

ОТЗЫВ

официального оппонента Шлапунова Александра Анатольевича
на диссертацию КОПЫЛОВА Ярослава Анатольевича
«Гомологические аспекты теории локально выпуклых пространств, пространств Лебега и
Орлича дифференциальных форм и гармонического анализа»,
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Как хорошо известно, переопределенные дифференциальные операторы, например, оператор градиента ∇ или вихревой оператор rot тесно связаны со многими базовыми уравнениями современного естествознания. Их изучение привело к введению понятия дифференциальной формы, рассмотрению комплекса де Рама и, позднее, к определению более общих объектов исследования — дифференциальных комплексов на римановых многообразиях. Как оказалось, теорию разрешимости соответствующих (локально, систем) переопределенных дифференциальных уравнений удобно строить на языке гомологической алгебры, особенно если речь идет о работе в категориях бесконечно гладких или аналитических функций. Хотя общая теория дифференциальных комплексов далека от завершения, ее раздел касающийся комплексов Гильберта (в частности, комплексов де Рама и Дольбо) содержит вполне удовлетворительные результаты в категории бесконечно дифференцируемых функций. Однако с точки зрения математической физики и приложений математики гораздо естественнее рассматривать дифференциальные уравнения как операторные в подходящих пространствах Банаха (пространства Гельдера $C^{k,\lambda}$, Лебега L_p или Соболева W_p^k) или в других пространствах, допускающих дискретизацию и применение численных методов. В частности, когомологии де Рама над различными пространствами Банаха и Фреше прочно вошли в анализ на римановых многообразиях, а когомологии Дольбо — на многообразиях Кэлера.

Наиболее удобными для дискретизации оказались функциональные пространства учитывающие интегральные свойства сечений исследуемых расслоений, например, пространства лебеговского типа. Использование L_2 -методов для изучения римановых многообразий восходит к середине XX в. По-видимому, одной из первых в этом направлении является работа Л. Хёрмандера (1965), посвященная комплексу Дольбо; примечательно, что другие методы не давали на то время таких полных ответов о когомологиях комплекса Дольбо над пространствами Банаха в областях из $\mathbb{C}^n$.

В 1976 г. М. Атья определил L_2 -когомологии (де Рама) риманова многообразия и положил начало их использованию для изучения некомпактных римановых многообразий и римановых многообразий с особенностями. В начале 80-х годов XX в. В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов и И. А. Шведов начали исследование L_p -дифференциальных форм на римановых многообразиях при произвольном $p \in [1, \infty]$. Ими были введены пространства $\Omega_{p,q}^*$ ($W_{p,q}^*$) тех форм из L_p , у которых обобщенный внешний дифференциал (в смысле потоков де Рама) лежит в L_q , и определены $L_{p,q}$ -когомологии риманова многообразия M . Существенное отличие от случая L_2 здесь состоит в том, что при $p \neq 2$ L_p -формы (как и L_p -функции) образуют относительно L_p -нормы банахово, а не гильбертово пространство, что делает методы исследования $L_{p,q}$ -когомологий иными. $L_{p,q}$ -когомологии римановых многообразий были в последние годы объектом внимания В. М. Гольдштейна и М. Троянова, С. К. Водопьянова и Сян Дун Ли.

Подобно функциональным пространствам Орлича, пространства Орлича L^Φ дифференциальных форм являются естественным обобщением пространств L_p . Пространства Орлича дифференциальных форм на областях в $\mathbb{R}^n$ были впервые рассмотрены Т. Иванцом и Г. Мартином, которые установили теорему типа Рисса для пространств Орлича дифферен-

циальных форм на области в $\mathbb{R}^n$. Пространства Орлича дифференциальных форм на римановых многообразиях, по-видимому, были впервые рассмотрены в совместной работе автора с Р. А. Паненко в 2015 г., а также М. Карраско Пьяджо (2017).

П. Пансю, М. Громов и Г. Элек распространили использование L_p -методов на графы, симплициальные комплексы, а также на конечнопорожденные дискретные группы. Из-за интересных связей одномерных L_p -когомологий со свойствами конечнопорожденной группы (концы группы, аменабельность, действия группы на банаховых пространствах) когомологические L_p -методы в теории групп в последние годы получили активное развитие (М. Бурдон, Ф. Мартен, А. Валетт, М. Бурдон и др.). Недавно Р. Тессера доказал, что групповые L_p -когомологии связной группы Ли совпадают с L_p -когомологиями этой группы как многообразия. Наряду с пространствами L_p на локально компактных группах интерес вызывают также пространства Орлича L^Φ , позволяющие давать более развитые характеристики свойств группы. Пространства Орлича на локально компактных топологических группах рассматривались И. Бундом, А. Каминьской и Й. Муселяком, а также совсем недавно М. М. Рао, И. Акбарбаглу и С. Магсуди.

С точки зрения теории дифференциальных комплексов, рассмотрение дифференциальных форм, принадлежащих L_p или пространству Орлича, естественным образом приводит к рассмотрению коцепных комплексов в категории банаховых пространств и других подкатегориях категории локально выпуклых пространств. В связи с этим возникает проблема распространения известных гомологических теорем в абелевых категориях на более общие аддитивные подкатегории категории локально выпуклых пространств, таких, как категории банаховых пространств, пространств Фреше (квазиабелевы подкатегории) или подкатегорий бочечных и борнологических локально выпуклых пространств (полуабелевых категорий Паламодова). Если для первых двух подкатегорий были известны версии стандартных утверждений гомологической алгебры (лемма о змее, 5- и 9-леммы, гомологическая последовательность строго точной последовательности комплексов), то интерес к полуабелевым категориям, введенным В. П. Паламодовым около 50 лет назад, вырос в последние годы. Впрочем, уже в категории банаховых пространств вопрос об описании образа замкнутого плотно определенного линейного оператора является необозримым в общем случае и требует существенной спецификации для различного типа пространств и операторов. По-видимому, вопросы нормальной разрежимости операторных уравнений и отделимости когомологий являются здесь ключевыми.

