УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной деятельности Казанского
(Приволжского) федерального университета
доктор г.-м. наук
профессор Д.К. Нургалиев

"27" 03 2020 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации о диссертационной работе Богдановой Рады Александровны «Аналитические методы исследования некоторых феноменологически симметричных двумерных и трехмерных геометрий», представленной к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Исследования диссертационной работы относятся к направлению в геометрии, изучающему феноменологически симметричные геометрии. Феноменологически симметричная геометрия (ранга $n+2$) задается на многообразии $\mathfrak{M}$ размерности sn полиметрической функцией $f = (f^1, \ldots, f^s) : \mathfrak{S}_f \to \mathbb{R}^s$, областью определения которой является открытое всюду плотное подмножество $\mathfrak{S}_f \subset \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, а значения которой на парах элементов из наборов по $(n+2)$ элементов подчиняются некоторой функциональной зависимости, которая и отражает феноменологическую симметрию соответствующей геометрии. Феноменологическая симметрия влечет наличие локальной группы Ли преобразований размерности $sn(n+1)/2$, действующей на открытом плотном подмножестве многообразия $\mathfrak{M}$ и сохраняющей полиметрическую функцию. Одним из мотивов исследования многообразий, несущих феноменологически симметричные геометрии, является предполагаемая возможность их использования при описании некоторых физических структур.

Исследованию различных аспектов и классификации феноменологически симметричных геометрий посвящены работы Ю.И. Кулакова, Ю.С. Владимирова, Г.Г. Михайличенко, В.А. Кырова, В.Х. Лев. В этих работах, в частности, получены классификации феноменологически симметричных геометрий для случая многообразий малых размерностей и в некоторых случаях найдены соответствующие локальные группы преобразований. Следует отметить, что при увеличении размерности многообразия и числа компонент метрической функции исследование встречается с возрастающими техническими сложностями и требует разработки новых методов решения возникающих функциональных уравнений. Задача изучения, классификации и нахождения локальных групп преобразований феноменологически симметричных геометрий представляет несомненный научный интерес, и поэтому тема диссертационной работы Р.А. Богдановой является актуальной.

Диссертационная работа состоит из Введения, раздела, озаглавленного «Основные определения», четырех глав, Заключения, и списка литературы, содержащего 60 цитируемых работ и 16 работ автора. Объем работы 157 страниц.

Во Введении содержится исторический обзор публикаций, связанных с исследованиями диссертации, обоснована актуальность темы диссертационного исследования, выделены основные результаты, полученные в работе. Этот раздел содержит также краткое изложение содержания диссертации.

Первая глава содержит описание основных объектов и изложение некоторых результатов теории феноменологически симметричных геометрий, используемых в в дальнейших главах.

Глава 2 диссертации посвящена нахождению полных локальных групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий.

Параграфы 2.1 и 2.2 носят вводный характер. В §2.3-2.5 автором решаются функциональные уравнения для нахождения полных локальных групп движений для плоскости Гельмгольца (§2.3), предгельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей (§2.4) и симплициальной плоскости (§2.5) по их метрическим функциям. Уравнения групп преобразований, полученных в результате решения этих уравнений приведены соответственно в теоремах 2.3.1, 2.4.1, 2.4.2 и 2.5.1. В четырех теоремах параграфа 2.6 показано, что двухточечные инварианты групп преобразований, уравнения которых были получены в §§2.3-2.5, с точностью до гладкого преобразования совпадает с исходными метрическими функциями.

В главе 3 решаются задачи, аналогичные задачам второй главы для следующих феноменологически симметричных трехмерных геометрий (в соответствии с известной классификацией): симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой (§3.3), гельмгольцевой и симплициальной III типа (§3.4), симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой (§3.5). Найденные уравнения соответствующих метрическим функциям указанных геометрий приведены соответственно в теоремах 3.3.1, 3.4.1 и 3.5.1.

Четвертая глава посвящена классификации двумерных двуметрических ($n = 1$, $s = 2$) феноменологически симметричных геометрий и разработке соответствующего аналитического метода. В §4.1 сформулированы условия (теорема 4.1.1), при которых функция $f = (f^1, f^2) : \mathfrak{S}_f \to \mathbb{R}^2$ определяет феноменологически симметричную геометрию (ранга 3). В теореме 4.2.1 доказано, что существует только две функции (с точностью до обратимым преобразований) $f : \mathfrak{S}_f \to \mathbb{R}^2$, определяющие на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ феноменологически симметричную геометрию, и найдены выражения для этих функций. В §4.3 устанавливается совпадение классификации феноменологически симметричных геометрий ранга 3, полученной автором аналитическим методом, с классификацией, полученной Г.Г. Михайличенко групповым методом, в §4.4 устанавливаются связи между метрическими функциями и соответствующими группами преобразований.

