ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА Е.И. БЕРЕЖНОГО

на диссертационную работу К.В. СТОРОЖУКА на тему

"АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛУГРУПП И ПОДПРОСТРАНСТВ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Актуальность темы диссертации. Расцвет теории полугрупп начался в 40-х годах прошлого века (итоги – в книгах Хилле – Филлипса, Данфорда – Шварца и т.п.) и продолжался до 80-х (в СССР – исследования М.Г. и С.Г. Крейнов, Ю.Л. Далецкого, И.Ц. Гохберга, Ю.И. Любича, М.Ш. Бирмана, М.З. Соломяка и др.). Сейчас основная масса работ по теории полугрупп связана с динамикой линейных операторов в банаховых пространствах. Именно эта область тесно связана с такими направлениями, как спектральная теория линейных операторов, эргодическая теория, пространства аналитических функций и действующие в них операторы. В частности, очень много работ посвящено понятию гиперцикличности (хаотичности, сильному перемешиванию). В значительной степени это обусловлено известной задачей о существовании инвариантных подпространств у ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве. Этой тематике посвящено значительное число работ таких специалистов, как Ж. Годфруа, Дж. Шапиро, А. Монтес – Родригес, Г. Салас, А. Перис, Ф. Баярт, С. Гриво, К. Гросс-Эрдманн, Э. Матерон. Хороший обзор теории изложен в монографиях:

F. Bayart, E. Matheron, "Dynamics of Linear Operators". Cambridge University Press, 2009

K.G. Grosse-Erdmann, A. Peris Manguillot, "Linear Chaos". Springer, Berlin, 2011.

К сожалению, обе эти книги отсутствуют в списке литературы.

Основная тема диссертации связана с поведением итераций операторов. Поэтому данную тему можно рассматривать как базу для выполнения докторской диссертации.

Перейдем к обзору содержания предложенной работы.

Первая часть диссертации – главы 1, 2, 3, 4, 5 – посвящена некоторым задачам теории операторных полугрупп.

Эта теория возникла при исследовании динамических систем и автономных дифференциальных уравнений в середине прошлого века.

1. **Первая** глава диссертации посвящена задаче о свойствах пространства начальных условий X_0, элементы которого при $t \to \infty$ уходят в нуль. Показано, что при некоторых условиях пространство уходящих в нуль векторов будет замкнуто. К сожалению, проверка основного предположения теоремы - коразмерность X_0 должна быть не больше ω – практически невыполнима, кроме тривиального случая, когда полугруппа ограничена.

   Далее изучается поведение полугруппы на дополнении к X_0 в случае, когда справедливо равенство $X = X_0 \oplus L$, где $dimL < \infty$. Показано, что образ L под действием полугруппы стремится к предельному пространству. Основная метрика между подпространствами – раствор. Именно в терминах раствора и формулируется вопрос о стремлении к предельному конечномерному пространству.

   Замечание 1.1.

   Отметим, что полнота системы d - мерных подпространств относительно метрики, порождаемой раствором, хорошо известна: см., например,

   И.Ц. Гохберг, А.С. Маркус, "Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства."УМН, XIV, вып. 5 (1959), 135-140.

   Поэтому приводить доказательство полноты в диссертации не нужно.

   Замечание 1.2.

   Все факты достаточно простые – это следует, например, из того, что доказательства результатов занимают не более страницы.

2. **Вторая** глава диссертации посвящена вопросу о существовании индивидуальных "плохих"начальных данных $x \notin X_0$, на которых реализуется асимптотически "плохое"поведение полугруппы, например, какой-то функционал принимает бесконечное или, наоборот, конечное значение. Основное достижение автора – короткое доказательство следующего факта. Пусть эволюционное семейство равномерно ограничено, но не является равномерно экспоненциально ограниченным. Пусть задана функция $N(\alpha, u) : R^n \times R_+ \to R_+$ такая, что $f_\alpha(u) = N(\alpha, u) : R_+ \to R_+$ не убывает. Тогда найдется $x \in X$ что для всех α

   $$\sup_s \int_0^\infty f_\alpha(|U(s+p,s)(x)|)dp = \infty.$$

   Доказательство базируется на хорошо известном в теории полугрупп основном неравенстве $|U(p+s,s)(x)| \geq |U(p+\delta+s,s)(\frac{x}{C})|$ и переходе от функции двух переменных $N(\alpha, u)$ к неубывающей функции одной переменной f, основанном на лемме 2.1.2.

   Замечание 2.1.

К сожалению, доказательство леммы, приведенное в работе, некорректно (хотя лемма верная). Если положить $N(\alpha, u) = |\alpha|u$ и взять компакты $K_i = [-i, i]^m$, то все функции $f_i \equiv 0$ и функция $f \equiv 0$ (функции f_i и функция $f \equiv 0$ из доказательства леммы). А для такой функции теорему нельзя применять. Необходимо поправить выбор компактов.

Замечание 2.2.

