Отзыв официального оппонента
о диссертации Богдановой Рады Александровны
«Аналитические методы исследования
некоторых феноменологически симметричных
двумерных и трехмерных геометрий»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация Богдановой Р. А. «Аналитические методы исследования некоторых феноменологически симметричных двумерных и трехмерных геометрий» посвящена задачам, связанным с классификацией феноменологически симметричных двумерных и трехмерных геометрий. Специальное исследование феноменологической симметрии начал Ю.И. Кулаков в рамках предложенной им теории физических структур, затем ряд существенных результатов в этом направлении был получен его учеником Г.Г. Михайличенко, физиком Ю.С. Владимировым и некоторыми другими исследователями. Суть теории кратко в следующем. На гладком многообразии M размерности sn задается функция двух переменных f со значениями в R^s, которая называется s-метрикой. Всякому упорядоченному набору n+2 точек из M ставится в соответствие совокупность (n+2)(n+1)/2 значений s-метрики для всевозможных упорядоченных пар из этого набора (отображение F). Если эти значения связаны некоторым тождественным соотношением Ф=0, то говорят, что на M задана феноменологически симметричная геометрия. Г.Г. Михайличенко доказал, что существование феноменологически симметричной геометрии эквивалентно наличию группы преобразований подходящей размерности для соответствующей s-метрики. Он же классифицировал феноменологически симметричные двумерные геометрии, В.Х. Лев и В.А. Кыров классифицировали трехмерные геометрии.

В своей диссертации Богданова Р. А. находит группы движений некоторых из этих геометрий размерностей 2 и 3. Эта задача необходимо дополняет феноменологическую геометрию и связанную с ней теорию физических структур, поэтому является актуальной.

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Во введении представлена история тематики, обоснована актуальность рассматриваемых задач, приведены сведения о публикациях и апробации. Первая глава носит вводный характер и содержит необходимые для дальнейшего сведения и определения.

Во второй главе излагается способ решения функциональных уравнений инвариантности метрики. Затем этот метод применяется для нахождения групп движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и обощенной симплициальной плоскостей (теоремы 2.3.1 , 2.4.1, 2.4.2, 2.5.1). Здесь же доказано (теоремы 2.6.1 - 2.6.4), что в перечисленных геометриях каждый невырожденный двухточечный инвариант совпадает с метрической функцией f (с точностью до гладкого преобразования $f \to \varphi(f)$) .

В третьей главе рассматриваются некоторые феноменологически симметричные трехмерные геометрии, для которых s=1, n=3. Найден базис алгебры Ли групп движений симплициальных и гельмгольцевых трехмерных геометрий (теорема 3.2.1), группы движений симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой геометрий (теорема 3.3.1), гельмгольцевой и симплициальной III типа (теорема 3.4.1), симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой (теорема 3.5.1). Метод доказательства во всех случаях следующий: для экспоненциального отображения (действие одномерной подгруппы) вычисляются значения базисных операторов алгебры Ли, а затем находится их композиция.

В четвертой главе автор находит все (их оказалось две) двумерные двуметрические феноменологически симметричные геометрии (случай s=2, n=1), исходя непосредственно из того факта, что в этом случае ранг отображения F равен четырем (теорема 4.2.1). В параграфе 4.3 устанавливается эквивалентность этой классификации классификации тех же геометрий, полученной ранее другим способом Г. Г. Михайличенко. В параграфе 4.4 найдены группы движений для соответствующих метрик указанных геометрий и доказано, что по этим группам метрики восстанавливаются (с точностью до допустимых преобразований) однозначно.

Таким образом, диссертация представляет собой цельное научное исследование, посвященное актуальной тематике, имеющей конкретные физические приложения. В своей содержательной части результаты диссертации являются новыми и представляют интерес для специалистов по геометрии, и для тех, кто занимается ее приложениями. Все основные утверждения диссертации сопровождаются ссылками на соответствующие публикации автора, из чего следует, что представленные в диссертации результаты получены автором самостоятельно.

Замечания.

1. Неясен смысл замечания 1.1.1 на стр. 30. Выше было сказано, что область определения функции f есть множество G_f. Причем тут «явная запись функции f»?
2. Обозначение $g_n(k_1, k_2, \ldots k_т)$ (стр. 30) – неудачное. Обычно в скобках указывается аргумент, а здесь аргумент i, а $(k_1, k_2, \ldots k_n)$ – название функции. Вообще, используемые в диссертации обозначения весьма тяжеловесны, а диаграммы на рис. 1.1, 2.2 и т.д. мало помогают пониманию.
3. Стр. 31, средний абзац: определение области G_F не очень корректно. Что делать с кортежами, упорядоченные пары которых не все лежат в G_f ? Может, следовало бы ввести понятие допустимых кортежей, тогда бы некоторые определения упростились.
4. Стр. 39 , снизу: «… по его явному виду…». Кого «его»? Может быть «ее»?