Диссертация Я. А. Копылова посвящена всем очерченным выше вопросам, а именно, изучению различных теорем о когомологиях как в анализе на многообразиях и гармоническом анализе, так и в упомянутых выше категориях локально выпуклых пространств.

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Введение содержит некоторые необходимые понятия, историческую справку и обсуждение основных результатов. В первой главе рассматриваются различные вопросы гомологической алгебры в важных аддитивных подкатегориях категории локально выпуклых пространств. Вторая глава посвящена $L_{p,q}$ -когомологиям римановых многообразий (искривленных и скрученных произведений и группы Гейзенберга). Третья глава посвящена исследованию одномерных групп когомологий локально-компактных и дискретных групп. В четвертой главе доказывается двойственность Гёльдера–Пуанкаре для когомологий Орлича риманово многообразия, а также даются некоторые вычисления когомологий Орлича.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Разработаны категориные методы исследования предабелевых и P -полуабелевых подкатегорий категории локально выпуклых пространств. Эти методы позволили установить для категорий бочечных и борнологических локально выпуклых пространств: достаточные условия точности Кер–Сокер-последовательности и (ко)гомологической последовательности, соответствующей короткой строгой последовательности комплексов; подходящие ана-

логи стандартного инструментария гомологической алгебры, как, например, леммы о пяти и девяти гомоморфизмах; условия возможности построения спектральной последовательности точной пары. Для банаховых пространств и пространств Фреше исследованы некоторые обобщения Кег-Сокер-последовательности.

2. Получены условия нетривиальности $L_{p,q}$ -когомологий искривленного цилиндра в терминах двухвесового неравенства Харди на полуинтервале и, как приложение, необходимые условия нормальной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на поверхности вращения в $\mathbb{R}^{n+2}$. Найдены условия тривиальности редуцированных и нередуцированных $L_{p,q}$ -когомологий скрученного цилиндра. Доказано, что при $p < q$ одномерные $L_{p,q}$ -когомологии общей группы Гейзенберга $\mathbb{H}_n$ бесконечномерны.

3. Найден новый критерий аменабельности для замкнутой подгруппы локально компактной группы в терминах ее действия на пространстве Орлича самой группы, а также новый критерий аменабельности однородного пространства. Установлена связь одномерных когомологий Орлича дискретной группы с наличием неаменабельной подгруппы.

4. Развита теория двойственности для пространств Орлича дифференциальных форм и редуцированных когомологий Орлича в рефлексивном случае, а также в общем случае описаны линейные непрерывные функционалы на замыкании подпространства гладких форм с компактным носителем (пространстве Морса-Трэнсю) в пространстве Орлича. Изучены когомологии Орлича некоторых модельных многообразий.

Все основные результаты являются новыми, снабжены полными доказательствами и опубликованы в российских и зарубежных журналах, входящих в перечень ВАК. Результаты работ неоднократно докладывались соискателем на научных конференциях и семинарах и хорошо известны специалистам по глобальному и гармоническому анализу и гомологическим методам функционального анализа в России и за рубежом. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертация представляет собой завершенное научное исследование на актуальную тему, в котором решены проблемы, имеющие важное значение для гомологических аспектов функционального, глобального и гармонического анализа. Результаты диссертации могут найти дальнейшее применение в изучении некомпактных римановых многообразий и топологических групп, а также в теории локально выпуклых пространств.

Основным общим замечанием является то, что содержание первой главы диссертации немного диссонирует с тремя последующими главами. Именно, после погружения в теорию объектов достаточно высокого уровня абстракции, в главах 2-4 автор фактически возвращается к комплексу де Рама над банаховыми пространствами лебеговского типа (включая пространства Орлича). При этом общая теория первой главы не находит в диссертации других содержательных примеров.

Среди мелких замечаний отмечу некоторый разнобой в обозначениях (например, автор пишет то L^p , то L_p для пространств Лебега), по-видимому, неизбежный в работах такой длины, и выше среднего количество опечаток в главе 2 (например, "гедезических" вместо "геодезических" на с. 186, стр. 4 сверху, "покрытию" вместо "покрытию" на с. 187, перед формулой (2.31), "диффеоморфицмы" вместо "диффеоморфизмы" на с. 194, строка 2 снизу, "вышк" вместо "выше" на с. 195, строка 12 снизу, и т.д.), которые однако не влияют на оценку результатов диссертации.

Считаю, что диссертация Ярослава Анатольевича Копылова «Гомологические аспекты теории локально выпуклых пространств, пространств Лебега и Орлича дифференциальных форм и гармонического анализа» удовлетворяет требованиям пп. 9-11 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание степени доктора наук, а её автор, Копылов Ярослав Анатольевич, безусловно, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
Шлапунов Александр Анатольевич,
профессор кафедры теории функций института математики и
фундаментальной информатики
ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»

Почтовый адрес:

Российская Федерация, 660041,
г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 35-02
Телефон: +7(391) 246-98-86
E-mail: ashlapunov@sfu-kras.ru

10 сентября 2021 года