

ОТЗЫВ
официального оппонента
на диссертацию Кузнецова Михаила Владимировича
"Субриманов оператор диффузии и
геометрический смысл диагональной асимптотики его интегрального ядра",
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.01 –
"Вещественный, комплексный и функциональный анализ"

Обобщенные (эллиптические) лапласианы и соответствующие им (параболические) операторы диффузии/теплопроводности на римановых многообразиях играют важную роль в современных теории дифференциальных уравнений, римановой геометрии и естествознании. В частности, начиная с пионерской работы С. Минакшисундарамы и А. Плейеля (1949), известно, что оператор Лапласа-Бельтрами Δ_M , ассоциированный с гладким римановым многообразием M , содержит информацию об инвариантах этого многообразия, таких, например, как размерность и тензор кривизны. Оказалось, что для ее восстановления можно использовать асимптотику по временной переменной $t \rightarrow +0$ фундаментального решения оператора диффузии $\partial_t + \Delta_M$, ассоциированного с лапласианом Δ_M .

Получение аналогичных результатов для субримановых многообразий существенно технически осложнено отсутствием свойства эллиптичности у субримановых лапласианов. К счастью, известное условие Хёрмандера на гладкие векторные поля дает возможность сохранить свойство гипоеллиптичности для субримановых лапласианов, что, по-видимому, является ключевым для исследований по данной тематике.

Диссертация Кузнецова Михаила Владимировича как раз и посвящена исследованию диагональной асимптотики интегрального ядра субриманова оператора диффузии в достаточно простых, но интересных ситуациях, когда в качестве субриманова многообразия выступают нильпотентные группы Ли и, в частности, группы Гурса. Актуальность данной тематики не подлежит сомнению ввиду вышеизложенного. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, даются небольшая историческая справка и достаточно сжатое изложение современного состояния изучаемых проблем, обозначается класс решаемых задач и приводится краткий обзор содержания работы.

В первой главе диссертации дается минимальный набор определений, необходимых для чтения работы, приводятся некоторые предварительные сведения из теории субримановых многообразий и описывается метод продолжения

применительно к субримановому оператору диффузии на группах Гурса. Кроме того, в этой главе приводится и один из основных результатов диссертации (Теорема 1.2.1), утверждающий об отсутствии нетривиальных симметрий для уравнения теплопроводности в n -мерной группе Гурса при $n \geq 4$. Хотя автор скромно называет это утверждение во введении "отрицательным результатом", оно интересно и само по себе и, кроме того, дает мотивацию для дальнейших исследований, проведенных в автором в диссертации.

Вторая глава диссертации посвящена вопросам усовершенствования методов получения диагональной асимптотики ядра теплопроводности в различных частных ситуациях. В частности, используя метод орбит для нильпотентных групп Ли, обобщенное преобразование Фурье и конструкцию подалгебры М. Вернь, автор выводит общую формулу для интегрального ядра субриманова оператора диффузии в случае связных односвязных нильпотентных групп Ли с мерой Хаара и левоинвариантной субримановой метрикой (Теорема 2.2.3). Кроме того, в этой главе обобщен один результат Д. Барилари (Теорема 2.3.2) для случая асимптотики субримановых ядер теплопроводности в случае трехмерных контактных многообразий; более точно, в случае эквирегулярного субриманова многообразия, нильпотентная аппроксимация которого есть группа Гурса. В данной главе также обсуждается геометрический смысл коэффициентов диагональной асимптотики по $t \rightarrow 0$ субримановых ядер теплопроводности. В частности, один из членов асимптотики оказался равен (с точностью до постоянного множителя) инварианте, играющей роль кривизны на субримановом многообразии, и введенной ранее А.А. Аграчёвым.

Наконец, третья глава завершает диссертацию в некотором классическом стиле: через так называемый приведенный субриманов лапласиан, используя результаты У. Боскаина, Ж.-П. Готье и Ф. Росси (2014), автору удастся связать ядра теплопроводности для группы Энгеля со специальными функциями Хойна. Говоря классическом, я имею в виду, что было бы наивно надеяться выразить фундаментальные решения или параметриксы общих дифференциальных операторов через элементарные функции, однако, например, фундаментальное решение оператора Гельмгольца выражается через функции Ханкеля. То же самое касается и ядер теплопроводности субримановых лапласианов: привлечение специальных функций дает надежду на конструктивное описание искомым асимптотик.

Характеризуя диссертацию Кузнецова М. В., важно отметить, что классическая теория параболических операторов на римановых многообразиях существенно основана на свойстве сильной эллиптичности его старшей дифференциальной части. В частности, это свойство дает возможность конструктивно строить фундаментальные решения (интегральные ядра, в терминологии дис-

сертации) и почти автоматически получать информацию об (диагональной) асимптотике этих ядер при $t \rightarrow +0$ в терминах размерности многообразия. Хотя аналоги этих свойств в теории субримановых многообразий несомненно имеются, они далеко не так близки к классическим и просты в использовании. Например, как отмечено выше, субримановы лапласианы могут не обладать свойством эллиптичности, что существенно усложняет рассуждения в техническом плане. Поэтому автору диссертации пришлось применить изрядную долю изобретательности и разнообразные технические ухищрения, чтобы доказать основные результаты своей диссертационной работы, что говорит о нем, как о состоявшемся молодом математике-исследователе.

В целом, работа написана грамотно, текст хорошо организован и структурирован. В качестве небольших недочетов отмечу следующее:

1) излишнюю, с моей точки зрения, сжатость изложения. Как кажется, в первой главе автор мог бы более подробно остановиться на базовых определениях субримановой геометрии и дать более обширную историческую справку об исследованиях в данной области;

2) частично оправданную спецификой исследований громоздкость формулировок отдельных утверждений (например, формулировки теорем 2.2.3 и 2.3.2 занимают по странице текста каждая).

Диссертация носит теоретический характер, а ее результаты могут быть использованы в научной и преподавательской деятельности специалистами по анализу, геометрии и дифференциальным уравнениям.

Научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, хорошо обоснованы и базируются на современной теории римановых и субримановых многообразий. Они прекрасно согласуются с классическими и современными результатами в области исследования.

Результаты диссертации являются новыми и снабжены строгими математическими доказательствами.

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в трех единичных работах, опубликованных в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, и известны специалистам.

В целом, полученные автором научные результаты позволяют квалифицировать диссертационную работу как имеющую существенное значение в теории субримановых многообразий. Вышеуказанные немногочисленные недочеты не влияют на понимание сути результатов и качество работы.

Таким образом, диссертация Кузнецова Михаила Владимировича "Субриманов оператор диффузии и геометрический смысл диагональной асимптотики

его интегрального ядра" является законченным исследованием, написана самостоятельно, соответствует п. п. 9–11 "Положения о порядке присуждения ученых степеней" и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, автореферат правильно отражает ее содержание, а ее автор, Кузнецов М.В., заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — "Вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Официальный оппонент

доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01 -

"Вещественный, комплексный и функциональный анализ", профессор

660041, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79,

тел. (391) 244-86-25, e-mail: ashlapunov@sfu-kras.ru,

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Сибирский федеральный университет",

институт математики и фундаментальной информатики,

кафедра теории функций, профессор А. А. Шлапунов

18 мая 2021 г.