Отзыв на автореферат диссертации Богдановой Рады Александровны "Аналитические методы исследования некоторых феноменологически симметричных двумерных и трехмерных геометрий" на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

В определенном смысле можно сказать, что диссертация Богдановой Р.А. относится к области обобщенных метрических пространств максимальной подвижности. Последнее означает в случае одной обобщенной метрики — функции пары точек многобразия —, что локальная или глобальная группа Ли изоморфизмов, т.е. симметрий или движений, таких пространств размерности $n \geq 2$ имеет размерность $n(n+1)/2$.

Для уточнения начнем с классических примеров (псевдо)римановых пространств максимальной подвижности.

В римановом случае такими пространствами являются односвязные многобразия M^n_K постоянной секционной кривизны K— евклидовы пространства при $K = 0$, сферические пространства при $K > 0$ и пространства Лобачевского (гиперболические пространства) при $K < 0$. Максимальной связной группой движений $I(S^n)$ n-мерного сферического пространства S^n является группа $SO(n+1)$ со стабилизатором точки $SO(n)$, а евклидова n-мерного пространства $\mathbb{E}^n$— группа $I(\mathbb{E}^n)$ — полупрямое произведение групп $SO(n)$ и группы $(\mathbb{R}^n, +)$ со стабилизатором точки $SO(n)$. Как следствие, $S^n = SO(n+1)/SO(n)$, $\mathbb{E}^n = I(\mathbb{E}^n)/SO(n)$.

В псевдоримановом случае пространствами с нулевым тензором кривизны являются псевдоевклидовы пространства. Лоренцевы многообразия — псевдоримановы многообразия с сигнатурой $(-, +, \dots, +)$. К лоренцевым многообразиям максимальной подвижности относятся пространства-времена Минковского и де Ситтера и их прямые аналоги произвольной размерности $n \geq 2$. Интересно, что максимальной связной группой движений для n-мерных пространств Лобачевского L^n и аналогов пространств-времен де Ситтера Σ^n является одна и та же группа Ли $\mathrm{Lor}(n+1)$ — группа Лоренца при $n = 3$ и ее прямые аналоги для других размерностей. Но эти пространства имеют разные стабилизаторы: $SO(n)$ и $\mathrm{Lor}(n)$. Максимальная связная группа движений n-мерного аналога Mink^n пространства-времени Минковского Mink^4 — прямой аналог $P(n)$ группы Пуанкаре $P(4)$— полупрямое произведение аналога группы Лоренца соответствующей размерности и группы $(\mathbb{R}^n, +)$. При этом $L^n = \mathrm{Lor}(n+1)/SO(n)$, $\Sigma^n = \mathrm{Lor}(n+1)/\mathrm{Lor}(n)$, $\mathrm{Mink}^n = P(n)/\mathrm{Lor}(n)$.

Общий *групповой метод* поиска (псевдо)римановых многообразий максимальной подвижности состоит в следующем: для каждого n найти все пары (G, H) такие, что G — группа Ли размерности $n(n+1)/2$, H — ее замкнутая (компактная в римановом случае) подгруппа Ли размерности $n(n-1)/2$, не содержащая замкнутых нормальных подгрупп группы G положительной размерности, и все (псевдо)метрические тензоры g на $M^n = G/H$, инвариантные относительно стандартного левого действия группы Ли G на G/H. Это уточняет для данного случая Эрлангенскую программу Ф Клейна классификации различных геометрических пространств, когда задается группа преобразований пространства и исследуются инварианты действия этой группы: нужно задавать не только группу, но и какую-то ее подгруппу в качестве стабилизатора.

При классическом способе задания (псевдо)римановых многообразий задается гладкое многообразие M^n с некоторым набором систем координат и (псевдо)метрический тензор g на нем своими компонентами на этом атласе. Лишь после тридцатых годов прошлого века появилось понятие *внутренней метрики* ρ на связном римановом многообразии (M^n, g) как точной нижней границы длин соединяющих данные две точки длин кусочно гладких кривых; их длины вычисляются с помощью g. При этом ρ не зависит от выбора систем координат.

Заметим, что пространства M^n_K важны не только сами по себе, но с их помощью можно определить пространства А.Д. Александрова ограниченной сверху, снизу или с обеих сторон кривизны. В случае локально компактных полных метрических пространств, пространство Александрова кривизны $\geq K$ (соответственно, кривизны $\geq K_1$ и $\leq K_2$, где $K_1 \leq K_2$) можно определить как пространство с внутренней метрикой (M, ρ) такое, что локально каждая четверка точек в (M, ρ) изометрична некоторой четверке точек в M^3_k для некоторого числа $k \geq K$ (соответственно, $K_1 \leq k \leq K_2$). Определение пространства Александрова кривизны $\leq K$ при таком подходе несколько более сложно. Указанный подход упрощает традиционные методы исследования пространств Александрова. В частности, пользуясь им, Г. Перельман не только получил обобщение на пространства Александрова кривизны $\geq K$ теоремы Топоногова о сравнении углов для римановых многообразий с секционной кривизной $\geq K$, но использовал свои результаты о таких пространствах Александрова при доказательстве гипотезы Терстона о метризации для 3-многообразий.

