О Т З Ы В

официального оппонента

на диссертацию **Сторожука Константина Валерьевича**

Асимптотические свойства операторных полугрупп и подпространств банахова пространства

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01. – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа К.В. Сторожука посвящена исследованию поведения траекторий однопараметрических полугрупп операторов в их связи с глобальной структурой полугрупп и возникающих в связи с этим вопросами (и не только в связи с ними) поведения семейств «больших» подпространств. Вопросы такого рода возникают в самых разнообразных задачах как чистой математики (теория инвариантных подпространств, спектральная теория, динамические системы, дифференциальные и функциональные уравнения, гармонический анализ) так и её приложений. Таким образом, тематика работы является актуальной.

В первой главе работы исследуются условия замкнутости, инвариантной и аппроксимативно-инвариантной дополняемости подпространства X_0, состоящего из всех векторов, орбиты которых стремятся к нулю. Особое внимание уделяется асимптотически конечномерным полугруппам, т.е. таким, для которых пространство X_0 имеет конечномерное дополнение. Наиболее важные результаты связаны с поведением дополняющих подпространств под действием полугруппы. Доказано, что если асимптотически конечномерная полугруппа ограничена, или, более общим образом, растет медленно ($\|T_t\| = o(t)$), то любое дополняющее подпространство оказывается почти стабилизируемым. Если же асимптотически конечномерная полугруппа почти периодична в слабой топологии (замыкания орбит слабо компактны), то орбита любого дополняющего подпространства сходится к инвариантному дополнению. Приводятся примеры, демонстрирующие разнообразие асимптотического поведения асимптотически конечномерных полугрупп. Особенно интересен неожиданный пример, построенный в теореме 1.4 неограниченной асимптотически двумерной полугруппы, у которой есть и стабильное, и нестабилизируемое подпространство.

Во второй главе исследуется вопрос о скорости сходимости к нулю индивидуальных траекторий эволюционных семейств и полугрупп операторов. В работах Датко, Зябчика, Литтмана, Ю.Л.Далецкого — М.Г.Крейна и других было установлено, что если нормы операторов T_t не стремятся к нулю экспоненциально быстро, то найдутся векторы x, для которых нормы $T_t x$ стремятся к нулю сколь угодно медленно (в смысле сходимости несобственных интегралов для широкого класса функций от $\|T_t x\|$).

Замечательный результат, полученный диссертантом (Теорема 2.2) утверждает, что в этих (и в менее жестких) предположениях об операторах T_t для любой последовательности $A_k \to \infty$ и любой последовательности $\gamma_k \to 0$ неотрицательных чисел, найдутся вектор $x \in X$ и функционал $x' \in X'$, такие, что функция $\varphi(t) = |\langle T_t x, x' \rangle|$ удовлетворяет неравенствам $\varphi(t) > \gamma_k$ на множествах, мера которых больше A_k. Доказательство этого утверждения, существенно усиливающего известные результаты Ван Неервена, потребовало разработки сложной техники и тонкого анализа. Отметим также, что вектор x можно выбрать в области определения всех степеней генератора полугруппы. Для того, чтобы это доказать, автор изящно использовал изоморфизмы в шкале Соболева ассоциированных полугрупп.

В третьей главе доказывается, что одним из достаточных условий асимптотической конечномерности является наличие «иногда притягивающего» компакта, если степени оператора ограничены. Другими словами, если существует компакт, такой что каждая орбита имеет точки, сколь угодно близкие к нему, то полугруппа асимптотически конечномерна. Этот результат, интересный и сам по себе, имеет приложения к теории суперциклических операторов: из него немедленно следует, что изометрия U банахова пространства X не может иметь суперциклического вектора, то есть, вектора x, такого, что множество всех векторов, пропорциональных векторам $U^n x$, плотно в X. Здесь же К.В. Сторожук вводит понятие компактной суперцикличности, которое представляется естественным обобщением N-суперцикличности Бурдона, Фельдмана и Шапиро, и усиливает их результаты, показывая, что изометрия не может иметь компактно-суперциклических векторов.

