О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию **Кузнецова Михаила Владимировича**

«Субриманов оператор диффузии и геометрический смысл диагональной асимптотики его интегрального ядра»,

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена изучению ядра аналога уравнения теплопроводности на субримановых многообразиях. В случае римановых многообразий в правой части уравнения теплопроводности стоит оператор Бельтрами-Лапласа. Основное отличие субримановых многообразий от римановых заключается в том, что геодезические должны касаться некоторого заданного (неинволютивного) распределения в касательном пространстве многообразия (называемого горизонтальным). Для уравнения диффузии это означает, что частицам разрешено распространяться только по траекториям, касательным к горизонтальному распределению, а оператор Бельтрами-Лапласа в правой части уравнения теплопроводности заменяется на его субриманов аналог – сублапласиан. Субриманова геометрия имеет огромное число приложений, поэтому ее изучением в последние два десятилетия занимается множество математиков по всему миру. В частности, большой интерес вызывает структура ядер уравнения теплопроводности с сублапласианом в правой части. Поэтому актуальность проведенного в диссертации исследования не вызывает сомнений.

Наиболее важный класс субримановых многообразий – это многообразия Карно-Каратеодори, которые по теореме Громова-Митчела являются метрическими касательными пространствами к субримановым многообразиям в точках общего положения. Структура ядра теплопроводности исследуется в диссертации в первую очередь именно на этих многообразиях. Так, в **первой главе** получена удобная редукция такого уравнения на группе Гурса. В этой главе с помощью (классического) преобразования Фурье уравнение теплопроводности на этой группе сведено к семейству линейных уравнений вида $u_t = u_{xx} + Q(x)u$, где $Q(x)$ – некоторый многочлен. Это семейство далее исследовано на наличие возможных групп симметрий с помощью техники дифференциальных продолжений действия группы на пространства струй. Основной результат первой главы диссертации (теорема 1.2.1) заключается в том, что такое уравнение на группе Гурса нетривиальных симметрий не имеет, если $\deg Q > 2$ (т.е. группа отлична от простейшей группы Гейзенберга).

Далее разумно сказать про **третью главу**, которая является естественным продолжением первой. В ней к уравнению $u_t = u_{xx} + Q(x)u$ с $\deg Q = 4$ (этот случай соответствует группам Энгеля и Картана) применяется (классическое) преобразование Фурье, но уже по временной координате t. В результате удается получить явный вид решения в терминах функции Хойна.

Наиболее интересные результаты получены во **второй главе**. В ней проведен анализ ядра уравнения теплопроводности на произвольном многообразии Карно-Каратеодори за счет обобщенного преобразования Фурье на группах Карно. Здесь стоит выделить два ключевых результата. Во-первых, получена точная формула (29) для ядра теплопроводности (теорема 2.2.3). Формула очень сложная и включает в себя интегрирование по пространству орбит коприсоединенного представления (полный анализ проделан автором диссертации), меру Хаара и (неизвестное) интегральное ядро преобразования Фурье от сублапласиана. Тем не менее, с ее помощью автору диссертации удалось получить уже упрощенный вид для ядра на группах Гурса (следствие 2.3.1), так как (вычисленная в диссертации) структура орбит коприсоединенного представления для этой группы сильно упрощается по сравнению с общим случаем. Более того, во второй главе получена асимптотика по малому параметру анизотропного растяжения ядра уравнения теплопроводности для произвольного субриманова многообразия при некотором предположении о структуре горизонтального распределения (теорема 2.3.1).

Таким образом, автором диссертации проделана большая кропотливая и весьма технически сложная работа. Стоит отметить широту используемых автором методов. Перечислю некоторые из них: методы алгебр и групп Ли, уравнений в частных производных, метод орбит Кирилова, обобщенное преобразование Фурье, теория Ли групп симметрий дифференциальных уравнений. Математическая эрудированность автора очень высока.

О недостатках диссертации. В математическом плане недостатков работа практически не имеет. Однако изложение, с моей точки зрения, не идеально. Вот список некоторых замечаний (по убыванию важности):

- Упомянутая теорема 2.3.1 на странице 52 сформулирована очень неудачно. Во-первых, условия теоремы почему-то отсутствуют в самом тексте теоремы, но даны в абзаце непосредственно перед ней. Во-вторых, в теореме использованы не определенные ранее символы Θ_j, а вместо их определения написано, что «величины Θ_j определены в доказательстве» (через 3 страницы). При том, что функции Θ_j имеют весьма прозрачный инвариантный смысл, данный далее в (57), их стоило определить в самом тексте теоремы. В результате, так сформулированной теоремой почти невозможно пользоваться. При этом сам результат теоремы (если в нем разобраться) является одним из наиболее удобных для использования результатов диссертации.

- На странице 50 используется анизотропное растяжение. Однако, вообще говоря, его определение зависит от выбора привилегированных координат, поэтому следовало бы дать пояснение, почему полученный в теореме 2.3.1 результат не зависит от их выбора. Это действительно так, но разобраться в этом затруднительно из-за упомянутых сложностей с формулировкой.

- В формулировке следствия 2.3.1 на странице 64 использовано обозначение P_j, точное определение которого дано в очень скрытом виде в формуле (69). Правда, автор уже на следующей странице 65 повторяет определение P_j, но такой порядок изложения и скрытое определение сильно затрудняют понимание и усложняют возможность применения результата.

- В параграфе 1.2 все вычисления проводятся в пространстве 2-струй, и дифференциальные продолжения действия группы построены именно для пространства 2-струй. Однако, на странице 30 после некоторой замены автор переходит к формуле (16), в которой, фактически, утверждается равенство 2-струи и 3-струи, что невозможно, так как они лежат в разных пространствах. Мне кажется, следовало в этом месте аккуратнее пояснить переход от 2-струй к 3-струям.

- В определении 1.1.6 на странице 22 использован очень неудачный термин: «координаты $\bar{x}$ в окрестности точки $q \in M$ называются *адаптированными к флагу* F, если» выполняются некоторые условия. На самом же деле, эти условия на координаты должны выполняться только в одной точке q, и принципиально не могут быть выполнены в остальных точках из окрестности (из-за неиволютивности распределения). Поэтому правильно было бы такие координаты называть «адаптированными к точке q», а не в ее окрестности. Но это не вина автора – этот неудачный термин, к сожалению, часто встречается в литературе.

Как следует из вышесказанного, замечания относятся исключительно к изложению и нисколько не умаляют математической ценности диссертации. Работа проделана большая, технически очень сложная и трудоемкая, а результаты весьма интересны.

Таким образом я считаю, что диссертация Кузнецова Михаила Владимировича на тему «Субриманов оператор диффузии и геометрический смысл диагональной асимптотики его интегрального ядра» является завершенной, самостоятельной научно-квалификационной работой, содержащей исследование актуальной задачи о структуре ядер уравнений теплопроводности на субримановых многообразиях, а ее автор Кузнецов Михаил Владимирович заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

31.05.2021 д.ф.-м.н. Локуциевский Л.В.