В Заключении автором подведены итоги, проделанной в диссертации работы.

Все результаты диссертации, выносимые на защиту, строго обоснованы и являются новыми. Они прошли серьезную апробацию, докладывались на международных конференциях и семинарах в ведущих научных центрах. Основные положения диссертации опубликованы в 16 научных работах, в том числе в изданиях, рекомендованных ВАК России для публикации результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации. Теоретические положения, разработанные в диссертации, можно квалифицировать как решение новой задачи, имеющей значение для развития геометрии и топологии.

Полученные автором результаты и разработанные методы исследования найдут применение в дальнейших исследованиях геометрии и топологии дифференцируемых многообразий с различными структурами и локальных групп Ли преобразований. Они могут быть использованы при проведении научных исследований и чтении специальных курсов в Горно-Алтайском государственном университете, Казанском Федеральном университете, Новосибирском государственном университете, Томском государственном университете и других научных центрах.

Замечания:

1. Ссылка (3) стр. 41 требует, на наш взгляд, не только указания библиографических данных, но и номеров страниц, где соответствующая информация изложена. Кроме того, оформление ссылки (7) некорректно.

2. Хотелось бы увидеть в диссертации доказательство или ссылку на доказательство утверждения «*метрическая функция $f(i,j)$ может быть найдена решением функционального уравнения $f(x_i', y_i', x_j', y_j') = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$ как двухточечный инвариант группы движений (1.13)*», приведённого на стр. 43.

3. В выражении (2.28) допущена описка: в знаменателе аргумента функции arctg перед u^2 должен стоять коэффициент a. Кроме того, это выражение не совсем верно: выражение разности арктангенсов через арктангенс одного аргумента зависит от аргументов арктангенсов, разность которых находится

$$\operatorname{arctg}(x)-\operatorname{arctg}(y)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right), & \text{при } xy>-1;\\ \pi+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right), & \text{при } x>0,\ xy<-1;\\ -\pi+\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right), & \text{при } x<0,\ xy<-1.\end{cases}$$

Автор же использует, без аргументации, только первый вариант этой формулы.

4. На стр. 53 автор упоминает профессора Казанского государственного университета А.М. Широкова. По-видимому, автор имеет в виду Александра Петровича Широкова, а не А.М. Широкова.

5. В тексте диссертации также имеется ряд опечаток: на стр. 92, 96, 98, 101, 117.

6. Не совсем понятно, почему всюду на протяжении Главы 3 для нахождения уравнений групп движений (фактически, нахождения уравнений потока векторного поля) используется экспоненциальное отображение, в то время как для этого существует стандартный метод, основанный на решении уравнения Ли и описанный, например, в книге Л.В. Овсянникова, присутствующей в списке литературы под номером [48], а также в книгах Н.Х. Ибрагимова и многих других. В частности, тот факт, что группа преобразований, соответствующая векторному полю $\dfrac{\partial}{\partial x}$, есть группа параллельных переносов вдоль оси x, моментально следует из теоремы о выпрямлении векторного поля, и не требует дополнительного доказательства.

Указанные замечания, на наш взгляд, никоим образом не снижают общей значимости результатов, полученных в процессе диссертационного исследования.

Диссертация Богдановой Рады Александровны «Аналитические методы исследования некоторых феноменологически симметричных двумерных и трехмерных геометрий» удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней ВАК при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология.

Отзыв составлен заведующим кафедрой геометрии Казанского (Приволжского) федерального университета доктором физико-математических наук доцентом А.А. Поповым и профессором кафедры геометрии Казанского (Приволжского) федерального университета доктором физико-математических наук профессором В.В. Шурыгиным.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры геометрии Казанского (Приволжского) федерального университета 27 марта 2020 г., протокол № 8.

Зав. каф. геометрии КФУ
доктор физ.-мат. наук, доцент (А.А. Попов)

профессор каф. геометрии КФУ
доктор физ.-мат. наук (В.В. Шурыгин)