ОТЗЫВ

официального оппонента Ткачева Владимира Геннадьевича
на диссертацию КОПЫЛОВА Ярослава Анатольевича
«Гомологические аспекты теории локально выпуклых пространств, пространств Лебега и Орлича дифференциальных форм и гармонического анализа»,
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Использование L_2-методов для изучения римановых многообразий и групп восходит к середине XX в. В 1976 г. М. Атья определил L_2-когомологии риманова многообразия и инициировал их использованию для изучения некомпактных римановых многообразий.

В начале 80-х годов XX в. В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов и И. А. Шведов начали исследование L_p-дифференциальных форм на римановых многообразиях при произвольном $p \in [1, \infty]$. Они ввели в рассмотрение пространства $\Omega^*_{p,q}$ ($W^*_{p,q}$) тех форм из L^p, у которых обобщенный внешний дифференциал (в смысле потоков де Рама) лежит в L^q, и определены $L_{p,q}$-когомологии риманова многообразия M. Существенное отличие от случая L^2 здесь состоит в том, что при $p \neq 2$ L_p-формы образуют относительно L_p-нормы не гильбертово, а банахово пространство, что делает методы исследования $L_{p,q}$-когомологий принципиально иными. $L_{p,q}$-когомологии римановых многообразий также недавно изучались В. М. Гольдштейном и М. Трояновым, С. К. Водопьяновым и др.

Как и функциональные пространства Орлича, пространства Орлича L^Φ дифференциальных форм представляют собой естественное обобщение пространств L^p. Пространства Орлича дифференциальных форм на областях в $\mathbb{R}^n$ были впервые рассмотрены Т. Иванцом и Г. Мартином, доказавшими теорему типа Рисса для пространств Орлича дифференциальных форм на области в $\mathbb{R}^n$. Пространства Орлича дифференциальных форм на римановых многообразиях были впервые рассмотрены в совместной работе диссертанта с Р. А. Паненко в 2015 г. и М. Карраско Пьяджо в 2017 г.

П. Пансю, М. Громов и Г. Элек распространили использование L^p-методов на различные дискретные объекты (графы, симплициальные комплексы, конечнопорожденные дискретные группы). Из-за интересных связей одномерных L_p-когомологий со свойствами конечнопорожденной группы (концы группы, аменабельность, действия группы на банаховых пространствах) когомологические L^p-методы в теории групп в последние годы получили активное развитие (М. Бурдон, Ф. Мартен, А. Валетт, М. Бурдон, Р. Тессера и др.). Наряду с пространствами L^p на локально компактных группах интерес вызывают также пространства Орлича L^Φ, позволяющие давать более общие характеризации свойств группы (И. Бунд, А. Каминьска и Й. Муселяк, М. М. Рао, И. Акбарбаглу и С. Магсуди).

Рассмотрение дифференциальных форм, принадлежащих L_p или пространству Орлича, естественным образом приводит к рассмотрению коцепных комплексов в категории банаховых пространств и других подкатегориях категории локально выпуклых пространств. В связи с этим возникает проблема распространения известных гомологических теорем в абелевых категориях на более общие аддитивные подкатегории категории докально выпуклых пространств, таких, как категории банаховых пространств, пространств Фреше или подкатегорий бочечных и борнологических локально выпуклых пространств. Если для первых двух подкатегорий (являющихся квазиабелевыми в смысле Шнейдерса) были известны версии стандартных утверждений гомологической алгебры (лемма о змее, 5- и 9-леммы, гомологическая последовательность и т.п.), то интерес к полуабелевым категориям, введенным В. П. Паламодовым около 50 лет назад (а именно таковыми являются бочечные и борнологические пространства), заметно усилился в последние 10–12 лет.

Предметом изучения в диссертации Я. А.Копылова как раз являются указанные выше вопросы, т. е. изучение различных теорем о когомологиях в анализе на многообразиях и гармоническом анализе, а также в категориях локально выпуклых пространств, описанных выше.