Для каждого многообразия M^n_K и для всякого набора из $n+2$ его точек существует функциональное соотношение для $(n+2)^2$ расстояний в метрике ρ между парами точек из этого набора: определитель Кэли-Менгера при $K = 0$ и определители Л.М. Блюменталя для $K \neq 0$ равны нулю. Это функциональное соотношение — одна из реализаций абстрактного понятия *феноменологической симметрии в теории физических структур (ТФС) Ю.И. Кулакова.*

Унарная (бинарная) s-метрическая физическая структура — геометрия одного множества M (двух множеств M, N), метрическая функция f которой элементу из $M \times M$ ($M \times N$) сопоставляет $s \geq 1$ вещественных чисел, где $M = M^{sm}$, $N = N^{sn}$, $m, n \geq 1$, — гладкие многообразия, а f — гладкая функция. Функция f однозначно порождает гладкие функции

$$f^m : M \times M^m \to \mathbb{R}^{sm}, \quad \overline{f}^m : M^m \times M \to \mathbb{R}^{sm}, \quad F : M^{m+2} \to \mathbb{R}^{s(m+1)(m+2)/2}$$

для унарной структуры и гладкие функции

$$f^m : M \times N^m \to \mathbb{R}^{sm}, \quad f^n : M^n \times N \to \mathbb{R}^{sn}, \quad F : M^{n+1} \times N^{m+1} \to \mathbb{R}^{s(n+1)(m+1)}$$

для бинарной структуры. Предполагается, что в унарном случае для некоторых кортежей Y второго (первого) сомножителя функция $f^m(\cdot, Y)$ $(\overline{f}^m(Y, \cdot))$ имеет ранг sm; в бинарном случае для некоторых кортежей B второго (Y первого) сомножителя функция $f^m(\cdot,)$ $(f^n(Y, \cdot))$ имеет ранг sm (sn). Более точно, упомянутые функции (кортежи) определены (расположены) на открытых всюду плотных подмножествах соответствующих многообразий. Кроме того, *существует* гладкая функция $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^s$, определенная в некоторой открытой окрестности $\mathcal{F}$ образа отображения F, имеющая ранг s и такая, что $\Phi \circ F \equiv (0, \ldots, 0)$, что составляет содержание *принципа феноменологической симметрии*. При выполнении всех этих условий говорят, что функция f задает физическую структуру ранга $m + 2$ в унарном случае и ранга $(n + 1, m + 1)$ в бинарном случае.

Замечу, что *применяемые в этом отзыве термины "унарная" и "бинарная" имеют другой смысл в работах Г.Г. Михайличенко и кандидатской диссертации Р.А. Богдановой.*

Г.Г. Михайличенко доказал в 1968 г., что с точностью до эквивалентности и масштабного преобразования существуют бинарные однометрические физические структуры ранга $(n + 1, m + 1)$ только для следующих пар: $(m, n) = (1, 1)$, $(m, n) = (1, 2)$, $(m, n) = (1, 3)$, $m = n \geq 2$, при $m = n - 1 \geq 2$; причем существует ровно две структуры в предпоследних (диагональных) случаях и ровно одна структура во всех остальных. Для всех структур он нашел также уравнения, выражающие фуноменологическую симметрию, и группы движений. Нет полной классификации бинарных s-метрических физических структур при $s \geq 2$. Но для всех $s \geq 1$ он же доказал, что функция $f = (f^1, \ldots, f^s)$ задает на многообразиях M^{sm} и N^{sn} геометрию с групповой симметрией степени snm, т.е. с эффективным гладким действием локальной группы Ли движений размерности snm на произведении плотных открытых подмножеств в M и N, тогда и только тогда, когда она на тех же многообразиях задает физическую структуру ранга $(n + 1, m + 1)$.