Естественный вопрос о количестве векторов, на которых реализуется асимптотически "плохое"поведение полугруппы – м.б. это множество второй категории, или бесконечномерное подпространство, или что-то вроде результата П. Бурдона о том, что у любого гиперциклического оператора в гильбертовом пространстве имеется всюду плотное линейное подпространство, состоящее из гиперциклических векторов, и т.п. – не рассматривается в работе.

Замечание 2.3. Понятие правильности сформулировано на с. 56, а начинает применяться на с. 53.

3. **Третья** глава диссертации посвящена задаче о свойствах пространства начальных условий X_0, которые при $t \to \infty$ уходят в нуль, аналогичной той, что рассматривалась в первой главе. Основной результат состоит в том, что, если "частично предельный"образ единичного шара содержится в компакте K (притягивающий компакт), то коразмерность пространства X_0 конечна. Базовым свойством для проверки этого факта является следующее наблюдение. Если $a \in K$ предельная точка последовательности $T^n(x)$, то $\lim_{n\to\infty} T^n(a) = a$.

   Здесь же рассматривается полугруппа $\{T^n\}$, где T - изометрия. Показано, что естественно, что в этом случае притягивающего компакта не существует.

   Замечание 3.1. Если задаться вопросом о том, какие множества могут быть притягивающим компактом, то "наименьшим"является замыкание предельного ("частично предельного") образа шара (сферы), если рассматривать начальные условия из шара (сферы). Тогда и формулировки теорем должны быть в терминах предельных ("частично предельных") образов шара (сферы). Кроме того, в этом случае есть инвариантность предельных образов, что серьезно упрощает картину.

   Замечание 3.2. В этой главе вводится понятие суперциклического вектора и оператора. На мой взгляд, это вряд ли оправдано. Понятие циклического вектора прочно вошло в обиход специалистов по теории операторов. Отличие суперциклического вектора от циклического вектора лишь в одном – участвует ли сам исходный вектор в линейной оболочке орбиты (цикличность) или участвуют только элементы орбиты, т.е. суперциклический вектор x_0 – это циклический вектор Tx_0. Поэтому введение нового понятия, на мой взгляд, не оправдано.

4. **В четвертой** главе диссертации снова рассматривается задача о конечной коразмерности пространства X_0. В качестве основного ограничения выступает величина

$$\sup_{x\in B_X} \underline{\lim}_{n\to\infty}\rho(T^n x, K) = \eta,$$

где K – некоторый компакт в X.

Показано, что для рефлексивного X условие $\eta < 1$ является достаточным для конечной коразмерности пространства X_0. Ключевым фактом в доказательстве этого утверждения является использование эргодической теоремы в рефлексивном пространстве. В общем случае достаточным условием для конечной коразмерности пространства X_0 является ограничение $\eta < 0,5$.

Стоит отметить, что для доказательства точности ограничения $\eta < 0,5$ в работе построен довольно тонкий пример – всюду плотная обмотка тора. Этот контрпример является отрицательным ответом на один из вопросов, поставленных в книге

E. Yu. Emel'yanov, "Non-spectral asymtotic analysis of one-parameter operator semigroups". Basel, Birkhäuser Verlag (Oper. Theory: Advances and Appl.; V. 173).

Замечание 4.1. Не вполне естественной выглядит ссылка на эргодическую теорему (книга Ю.И. Любича, изданная в Харьковском университет в 1985). Было бы понятно, если бы эта теорема впервые появилась в этой книге. Но эта теорема, которая считается классической, уходит корнями к Купману и фон Нейману (гильбертов случай, 1932 год) и Лорчу (общий случай 1939 год). Поэтому ссылку на книгу, которая практически недоступна, можно заменить ссылкой на книгу

Ю. И. Любич, "Линейный функциональный анализ". Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1988, том 19, 5 – 305

(отсутствует в списке литературы), либо на более современную.

Замечание 4.2.

Вызывает вопросы комментарий к определению 2 на стр. 96. Утверждается, что если медленных векторов много (в терминологии главы 4), то существует число $c > 0$ такое, что $\forall x$ выполнено неравенство

$$|T^n x| \geq c|x|. \tag{1}$$

Вообще говоря, это неверно.

Если взять прямую сумму двух бесконечномерных пространств $Y \bigoplus Z$ и определить оператор $T : Y \bigoplus Z \to Y \bigoplus Z$ равенством $T : (y, z) = (0, z)$, то подпространство $0 \bigoplus Z$ является собственным и, следовательно, 0 – медленным. Поскольку Z бесконечномерное, то у оператора много медленных векторов (в терминологии главы 4), но неравенство (1) для векторов $(y, 0)$ не выполняется.

Замечание 4.3.

Очень странная структура доказательства теоремы 4.3. В доказательстве используются леммы 4.3.1 и 4.3.2, которые даже не сформулированы до начала доказательства этой теоремы. Ровно такая же история и с теоремой 5.1. Утверждение теоремы используется в доказательстве теоремы 4.3, а сама теорема 5.1 появляется только в следующей главе.

Замечание 4.4.

На странице 110 индексы у операторов "пропали".