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Введение содержит некоторые необходимые понятия, историческую сведения и обзор основных результатов. Предметом рассмотрения первой главы являются различные вопросы гомологической алгебры в некоторых важных аддитивных подкатегориях категории локально выпуклых пространств. Вторая глава целиком посвящена $L_{p,q}$-когомологиям римановых многообразий, таких, как скрученные произведения и группа Гейзенберга. В третьей главе исследуются одномерные группы когомологий локально компактных и дискретных групп. В четвертой главе устанавливается двойственнсть Гёльдера–Пуанкаре для когомологий Орлича риманово многообразия и вычисляются когомологии Орлича некоторых базовых многообразий.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Разработаны категорные методы исследования предабелевых и Р-полуабелевых подкатегорий категории локально выпуклых пространств. Эти методы позволили установить для категорий бочечных и борнологических локально выпуклых пространств: достаточные условия точности Ker-Coker-последовательности и (ко)гомологической последовательности, соответствующей короткой строго точной последовательности комплексов; леммы о пяти и девяти гомоморфизмах; условия возможности построения спектральной последовательности точной пары. Для банаховых пространств и пространств Фреше исследованы некоторые обобщения Ker-Coker-последовательности.

2. Получены условия нетривиальности $L_{p,q}$-когомологий искривленного цилиндра в терминах двухвесового неравенства Харди на полуинтервале и, как приложение, необходимые условия нормальной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на поверхности вращения в $\mathbb{R}^{n+2}$. Найдены условия тривиальности редуцированных и нередуцированных $L_{p,q}$-когомологий скрученного цилиндра. Доказано, что при $p < q$ одномерные $L_{p,q}$-когомологии общей группы Гейзенберга $\mathbb{H}_n$ бесконечномерны.

3. Найден новый критерий аменабельности для замкнутой подгруппы локально компактной группы в терминах ее действия на пространстве Орлича самой группы, а также новый критерий аменабельности однородного пространства. Установлена связь одномерных когомологий Орлича дискретной группы с наличием неаменабельной подгруппы.

4. Развита теория двойственности для пространств Орлича дифференциальных форм и редуцированных когомологий Орлича в рефлексивном случае, а также в общем случае описаны линейные непрерывные функционалы на замыкании подпространства гладких форм с компактным носителем (пространстве Морса–Трэнсю) в пространстве Орлича. Изучены когомологии Орлича некоторых модельных многообразий.

Все основные результаты являются новыми, снабжены полными доказательствами и опубликованы в российских и зарубежных журналах, входящих в перечень ВАК. Результаты работ неоднократно докладывались соискателем на российских и международных научных конференциях и семинарах и хорошо известны специалистам по глобальному и гармоническому анализу, а также гомологическим методам функционального анализа в России и за рубежом. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертация является завершенным научным исследованием на актуальную тему, в котором решены проблемы, имеющие важное значение для гомологических аспектов функционального, глобального и гармонического анализа. Результаты диссертации могут найти дальнейшее применение в изучении некомпактных римановых многообразий и топологических групп и аналитических свойств дискретных объектов, а также в теории локально выпуклых пространств.

В целом текст диссертации хорошо написан. Вместе с тем, отмечу несколько небольших замечаний по тексту.

1) Строка 8-9 на стр 144: отсутствует ссылка на утверждение о нормальной разрешимости.

2) Ниже на той же странице следует исключить $\{a\}$ из правой части определения:

$$\Omega^0_{p,q}([a,b),\{a\},v_0,v_1) = \{f \in \Omega^0_{p,q}([a,b),\cancel{\{a\}},v_0,v_1) \mid f(a)=0\}$$

3) В формулировке п. 2 теоремы 2.2, по-видимому, пропущен знак эквивалентности.

4) На страницах 145–150 приводятся ссылки на результаты работы [22] для случая $p=q$ и утверждается, что метод доказательства легко переносится на общий случай. Отсутствие в тексте диссертации точных ссылок на конкретные леммы и предложения из [22], однако, затрудняет проверку этих утверждений.

Приведенные выше замечания, однако, не умаляют достоинств работы, которая, без сомнения, представляет собой значительный вклад в анализ на римановых многообразиях и гармонический анализ, а также гомологическую теорию локально выпуклых пространств.

Считаю, что диссертация Копылова Ярослава Анатольевича «Гомологические аспекты теории локально выпуклых пространств, пространств Лебега и Орлича дифференциальных форм и гармонического анализа» удовлетворяет требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание степени доктора наук, а её автор, Копылов Ярослав Анатольевич, безусловно, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук, доцент
Ткачев Владимир Геннадьевич
доцент университета Линчепинга (Швеция)

Почтовый адрес:

Linköping University, SE-58183
Linköping, Sweden
Тел.: +46 13 281000
E-mail: vladimir.tkatjev@liu.se

28.09.2021

Подпись В.Г. Ткачева заверяю

Signaturen är vidimerad Matilda Kåhlin, Administratör MaI, LiU