Четвертая глава содержит очень интересные усиления результата об «иногда притягивающих» компактах. Пусть $\eta > 0$. Будем говорить, что компакт K является η-притягивающим для ограниченной полугруппы $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$, если любая орбита содержит точки из η-окрестности K. Среди полученных результатов отметим три. Первый из них — теорема 4.2 — устанавливает, что если пространство X рефлексивно, то существование η-притягивающего компакта для некоторого $\eta < 1$ влечет асимптотическую конечномерность полугруппы (и, следовательно, равносильно асимптотической конечномерности).

Второй результат — теорема 4.3 — показывает, что без условия рефлексивности то же верно при $\eta < 1/2$. Наконец, в теореме 4.4 доказано, что в обеих теоремах ограничения существенны: если не требовать рефлексивности, то ослабить условие $\eta < 1/2$ даже до $\eta \le 1/2$ невозможно. Автор показал это, предъявив очень важный метод построения изометрий пространства непрерывных функций на диске. При этом он использовал довольно тонкие конструкции классического гармонического анализа.

Подчеркнем, что все три результата очень нетривиальны, их доказательства требуют серьезной специально разработанной техники. В частности, доказательство теоремы 4.3 четвертой главы опирается на существование нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств у изометрии банахова пространства, что составляет содержание главы 5. Эта глава, самая короткая в диссертации, является, возможно, самой значимой.

Здесь автор доказывает теорему о существовании нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств у любой изометрии вещественного банахова пространства.

В комплексном случае этот результат,известен и является частным случаем глубокой теоремы Любича и Мацаева об отделимости спектра у операторов с умеренным («меньше экспоненциального») ростом норм целых степеней, однако для вещественного случая такой результат в литературе отсутствовал.

Диссертант получил в главе 5 вещественный аналог теоремы Любича-Мацаева (теорема 5.1), причем его доказательство состояло не в построении аналога классических конструкций, а в разработке красивого общего метода построении инвариантных подпространств оператора в вещественном пространстве через инвариантные подпространства его комплексификации.

В первом параграфе шестой главы диссертации решена проблема строгой нормальности нормальных (по М.Г. Крейну) конусов банаховых пространств. Этот результат имеет прямое отношение к теории однопараметрических полугрупп, поскольку для упорядоченных пространств со строго нормальными конусами известен ряд важных результатов о притягивающих множествах однопараметрических полугрупп положительных операторов. До работы Сторожука нахождение не строго нормального нормального конуса казалось трудной задачей, поскольку для многих естественных «кандидатов» доказана строгая нормальность.

Диссертант показывает, что уже в четырехмерном пространстве существуют такие конусы. Он также даёт другой способ построения таких конусов существенно бесконечномерной природы — в пространствах, геометрия шаров в которых не удовлетворяет так называемому свойству MLUR (midpoint locally uniform rotundity).

Второй и третий параграф шестой главы посвящены изучению асимптотических свойств конусов и семейств подпространств конечной коразмерности. В теореме 6.2 автор строит архимедово замкнутый конус (т.е. такой, который с любой прямой пересекается по замкнутому множеству), который является замкнутым относительно почти максимальной топологии (то есть топологии, порожденной гиперплоскостью функционалов на исходном пространстве, объявленных непрерывными).

В диссертации сформулирован вопрос о том, всегда ли такого рода топологии допускают соответствующие конусы. Диссертант обратил мое внимание на то, что в магистерской дипломной работе 2021 года И.А. Емельяненкова получен отрицательный ответ на этот вопрос. Это подчеркивает существенность тех построений, которые провел К.В. Сторожук.

В теореме 6.6 автор, применив технику ультрафильтров, доказал, что бесконечное семейство подпространств конечной коразмерности k содержит в своем верхнем топологическом пределе тоже подпространство коразмерности k. Приложения этого результата важны именно к банаховым пространствам, однако доказательство не использует полноты, а использует по существу методы, примыкающие к теореме Банаха—Алаоглу, которые применимы для любых локально выпуклых топологических пространств.

Отмечу недостатки текста диссертации в порядке убывания значимости.

Оставляет желать лучшего «подробность» изложения. Во многих местах за словами «легко видеть, что...» скрываются рассуждения, которые, на мой взгляд, не следовало бы опускать; их разбор представляет собой трудную задачу. Автор прилагает много сил для выявления идейной структуры доказательств, но для проверки корректности нужна и полезна более формальная запись. На мой взгляд, только последний параграф последней главы написан столь подробно, сколь принято писать в текстах диссертаций. Думаю, что если бы автор писал доказательства настолько подробно, насколько это принято, то текст был бы существенно объемнее, но его изучение занимало бы меньше времени.

