ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
на диссертацию Соколова Евгения Викторовича «Аппроксимационные свойства свободных конструкций групп», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

Алгебру A называют финитно аппроксимируемой, если для любых двух различных, то есть не состоящих в отношении равенства, элементов a, b из A существует гомоморфизм алгебры A в конечную алгебру, при котором образы элементов a, b различны, то есть по-прежнему не состоят в отношении равенства. Каждую финитно аппроксимируемую алгебру A можно превратить в топологическую. Понятие финитной аппроксимируемости оказалось полезным в исследованиях Л.С. Понтрягина компактных вполне несвязных топологических групп. А.И. Мальцев доказал финитную аппроксимируемость матричных групп с конечным числом порождающих. Далее исследования финитно аппроксимируемых групп продолжили К.Ивасава, К.Гирш, К.Грюнберг и другие. Рассматривая вместо гомоморфных отображений на конечные алгебры гомоморфизмы в алгебры некоторого класса $\mathcal{C}$, придем к определению $\mathcal{C}-$аппроксимируемости. Наконец, заменяя отношение равенства некоторым другим отношением между элементами и подмножествами алгебры A, например, предикатом сопряженности или вхождения в подгруппу, получим определения $\mathcal{C}-$аппроксимируемости относительно этого предиката.

Изучение свободных групп началось в работах Я.Нильсена и О.Шрайера в начале прошлого века и не прекращается до настоящего времени. Одним из естественных обобщений свободных групп является свободное произведение групп. Более широким классом групп, обобщающим свободные группы и свободные произведения групп, являются так называемые свободные конструкции — свободные произведения с объединенной подгруппой, $HNN-$расширения, фундаментальные группы графов групп и некоторые другие. Свободные произведения групп с объединенной подгруппой были впервые рассмотрены О.Шрайером, а $HNN-$расширения групп — Г.Хигманом, Б.Нейманом и Х.Нейман. Обе эти конструкции играют важную роль в комбинаторной теории групп. Графы групп и фундаментальные группы графов групп были впервые введены Х.Бассом и Ж.-П.Серром. Это понятие обобщает свободные группы, свободные произведения групп, свободные произведения с объединенной подгруппой и HNN–расширения. Важнейшим результатом о фундаментальных группах графов групп является теорема Басса-Серра, характеризующая фундаментальные группы графов групп геометрически — как группы, действующие на деревьях.

Диссертационная работа Е.В.Соколова направлена на изучение аппроксимационных свойств свободных конструкций групп и следовательно относится к важной и актуальной теме современной теории групп. В качестве классов групп, которым аппроксимируется группа, рассматриваются, в основном, классы групп, замкнутые относительно взятия подгрупп и декартовых сплетений. Такие классы групп называют корневыми.

Диссертация состоит из введения, восьми глав, заключения и списка литературы. Перейдем к анализу содержания диссертации по главам.

В первой главе приводятся основные понятия о свободных конструкциях групп и аппроксимационных свойствах.

Общие условия аппроксимируемости корневыми классами рассматриваются во второй главе. Теорема 2.2.1 дает достаточные условия для аппроксимируемости фундаментальной группы графа групп корневым классом групп $\mathcal{C}$. При этом предполагается, что все вершинные группы $\mathcal{C}$–аппроксимируемы. Теорема 2.3.1 дает некоторые другие достаточные, а также некоторое необходимое условие для $\mathcal{C}$–аппроксимируемости фундаментальной группы графа групп. Для её доказательстве используется иной подход, чем для теоремы 2.2.1. Теорема 2.3.1 позволяет установить критерий аппроксимируемости корневыми классами фундаментальной группы графа изоморфных групп (теорема 2.4.1). Далее обсуждается вопрос о справедливости утверждения, обратного теореме 2.2.1, фактически вопрос о существовании гомоморфизма, удовлетворяющего условиям теоремы 2.2.1. При некоторых ограничениях на реберные подгруппы и фундаментальную группу графа групп теорема 2.5.1 дает ответ на этот вопрос. Теорема 2.5.2 утверждает, что условие существования инъективного гомоморфизма не является необходимым условием для теоремы 2.5.1. В последних двух параграфах второй главы изучается как связь между понятиями $\mathcal{C}$–допустимости и слабой $\mathcal{C}$–допустимости так и условия необходимости в теореме 2.3.1.

В третьей главе исследуется вопрос об аппроксимируемости фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами. Вначале автор вводит понятия обобщенного свободного и обобщенного прямого произведения, ассоциированного с графом групп, и приводит два известных случая, когда ассоциированное с графом групп обобщенное свободное произведение существует. В следующем параграфе доказано, что в аналогичных случаях существует и обобщенное прямое произведение, ассоциированное с графом групп, а также указываются достаточные условия для отсутствии в нем элементов конечного порядка. Формулировки и доказательства основных результатов главы содержатся в следующих двух параграфах.

