Мышкиса, Л.С. Понтрягина, Б.С. Разумихина, Дж. Хейла, Я.З. Цыпкина, Н.Г. Чеботарева, С.Н. Шиманова, Л.Э. Эльсгольца и др. Большой интерес математиков к уравнениям с запаздыванием в те годы был связан с необходимостью решения прикладных задач, в которых важную роль играл эффект запаздывания. В последующие годы уравнения такого типа возникали во многих задачах теории автоматического регулирования и управления, автоматики и телемеханики, радиофизики, при моделировании процессов иммунологии, при изучении генных сетей, экономики и т. д. Поэтому в настоящее время имеется огромное число работ, посвященных исследованию различных задач для дифференциальных уравнений с запаздыванием, в частности, проблемы устойчивости решений. Однако, несмотря на бурное развитие теории устойчивости, существует масса нерешенных вопросов. Большой интерес представляют получение необходимых и достаточных условий устойчивости и построение областей устойчивости для уравнений с запаздыванием в пространстве их параметров. Следует отметить, что эти вопросы для уравнений запаздывающего типа (запаздывание входит в искомое решение и производные младших порядков) гораздо лучше исследованы по сравнению с уравнениями нейтрального типа (запаздывание входит в старшую производную). Это связано с особенностями расположения нулей характеристических функций, что существенно усложняет проведение исследований асимптотических свойств решений уравнений нейтрального типа. Поэтому тема диссертационной работы является актуальной и представляет несомненный интерес как с теоретической точки зрения, так и с прикладной.

Остановимся кратко на содержании представленной диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка цитируемой литературы. Общий объем диссертации составляет 141 страницу.

Во введении автор дает краткий обзор работ, посвященных теории устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений, определяет цели исследований, описывает результаты, вынесенные на защиту.

В первой главе диссертации рассматриваются линейные автономные функционально-дифференциальные уравнения нейтрального типа следующего вида

$$(I - S)\dot{x}(t) = (Tx)(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где

$$S = \sum_{j=1}^{J} a_j S_{h_j}, \quad (S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geq 0, \\ 0, & t-h < 0, \end{cases}$$

$$(Ty)(t) = \int\limits_0^{\omega} (S_\xi y)(t)\, dr(\xi),$$

$J \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, h_j, $\omega \in \mathbb{R}_+$, функция $r : [0, \omega] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$, интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса, функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке. Исследуется взаимосвязь фундаментального решения $X(t)$ и функции Коши $Y(t)$, с использованием которых решение уравнения (1) можно представить в следующем виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t Y(t-s) f(s)\, ds.$$

Устанавливаются соотношения для $X(t)$, $\dot{X}(t)$, $Y(t)$.

Во второй главе диссертации исследуются условия, при которых справедливы оценки следующего вида

$$\begin{aligned} \|X(t)\| &\leq M_1 e^{-\gamma_1 t}, \qquad M_1,\ \gamma_1 > 0, \\ \|Y(t)\| &\leq M_2 e^{-\gamma_2 t}, \qquad M_2,\ \gamma_2 > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

обеспечивающие экспоненциальную устойчивость решений уравнения (1). Обсуждаются обратимость оператора $I - S$ и характер расположения нулей характеристической функции

$$g(p) = p \left(1 - \sum_{j=1}^{J} a_j e^{-p h_j} \right) - \int\limits_0^{\omega} e^{-p\xi}\, dr(\xi)$$

для уравнения (1). В частности, установлен критерий, согласно которому для функции Коши $Y(t)$ (а следовательно, и для $X(t)$) справедлива оценка вида (2) тогда и только тогда, когда $I - S$ имеет в пространстве L_p обратный и все нули характеристической функции $g(p)$ лежат в открытой левой полуплоскости. Следует отметить, что традиционное для уравнений нейтрального типа условие отделимости нулей характеристической функции от мнимой оси заменено условием обратимости оператора $I - S$, что в ряде случае существенно упрощает исследование экспоненциальной устойчивости. Если запаздывания соизмеримы или являются линейно независимыми относительно множества целых чисел, указаны критерии обратимости оператора $I - S$.