На стр. 80 предпоследний абзац противоречит четвертому снизу абзацу: там и там даются несогласующиеся друг с другом определения компактной суперцикличности. По-видимому, предпоследний абзац неверный и лишний.

На стр. 100 в одном из ключевых мест идет ссылка на рассуждение, приведенное на стр. 105. Иногда такие вещи оправданы, однако в данном месте эта «ссылка на будущее» неуместна и рассуждение следовало бы привести сразу, поскольку оно никак не нарушило бы «ритма» изложения.

На стр. 10 в разделе «методологии и методы исследования» сказано, в частности, «...были использованы некоторые методы алгебраической топологии». Действительно, на стр. 114 используется теорема Титце—Урысона (это, скорее, общая, а не алгебраическая топология) и ниже — степень отображения окружности в окружность. Используется это понятие по существу, однако, возможно, что лишь из-за этого места можно было бы и не упоминать «методы алгебраической топологии». Тем более, что эти методы уже давно и тесно переплелись с методами функционального анализа.

На стр. 49 снизу в определении множества подпространств $G(X, n)$ вместо n нужна буква d. На стр. 50 без пояснений появляется не оговоренное обозначение $D(d, X)$ и лишь из контекста становится ясно, что это такое.

Прочие опечатки никак не влияют на понимание работы.

Перечисленные выше замечания не влияют на положительную оценку диссертации в целом.

Многие возможные направления дальнейшего исследования отмечены самим автором. Мне хотелось бы добавить к ним задачу о возможности переноса результатов об аттракторах, полученных для пространств со строго нормальными конусами, на пространства с нормальными конусами.

Обращаю внимание на то, что в каждом параграфе каждой главы присутствуют содержательные идеи, которые не являются простыми обобщениями уже известных подходов.

Не сомневаюсь, что результаты работы будут постоянно использоваться в дальнейших исследованиях, что для работы теоретического характера означает её практическую значимость.

В целом работа содержит ряд глубоких научных результатов и представляет собой завершенное научное исследование. Сожалею, что автор не включил в диссертацию результаты своей работы «теоремы об асимптотическом ранге», опубликованной в журнале «Алгебра и логика» в 2019 г., которые как нельзя лучше соответствуют тематике работы и не нарушили бы внутреннего единства.

Полученные в работе результаты являются новыми и обоснованными, их доказательства — строгими, достоверность не вызывает сомнения. Автореферат написан ясно и конкретно, правильно и полно отражает основные результаты диссертации и дает хорошее представление как об общем состоянии рассматриваемых областей теории операторов, так и о том продвижении, которое было достигнуто благодаря усилиям автора диссертации.

Ссылки на литературу корректны. Результаты своевременно опубликованы в одиннадцати научных работах, выполненных соискателем единолично. Из них 8 опубликовано в российских журналах, включенных в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных результатов докторских диссертаций (Сиб.Мат.Журн.; Функ.ан-з и его прил.; Мат. заметки; SEMR), а ещё 3 — в международных научных журналах (Proc AMS; Journal of Math An. and Appl; Positivity), индексируемых в международной базе данных Web of Science.

По теме диссертации автор неоднократно выступал на международных научных конференциях.

В диссертации К.В. Сторожука на основании выполненных исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно и нужно квалифицировать как научное достижение. Докторская диссертация К.В. Сторожука полностью соответствует требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание степени доктора наук.

Исследования К.В. Сторожука вносит значительный вклад в развитие одного из актуальных и перспективных направлений функционального анализа. К.В. Сторожук, безусловно, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доктор физико-математических наук
(01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ), доцент,
профессор кафедры математики и информатики
(ФГБОУ ВПО Вологодский государственный
университет, институт математики,
естественных и компьютерных наук)

21. 7. 21

Виктор Семенович Шульман

Вологодский Государственный Университет,
160000, г. Вологда, ул. Ленина, д.15, каб.108

Адрес электронной почты shulman.victor80@gmail.com
Телефон +7 (8172) 76-91-08