Четвертая глава посвящена аппроксимируемости $HNN-$расширений с центральными связанными подгруппами. Здесь рассматривается в простейшей ситуации случай, когда граф групп содержит циклы и не удовлетворяет одному ранее введенному ограничению на реберные подгруппы. Диссертант обобщает результаты С.Андреадакиса, Е.Раптиса, Д.Варсоса и Д.И.Молдаванского о $\mathcal{C}-$аппроксимируемости $HNN-$расширений, удовлетворяющих ограничениям на связанные подгруппы, на случай корневого класса $\mathcal{C}$, от которого требуется замкнутость относительно взятия фактор-групп. Доказывается ряд теорем и следствий из них, в которых базовая группа и связанные подгруппы удовлетворяют довольно сложным ограничениям. В этой же главе указываются условия, при которых существуют обобщенные прямые произведения, ассоциированные с простым циклом.

Аппроксимируемость обобщенных групп Баумслага-Солитера ($GBS-$групп) исследуется в пятой главе. Сначала автор формулирует теорему 5.2.1, которая вместе с результатом Е.А.Тумановой об аппроксимируемости обычных групп Баумслага-Солитера, дает критерий аппроксимируемости $GBS-$групп корневым классом, состоящим из периодических групп. Затем доказывается теорема 5.2.2 об аппроксимируемости $GBS-$группы, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям, корневым классом, состояшим из периодических групп. Из этих теорем получены два следствия, имеющие лаконичные и законченные формулировки. Так по следствию 5.2.5 произвольная $GBS-$группа аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.

В шестой главе изучается вопрос о $\mathcal{C}-$отделимости подгрупп в том случае, когда $\mathcal{C}$ – корневой класс, состоящий из периодических групп. Отправной точкой для исследования автора диссертации послужила знаменитая работа А.И.Мальцева «О гомоморфизмах на конечные группы», в которой он ввел понятие финитно отделимой алгебры. Е.В.Соколов вводит понятия (слабо, сильно) $\mathcal{C}-$ограниченной нильпотентной и разрешимой группы. Если множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{C}$ содержит все простые числа, то классы сильно

$\mathcal{C}-$ограниченных абелевых и разрешимых групп совпадают с классами ограниченных абелевых и ограниченных разрешимых групп в смысле А.И.Мальцева. Доказан ряд теорем о $\mathcal{C}-$отделимости и близких к этому понятию вопросах для разрешимых и нильпотентных групп.

В работе В.Н.Ремесленникова 1971 года доказано, что класс групп, финитно аппроксимируемых относительно сопряженности, замкнут относительно взятия свободных произведений. Седьмая глава диссертации относится к аппроксимируемости групп относительно сопряженности. В ней доказано несколько теорем об аппроксимируемости относительно сопряженности корневым классом, состоящим из конечных групп. Так, например, любое расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}-$группы аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности. Следствие 7.1.4 обобщает результат В.Н.Ремесленникова на случай $\mathcal{C}-$аппроксимируемости относительно сопряженности. В теореме 7.1.3 указаны ограничения, выполнение которых позволят утверждать финитную аппроксимируемость относительно сопряженности фундаментальной группы графа групп.

В последней главе изучается нильпотентная аппроксимируемость обобщенных групп Баумслага-Солитера. Здесь доказан критерий нильпотентной аппроксимируемости для этих групп и еще несколько утверждений. Так $GBS-$группа аппроксимируется относительно сопряженности тогда и только тогда, когда она разлагается в прямое произведение свободной и бесконечной циклической группы.

Замечание. В работе «О гомоморфизмах на конечные группы» А.И.Мальцев рассматривает связь между финитной аппроксимируемостью, финитной отделимостью и некоторыми алгоритмическими вопросами. Он указывает, что основной в этом направлении является работа Мак-Кинси «The decision problem for some classes of sentences without quantifiers». Идеи этой работы использовались А.И.Мальцевым для решения многих алгоритмических проблем, возникло важное направление в исследовании алгоритмических проблем в группах и других алгебрах. Поэтому удивительно, что в списке литературы отсутствует указанная работа Мак-Кинси. Кроме того, во введении связь между аппроксимируемостью и алгоритмическими проблемами упомянута как хорошо известная без ссылки на авторов этой глубокой связи.

Все, содержащиеся в диссертации результаты, являются новыми и снабжены подробными и полными доказательствами. Результаты опубликованы в 13 научных трудах, основные положения и выводы диссертации опубликованы в статьях из перечня ВАК России, которые также входят в международные базы данных и системы цитирования. Результаты диссертации доложены на многочисленных семинарах и конференциях международного уровня в качестве пленарных и секционных докладов.

Диссертационная работа имеет теоретический характер. В ней получены решения ряда задач. Результаты диссертации, а также методы, разработанные для их доказательства, могут быть использованы в дальнейших исследованиях по комбинаторной и геометрической теории групп, при чтении специальных курсов и подготовке курсовых, дипломных, диссертационных работ. Диссертация написана подробно, текст тщательно выверен. Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Таким образом, в диссертационной работе Е.В.Соколова получен ряд новых научных результатов, являющихся заметным вкладом в развитие комбинаторной и геометрической теории групп. Всё вышесказанное позволяет утверждать, что диссертация Соколова Евгения Викторовича «Аппроксимационные свойства свободных конструкций групп» является научно-квалификационной работой, в которой на основе выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое крупное научное достижение, т. е. удовлетворяет требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», и её автор, Соколов Евгений Викторович, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук,
профессор Е.И.Тимошенко

Подпись Е.И.Тимошенко заверяю:

Почтовый адрес: 630055, г.Новосибирск
Телефон: 8-913-775-16-03
E-mail: eitim45@gmail.com