Ю.С. Владимиров применил комплексифицированные бинарные однометрические диагональные физические структуры (частные случаи бинарных двуметрических структур) низжих рангов (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) для построения *бинарной геометрофизики* как части создания единой теории пространства-времени и физических взаимодействий. В этой теории "нейтрино соответствует отдельным элементам структуры ранга (3,3), массивные лептоны (электроны) строятся из пары элементов структуры ранга (4,4), барионы строятся из трех элементов структуры ранга (5,5) ... структуру ранга (3,3) можно считать ответственной за размерность и сигнатуру классического пространства-времени". Ю.С. Владимиров опубликовал по этой теме несколько книг. Назовем три: "Реляционная теория пространства-времени", 1998, "Геометрофизика", 2005, "Пространство-время: явные и скрытые размерности", 2010.

Г.Г. Михайличенко доказал в 1998 г. эквивалентность следующих трех утверждений: 1) функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задает на многообразии M^{sm} геометрию с групповой симметрией степени $sm(m+1)/2$, 2) f задает на M^{sm} унарную физическую структуру ранга $m+2$, 3) ранг отображения F равен $s(m+1)(m+2)/2-s$ на плотном открытом подмножестве его области определения.

Найдена полная классификация 1-метрических унарных физических структур рангов 3, 4, 5, другими словами, *феноменологически симметричных геометрий* размерностей 1, 2, 3. С точностью до эквивалентности и масштабного преобразования их в точности 1, 11 (одна из них с несколькими вариациями), 15 (одна из них с вариациями). Конкретный вид феноменологической симметрии найден для 1-мерной геометрии и всех двумерных геометрий, кроме трех гельмгольцевых. Полную классификацию трехмерных феноменологически симметричных геометрий ранга 5 построил В.Х. Лев в 1988 г. Явный вид феноменологической симметрии найден для всех трехмерных геометрий, кроме двух симплициальных и трех гельмгольцевых. Согласно предварительной, но не окончательной, классификации существует 12 (одна из них с вариациями) одинометрических унарных феноменологически симметричных геометрий размерности 4.

С точностью до эквивалентности, существует ровно две двуметрические феноменологические геометрии ранга 3 на двумерном многообразии. Для них найдены явное задание феноменологической симметрии и алгебры Ли движений.

Приведенные выше сведения о физических структурах, кроме данных о их применениях в физике, с использованием несколько иных терминов, обозначений и изложения, извлечены из книги профессора Г.Г. Михайличенко "Математические основы и результаты теории физических структур", 2016 г.

Нужно заметить, что в ТФС, за исключением классических геометрий, найдены как правило лишь алгебры Ли или локальные группы Ли движений физических структур. Не выяснена возможность их включения в группы Ли и реализации физических структур на однородных пространствах групп Ли по их замкнутым подгруппам.

В автореферате Р.А. Богдановой кратко описано содержание введения, заключения и первой главы и дано общее описание второй главы диссертации.

В пар. 2.1 и 2.2 приводятся сведения о гельмгольцевой, псевдогельгольмцевой, дуальногельмгольцевой плоскостях и симплициальной двумерной геометрии с соответствующими метрическими функциями (2.14), (2.12), (2.13) и (2.60) (в последнем случае при $m \neq n$) из полученной Г.Г. Михайличенко локальным групповым методом упомянутой ранее классификации одинометрических унарных физических структур размерности 2 и ранга 4.

В пар. 2.3 – 2.5 представлены разработанные диссертанткой аналитические методы решения функциональных уравнений для поиска группы движений указанных четырех геометрий, именно, уравнений (2.20), (2.37), (2.49) и (2.61).

Суть аналитических методов решения подобных функциональных уравнений состоит в последовательном дифференцировании по координатам входящих точек, получении некоторых вспомогательных систем алгебраических уравнений и установлении связей между параметрами группы. Во всех четырех случаях получаются некоторые группы аффинных преобразований со связью между их переменными коэффициентами.

В пар. 2.6 решается противоположная задача: ищутся полные двухточечные инварианты найденных аффинных групп и в теоремах 2.6.1, 2.6.2, 2.6.3 и 2.6.4 доказывается, что такими инвариантами могут быть только метрические функции упомянутых четырех геометрий.

В третьей главе диссертации находятся явные выражения локальных групп движений для частных случаев однометрических унарных феноменологически симметричных геометрий размерности 3 и ранга 5: трех гельмгольцевых и симплициальных типа I, II и III. Двухточечные метрические функции этих геометрий задаются формулами (3.13), (3.21) — (3.25).

Явный вид шести базисных операторов алгебр Ли групп движений для каждой из шести упомянутых геометрий указан в формулах (3.30) — (3.32) и (3.35) — (3.37). Основные результаты представлены теоремами 3.3.1, 3.4.1 и 3.5.1.

В теореме 3.3.1 доказано, что полной связной группой движений симплициальной типа II и псевдогельмгольцевой трехмерных геометрий с функциями (3.13) и (3.21) является группа Ли $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$, действующая в $\mathbb{R}^3$ по формулам (3.40) и (3.41).

