

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
(ПОМИ РАН)

191023 Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27
тел. (812) 312-40-58, факс (812) 310-53-77
e-mail: admin@pdmi.ras.ru

ИНН 7825351570 КПП 784101001

«УТВЕРЖДАЮ»

17.05.2021 № _____

На _____

от _____

И.о. директора Федерального
государственного бюджетного
учреждения науки Санкт-
Петербургского отделения
Математического института им.
В. А. Стеклова Российской
академии наук

член-корр. РАН

М. А. Всемиров

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертационную работу Кузнецова Михаила Владимировича
«Субриманов оператор диффузии и геометрический смысл
асимптотики его интегрального ядра»,
представленную к защите на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Диссертационная работа М.В. Кузнецова посвящена в основном следующему вопросу. Рассмотрим ядро теплопроводности $p(t,x,y)$ на n -мерном субримановом многообразии, нильпотентная аппроксимация которого есть (n -мерная) группа Гурса с «горизонтальным распределением», заданным двумя векторными полями X_1, X_2 , соответствующим сублапласиану $\Delta := X_1^2 + X_2^2$. Необходимо выписать

коэффициенты в диагональной асимптотике $p(t, x, x)$ при малых временах t , а именно,

$$p(t, x, x) = t^{-Q/2} (a_0 + a_1 t + O(t^2)),$$

где Q -- хаусдорфова размерность группы. При этом наибольший интерес представляет собой коэффициент a_0 при втором члене асимптотики (в случае риманова многообразия этот коэффициент имеет смысл кривизны). Строго говоря, в работе рассмотрен даже несколько более общий случай, но конструктивные вычисления проводятся именно для групп Гурса. Эта постановка задачи уже содержит в себе большое количество интересных геометрий (в частности, и ранее исследованный случай трехмерных контактных многообразий, который качественно проще рассмотренного в работе случая произвольного n).

Описанная задача является весьма актуальной и привлекает внимание многих исследователей на протяжении как минимум последних 40 лет (а вообще говоря, восходит еще к работам Хермандера). Помимо того, что такие вопросы важны собственно для субримановой геометрии, у них еще есть и очевидная связь с тонкими вопросами интегральной геометрии, как очень хорошо показано во введении к рецензируемой работе (за что стоит отдельно поблагодарить ее автора). В то же время, как и многие другие вопросы субримановой геометрии, эти задачи содержат большие трудности, в особенности для случая групп шага 2 и больше (для групп Гурса начиная с $n=4$). О таких группах, в частности о группе Энгеля, являющейся 4-мерной группой Гурса, имеется множество актуальных и до сих пор открытых вопросов, среди которых, например, вопрос о регулярности аномальных геодезических, которые отсутствуют в группах шага 1 (например, в классической группе Гейзенберга, что соответствует $n=3$). Интересно, что наличие аномальных геодезических, по-видимому, является одной из причин технических сложностей и в описанной задаче. Поэтому большая часть известных результатов о ядре теплопроводности в субримановых пространствах относится именно к группе Гейзенберга, либо для очень частных «почти римановых» примеров (кроме того, в принципе описанная асимптотика известна, но без конструктивного способа подсчета коэффициентов). В данной работе поставленная задача решена конструктивно для произвольных групп Гурса (т.е. во введенной терминологии для произвольной размерности n). Для решения этой задачи автору понадобилось существенно развить технику представления ядер теплопроводности для сублапласиана, основанную на некоммутативном преобразовании Фурье, и преодолеть значительные технические трудности, что уже само по себе безусловно достойно присуждения степени кандидата физико-математических наук. О принципиальных сложностях на этом пути говорит и доказанный автором любопытный результат о невозможности понижения порядка уравнения теплопроводности в группах Гурса размерности $n > 3$ (т.е. за исключением случая группы Гейзенберга, в которой явный вид ядра теплопроводности известен). Наконец, автором получено явное выражение для «приведенного» ядра теплопроводности (образа ядра теплопроводности при обобщенном преобразовании Фурье по пространственным координатам) на группе Энгеля ($n=4$) в терминах специальных функций — так называемых триконфлюэтных функций Хойна (решений параметрического ОДУ, называемого уравнением Хойна). Хотя этот результат выглядит скорее техническим, он может быть безусловно полезен в том числе для получения асимптотик.

Диссертация написана современным математическим языком. Однако стиль изложения все же оставляет желать лучшего, и разобраться в 84-страничном тексте читателю непросто. Часто приходится догадываться о том, что имеется в виду или долго искать по тексту нужные обозначения. Например, что такое ядро теплопроводности в основных результатах главы 2? Обычно это функция от трех переменных – времени и двух пространственных

$$p(t,x,y) = e^{\Delta_x \Delta_y}$$

И такое обозначение в диссертации используется, но в то же время, например, в теореме 2.2.3 и следствии 2.3.1 написано $p(t,x)$ (точнее, вместо x пишется g — элемент группы).

Другое замечание — почему бы не показать, как из следствия 2.3.1 вытекает известная формула для ядра теплопроводности в группе Гейзенберга ($n=3$)? Если формально подставлять $n=3$, то получается странное выражение с суммами от 1 до 0 (а это стоило бы проверить).

Далее, в главе 3 находится выражение для «приведенного» ядра теплопроводности при $n=4$ (группа Энгеля). Но это не ядро теплопроводности, а его образ Фурье по пространственной переменной. Хотелось бы попытаться выразить само ядро и сравнить его со следствием 2.3.1.

Имеются в диссертации также опечатки, перечисление которых смысла не имеет.

Несмотря на эти замечания, оценка диссертации в целом остается благоприятной. Автором получены оригинальные результаты, имеющие теоретическую ценность и вносящие вклад в развитие теории уравнений в частных производных и математического анализа. Тема диссертации актуальна, а положения и выводы, содержащиеся в ней, являются новыми и полностью обоснованными. М.В. Кузнецов проявил высокий уровень владения сложной техникой современного анализа, уравнений в частных производных и спектральной теории, а также самостоятельность исследователя.

Результаты диссертации опубликованы в 3 статьях в журналах, включенных в перечень ведущих рецензируемых научных изданий ВАК. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

С диссертацией М.В. Кузнецова рекомендуется ознакомиться в Математическом Институте им. В.А. Стеклова РАН, Московском, Санкт-Петербургском и Новосибирском государственных университетах.

Диссертационная работа «Субриманов оператор диффузии и геометрический смысл асимптотики его интегрального ядра» является завершенным научным исследованием и удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям по физико-математическим наукам, а её автор Кузнецов Михаил Владимирович безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании Лаборатории математической физики Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук 13 мая 2021 г.

Зав. Лабораторией математической физики,
доктор физ.-мат. наук, профессор

Г.А. Серегин