Замечание 4.5. Сама формулировка заголовка 4.4 выглядит странно, так как основное содержание – построение контрпримера, показывающего точность теоремы 4.3. И, самое главное, совсем невнятно написано, что происходит когда $\liminf = \frac{1}{2}$. В тексте (и даже заголовке 4.4) утверждается, что в случае $\liminf \leq \frac{1}{2}$ асимптотической конечномерности нет (это предложение можно понимать совершенно по-разному – т.к. в формулировки входит компакт K, то вариантов вложить смысл в заголовок 4.4 масса и самых разнообразных). А пример, который строится, показывает, что найдутся пространство и оператор такие, что $\liminf > \frac{1}{2}$ и асимптотической конечномерности нет – это утверждается и в первом абзаце 4.4.

Замечание 4.6. Снова не рассматривается вопрос о структуре компакта K.

5. **Пятая глава** диссертации посвящена доказательству существования собственного подпространства у изометрического оператора. Ключевым фактом в доказательстве этого утверждения является использование комплексификации вещественного банахова пространства и построения спектрального проектора.

Замечание 5.1.

Неряшливо написано следствие к теореме 5.1 на стр. 119. Там пропущено ограничение: $m > 1$. Для $m = 1$ в R^2 оператор поворота на угол α, несоизмеримый с π, не имеет собственных подпространств, что противоречит содержанию следствия.

Во второй части работы – глава 6 – рассмотрены некоторые вопросы геометрии в нормированных и иных пространствах. В параграфе 6.1 обсуждаются два понятия – нормальности и строгой нормальности конуса в нормированном пространстве – и строится пример, показывающий, что эти понятия не являются эквивалентными. В параграфе 6.2 рассматриваются конусы в весьма экзотическом пространстве финитных последовательностей, а параграф 6.3 посвящен некоторому обобщению леммы А.В. Арутюнова о том, что "верхний"предел пространств конечной коразмерности содержит подпространство конечной коразмерности, на топологические векторные пространства.

Если содержание параграфа 6.1 с некоторыми оговорками можно считать связанным с основной темой работы, то, на мой взгляд, содержание параграфов 6.2 и 6.3 таковым не является.

Диссертация написана довольно грамотным языком. Правда, иногда проскальзывает "игривость и вольность"в изложении см., например, с. 129, обычно присутствующая в лекции и совсем необязательная в научной работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 статьях – 8 работ связаны с главами 1-5, а последние 3 работы относятся к главе 6.

О правильности, значимости и новизне результатов я уже говорил при разборе содержания.

В автореферате (последний абзац с. 23) и собственно диссертации (параграф 4.4) есть одно существенное отличие, связанное с замечанием 4.5, указанным выше.

Можно ли эту работу рассматривать в качестве докторской диссертации?

Основной критерий докторской – либо создано новое направление исследований, либо решена крупная научная проблема.

Говорить о том, что создано новое направление, не приходится. В работе нет нового подхода, который бы мог рассматриваться как база для создания теории или для серьезного продвижения для решения "старой"задачи.

Вряд ли какое-то из отмеченных выше достижений можно считать решением крупной математической проблемы. Действительно, найти новую идею для доказательства теоремы Ролевича – это приятно, но не более того. Построить контрпример для решения задачи из книги Э.Ю. Емельянова, при всем моем уважении и к Э.Ю. Емельянову и к задачам, которые рассматривались в монографии, тоже важно, но это – не решить проблему базиса в сепарабельном банаховом пространстве или построить пример оператора в гильбертовом пространстве, у которого все отличные от нуля векторы гиперциклические.

То же самое можно сказать и про контрпримеры из второй части.

Кроме того, когда рассматриваются абстрактные задачи, всегда возникает вопрос: для каких конкретных "рабочих"операторов (например, операторов Теплица, которые представляют собой один из важнейших и глубоко изученных классов операторов, однако их динамические свойства понятны далеко не полностью и т.п.) полученные в диссертации результаты дают что-то новое? В работе нет таких примеров.

И последнее. Фактически диссертация состоит из двух практически не связанных частей (главы 1–5 и глава 6). В докторской диссертации, как, впрочем, и кандидатской, компиляция не приветствуется.

В заключение можно, наверное, сказать и про оформление. Есть несколько мест, где формулы плывут, а список литературы оформлен странно – ФИО может превращаться в ИОФ, выходные данные тоже могут выглядеть по-разному. Хотя для диссертаций есть требования к оформлению списка литературы.

Заключение. На основании вышеизложенного считаю, что диссертационная работа "Асимптотические свойства операторных полугрупп и подпространств банахова пространства"по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ – не удовлетворяет основным требованиям, предъявляемым ВАК РФ к докторским диссертациям, в частности, п. 9 – 10 Положения о порядке присуждения ученых степеней, а ее автору, К.В. Сторожуку, не может быть присуждена ученая степень доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доктор физико-математических наук,
профессор

Е.И. Бережной

Евгений Иванович Бережной
Математический факультет
Ярославский Госуниверситет им. П.Г. Демидова
заведующий кафедрой дифференциальных уравнений
150 000 Ярославль
ул. Советская, 14
E-mail: ber@uniyar.ac.ru
тлф 8915

20.09.2021