В теореме 3.4.1 доказано, что полной связной группой движений гельмгольцевой и симплициальной типа III трехмерных геометрий с функциями (3.22) и (3.23) является группа Ли $SL_2(\mathbb{C})$, действующая на $\mathbb{R}^3$ по формулам (3.53) и (3.54).

В теореме 3.5.1 доказано, что полной связной группой движений симплициальной типа I и дуальногельмгольцевых трехмерных геометрий с функциями (3.24) и (3.25) является группа Ли $SL_2(\mathbb{D})$, действующая на $\mathbb{R}^3$ по формулам (3.63) и (3.64).

В доказательствах теорем 3.3.1, 3.4.1 и 3.5.1 для каждой из шести геометрий с помощью экспоненциального отображения были найдены однопараметрические подгруппы, порожденные шестью базисными операторами алгебры Ли группы движений, а затем их композицией была найдена группа Ли с этой алгеброй Ли и явные формулы для ее действия на $\mathbb{R}^3$.

В четвертой главе диссертации разработан аналитический метод классификации феноменологически симметричных геометрий и применен к классификации двуметрических двумерных геометрий (двуметрических унарных физических структур ранга 3). Для этих геометрий аналогично главе 3 найдены их группы движений и все их невырожденные двухточечные инварианты этих групп. Метод использует изучение строения и ранга функциональной матрицы отображения F, т.е. матрицы Якоби этого отображения, вычисленной относительно локальной системы координат на M^{m+2} (прямого произведения $m+2$ экземпляров многообразия M), полученной каноническим способом из локальной системы координат на гладком многообразии M размерности sm, а также получаемых из этой матрицы систем функционально-дифференциальных соотношений и дифференциальных уравнений.

В пар. 4.1 в аксиомах 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4 с использованием локальных систем координат и формул (4.1) — (4.4) дано определение (унарной) двуметрической феноменологически симметричной геометрии на двумерном многообразии M. Функциональная матрица отображения F, заданного формулой (4.3), имеет вид (4.6).

Основным результатом этого параграфа являются лемма 4.1.1 и теорема 4.1.1 о ранге отображения F в рассматриваемом случае. В лемме доказывается, что если метрическая функция f удовлетворяет аксиомам 4.1.1, 4.1.2 и 4.1.3, то ранг матрицы (4.6) не меньше 4. В теореме доказано, что если при соблюдения тех же аксиом ранг отображения F равен 4 на открытом и плотном подмножестве его области определения, то функция f задает на M двуметрическую феноменологически симметричную геометрию ранга 3, а система упомянутых четырех аксиом совместна.

В пар. 4.2 исследуется строение и ранг функциональной матрицы отображения F и ранг получаемых из нее системы функционально-дифференциальных соотношений вида (4.10) и системы дифференциальных уравнений (4.20). В лемме 4.2.1 доказано, что ранг системы (4.10) равен 2, а в лемме 4.2.2 — что ранг касательного отображения для f равен 2 тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы (4.20) не больше 2.

Применение аналитического метода классификации к унарным двуметрическим геометриям ранга 3 приводит к трем решениям (4.31), (4.32), (4.33) для их метрической функции f. В пар. 4.3 аналитическим методом установлена эквивалентность функций (4.32) и (4.33) (путем замены локальных координат) и неэквивалентность функций (4.31) и (4.32), следовательно, функции (4.31) и (4.33) не эквивалентны.

Р.А. Богданова делает следующий вывод "Таким образом, решение задачи об эквивалентности или неэквивалентности выражений (4.31), (4.32), (4.33) подтверждает полноту классификационной теоремы Г.Г. Михайличенко для двуметрических феноменологически симметричных (двумерных) геометрий." Напомним, что Г.Г. Михайличенко получил эту классификацию групповым методом, отличным от аналитического.

Повторение сказанного в автореферате о параграфе 4.4 излишне.

В конце автореферата приведен список публикаций Р.А. Богдановой из 16 названий по теме диссертации.

Есть лишь одно пожелание и одно замечание по автореферату.

Следовало бы пояснить в автореферате, что означает $\mathbb{D}$ в теореме 3.5.1.

В теореме 3.3.1 вместо знака прямого произведения групп Ли стоит знак тензорного произведения, возможно это опечатка.

Считаю, что представленная к защите диссертация посвящена актуальной теме из области геометрии, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Богданова Рада Александровна, безусловно заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук.

В.н.с. Института математики
им. С.Л.Соболева СО РАН,
д.ф.-м.н., профессор В.Н. Берестовский

15.06.2020