5. Стр. 12, 17 и далее в тексте: термин «Функциональное уравнение на множество движений» кажется нам неудачным. Обычно подобные соотношения называют условиями инвариантности.
6. Здесь же присутствует термин «параметр семейства», который в диссертации неоднократно встречается и далее, но нигде не поясняется, о каком семействе идет речь. По-видимому, имеется в виду семейство метрик. Но тогда возникает вопрос об эквивалентности метрик, отвечающим разным значениям параметра. Об этом нигде не сказано.
7. Здесь же: в условии инвариантности («функциональном уравнении на множество движений») (2.20) и в некоторых других аналогичных местах далее в правой части записаны явные выражение через декартовы координаты, а в левой присутствуют их символы (вместо $\lambda(x_i\ ,\ y_i\ )$ - $\lambda(i)$, и т.д.). Обычно в математических текстах в обеих частях равенства используют одинаковые обозначения.
8. На стр. 57 рассматривается « функциональное уравнение» (2.20), а после автор приходит к равенству (2.29) на стр. 61, которое названо тождеством. По-видимому, надо было отметить, что исходное равенство (2.20) также является тождеством относительно переменных x_i и y_i .
9. На стр. 62 уравнения движения записаны в виде (2.35) , причем входящие в (2.35) параметры связаны сложным соотношением (2.36). Но это соотношение легко разрешить, положив (для связной компоненты группы) $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$, тогда уравнения (2.36) примут вид $x'=\exp(-\gamma\varphi)(x\cos\varphi-y\sin\varphi)+c$, $y'=\exp(-\gamma\varphi)(x\sin\varphi+y\cos\varphi)+d$.
Тогда легко доказать, что композиция таких преобразований есть преобразование такого же вида – это доказательство автором опущено. Это замечание относится и к другим исследуемым далее метрикам.
10. На стр. 44 автор отмечает, что «Другие классификации еще не построены, так как не найдены новые более эффективные методы

решения подобных задач». В то же время в Заключении отмечается, что методы диссертации могут быть использованы для классификации геометрий с другими значениями s и n. В связи с этим сделаем замечание, которое носит рекомендательный характер и может быть использовано автором в дальнейшей работе.

Методы диссертации позволяют успешно находить и исследовать геометрии с конкретными и небольшими значениями параметров s и n. Для получения общей картины необходимо построить инвариантную теорию, как это обычно делается в геометрии, тогда каждый класс будет охарактеризован некоторым набором инвариантов (например, тензорных). Такого рода возможности имеются. Например, при $n=1$ метрическая функция представляет собой бинарную операцию вида $z=f(x, y)\equiv x\circ y$, где переменные есть s-мерные векторы. В силу требований, накладываемых на f, эта операция локально разрешима относительно обоих аргументов, то есть является локальной квазигруппой. Уравнение $\Phi(z_1, z_2, z_3)=0$, которое задает феноменологическую симметрию, можно записать в виде $z_3=\lambda(z_1, z_2)$, и тогда оно задает бинарную операцию на производной квазигруппе.

Геометрически уравнение $z=f(x, y)$ задает на прямом произведении $X\times Y$ три-ткань, образованную слоениями $x=const$, $y=const$, $z=f(x, y)=const$, а уравнение $z_3=\lambda(z_1, z_2)$ задает бинарную операцию на третьем слоении ткани, которая связана с другой известной бинарной операцией на этом же множестве, называемой сердцевиной. Таким образом, теория физических структур в рассматриваемой части непосредственно связана с теорией квазигрупп и теорией три-тканей, для которых имеются развитые инвариантные теории, содержащие классификационные теоремы. В частности, из уравнения $z_3=\lambda(z_1, z_2)$ просто получается, что на соответствующей три-ткани замыкаются так называемые конфигурации Рейдемейстера, что означает, что исходная бинарная операция (метрика) локально изотопна некоторой группе Ли, то есть получаемся из группы Ли $c=ab$ локальными диффеоморфизмами вида

$a \to \alpha(x)$, $b=\beta(y)$, $c=\gamma(z)$. Это обстоятельство может существенно упростить подход к классификации физических структур, поскольку в этой теории отношение эквивалентности более узкое: $a \to \alpha(x)$, $b=\alpha(y)$, $c=\gamma(z)$.

Замечания, как видно, имеют технический или методический характер, и поэтому не влияют на оценку результатов диссертации. Все полученные результаты достоверны, проверяемы и доказаны достаточно подробно. Автор глубоко вник в существо вопроса, достаточно подробно и в хорошем стиле изложил весьма непростые понятия.

Результаты и выводы, приведённые в диссертационной работе, носят теоретический характер. Теория, разработанная в диссертации, может быть применена в различных разделах дифференциальной геометрии (например, в теории тканей, теории гладких квазигрупп и их обобщений), а также в учебном процессе при чтении специальных и факультативных курсов аспирантам и студентам старших курсов - математикам, физикам, механикам.

Результаты диссертации опубликованы, в том числе и в источниках, рекомендуемых ВАК, и докладывались ее автором на конференциях и семинарах. Поэтому можно считать, что основные результаты работы были представлены научной общественности надлежащим образом. Автореферат адекватно отражает содержание диссертации.

Вывод: считаю, что диссертационная работа Богдановой Рады Александровны «Аналитические методы исследования некоторых феноменологически симметричных двумерных и трехмерных геометрий» соответствует специальности 01.01.04 – геометрия и топология, по которым она представлена к защите, а также требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения учёных степеней…», утверждённого постановлением Правительства РФ от 24.09.2013, № 842. Поэтому, принимая во внимание актуальность темы, новизну, научно-практическую значимость и достоверность полученных результатов, полноту их опубликования и апробации, считаю, что диссертационная работа «Аналитические методы исследования некоторых феноменологически симметричных двумерных и трехмерных геометрий» удовлетворяет требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, и рекомендую диссертационному совету Д 003. 015.03 присудить её автору Богдановой Раде Александровне учёную степень кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

Шелехов А.М.

Шелехов Александр Михайлович, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология, профессор

Почтовый адрес: 170 008 Тверь, ул. 15 лет Октября, д. 13

Тел. (рабочий): 8 499 264 2556

Электронная почта: math@mpgu.su

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский педагогический государственный университет»

Российская Федерация

Город Тверь, Тверская область

Двадцать шестого марта две тысячи двадцатого года

Я, Красавина Ольга Вячеславовна, нотариус Калининского нотариального округа Тверской области, свидетельствую подлинность подписи Шелехова Александра Михайловича.

Подпись сделана в моем присутствии.

Личность подписавшего документ установлена.