В третьей главе, используя результаты предыдущей главы, автор устанавливает критерии и достаточные условия справедливости оценки (2) для функции Коши нескольких классов уравнений нейтрального типа:

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = -bx(t) + cx(t-1), \tag{3}$$

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) - b\dot{x}(t-2) = cx(t-1), \tag{4}$$

$$\left(I - \sum_{j=1}^{J} a_j S_h^j\right) \dot{x}(t) + \left(\sum_{m=0}^{M} b_m S_{r_m}\right) x(t) = 0, \tag{5}$$

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = \sum_{m=1}^{M} b_m \int_0^{h_m} x(t-s)\, dr(s). \tag{6}$$

С этой целью для уравнений (3), (4) автор привлекает метод D-разбиения, для уравнения (5) — обратимость оператора $I - S$, для уравнения (6) — переход от уравнения нейтрального типа к уравнению запаздывающего типа. Следует подчеркнуть, что условия формулируются исключительно в терминах параметров уравнений, что дает простой способ проверки экспоненциальной устойчивости для различных уравнений нейтрального типа.

В четвертой главе автор проводит детальное и исчерпывающее исследование границ области экспоненциальной устойчивости для уравнения (3) в пространстве параметров (a, b, c). Полученные результаты, в частности, содержат и уточняют известные ранее результаты. На каждой части границы (грани, ребра, вершины) автор получает оценки для $X(t)$, $\dot{X}(t)$, $Y(t)$ и $x(t)$, $\dot{x}(t)$. В том числе автор исследует наиболее интересные и трудные для изучения критические ($|a| = 1$, $|b| \neq c$) и сверхкритические ($|a| = 1$, $|b| = c$) случаи. В критическом случае нули характеристической функции $g(p)$ принадлежат открытой левой полуплоскости и существует последовательность нулей, приближающаяся к мнимой оси. В сверхкритическом случае нули функции $g(p)$ принадлежат замкнутой левой полуплоскости и существует неограниченная последовательность простых мнимых нулей. Отметим, что подобное поведение нулей характеристической функции является отличительной чертой уравнений нейтрального типа от уравнений запаздывающего типа.

Имеется несколько замечаний и пожеланий.

1. Автор использует одно и то же обозначение X для разных объектов: на стр. 20 X — фундаментальное решение, на стр. 22 X — произвольное нормированное пространство измеримых функций.

2. При определении понятий устойчивости, асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости начальную задачу (1.7) автор называет уравнением, что объяснимо с точки зрения дальнейших рассуждений автора и перехода к уравнению вида (1.1), но не совсем корректно в данном месте.

3. Утверждения 3, 4 теоремы 2.6 являются следствиями хорошо известных результатов для разностных уравнений и автор об этом пишет в доказательстве. Однако в автореферате эта теорема приводится без соответствующих пояснений, что может ввести в заблуждение читателей.

4. В работе имеются незначительные опечатки; в частности, на стр. 23 при обозначении пространства Соболева пропущен показатель гладкости 1, на стр. 107 в уравнении (4.15) должен стоять знак “+” перед S.

5. Отдельный интерес представляют значения параметров в показателе экспоненты, которые характеризуют скорость стабилизации решений на бесконечности. Поэтому хотелось бы пожелать автору в будущем провести исследования в этом направлении.

Указанные замечания не влияют на положительную оценку диссертации в целом. Автором проделана большая работа по развитию теории устойчивости для линейных автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. В этой области им получен ряд новых результатов, представляющих несомненный интерес для специалистов по функционально-дифференциальным уравнениям.

Диссертация А.С. Баландина выполнена на высоком научном уровне. Результаты носят теоретический характер и в дальнейшем могут быть использованы в исследованиях устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений, ведущихся в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, в Санкт-Петербургском государственном университете, в Пермском национальном исследовательском политехническом университете, в Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, в Новосибирском государственном университете, в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, в Институте динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН и др.

Все результаты диссертации обоснованы полными доказательствами. По теме диссертации имеется 37 публикаций, из них 10 статей в журналах из перечня изданий, рекомендованных ВАК. Результаты исследований докладывались на международных конференциях и научных семинарах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Представленная диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК (п. 9–14 Положения о присуждении ученых степеней от 24 сентября 2013 г. № 842), предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, и ее автор, Баландин Антон Сергеевич, несомненно заслуживает присуждения указанной степени.

Официальный оппонент
Старший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН), доцент Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования “Новосибирский национальный исследовательский государственный университет” (НГУ), кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.02, доцент

Матвеева Инесса Изотовна

7 февраля 2020 г.

Адрес: 630090, г. Новосибирск,
проспект Академика Коптюга, д. 4
Тел.: +7(383)3297567
Email: matveeva@math.nsc.ru