ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию
Евгения Викторовича СОКОЛОВА
«АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГРУПП»,
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности
1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Актуальность темы диссертации

Группа X аппроксимируема классом групп C относительно некоторого отношения Θ, если для любых элементов и множеств элементов данной группы, не состоящих в отношении Θ, найдется гомоморфизм группы X на группу из класса C, при котором образы указанных элементов и множеств по-прежнему не состоят в отношении Θ. Если Θ — отношение принадлежности элемента заданному подмножеству Y, то говорят, что множество Y отделимо классом групп C. Аппроксимируемость классом всех конечных групп (относительно любого отношения) принято называть финитной. Понятие финитно аппроксимируемой группы было введено А. И. Мальцевым в статье, опубликованной в 1940 году, а в работе 1949 года он рассматривал обобщение этого понятия. Как показал А.И. Мальцев, что если группа X конечно определена, то из ее финитной аппроксимируемости относительно Θ следует разрешимость алгоритмической проблемы, состоящей в определении того, находятся ли заданные элементы и подмножества группы X в отношении Θ

Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

Именно это обстоятельство послужило причиной для начала интенсивных и систематических исследований аппроксимационных свойств групп, продолжающихся до сих пор.

Аппроксимируемость группы классом конечных групп (финитная аппроксимируемость) одно из классических направлений в теории аппроксимируемости. Данная аппроксимируемость относительно равенства элементов тесно связана с такими свойствами, как хопфовость и линейность, гиперболичность, локальная разрешимость (А.И. Мальцев, М. Громов, A. Lubotski, A. Mann). Отметим, что если группа конечнопорождена, то из ее финитной аппроксимируемости следует финитная аппроксимируемость ее группы автоморфизмов (Д.М. Смирнов, G. Baumslag). В классификации групп и описании их конечных гомоморфных образов хорошо работают критерии финитной аппроксимируемости (M.R. Bridston, M.D.E. Conder, A.V.Reid, A. Khukhro, A. Valette, D.J.S. Robinson).

Известно, что аппроксимируемость конечными p-группами (p пробегает некоторое бесконечное множество простых чисел) означает упорядочиваемость (A.H. Rhemtulla), а в некоторых ситуациях, нильпотентность группы (Д.Н. Азаров, К.К. Сексенбаев). Если группа почти аппроксимируема конечными p-группами (и даже конечными P-группами для заданного множества P простых чисел), то в некоторых случаях этого оказывается достаточным для финитной аппроксимируемости свободной конструкции, построенной из этих групп, однако из одной лишь финитной аппроксимируемости указанных групп аппроксимируемость свободной конструкции вывести не удается (Д.Н. Азаров).

Широкое применение нашли необходимые и достаточные условия аппроксимируемости конечными р-группами при исследовании нильпотентной аппроксимируемости конечно порожденных групп (Д.Н. Азаров, Е.А. Иванова, Д.И. Молдаванский, С.Е. Kofinas, V. Metaftsis, A.I. Papistas). В теории многообразий и CW-комплексов эффективно используются методы, связанные с аппроксимируемостью нильпотентными и разрешимыми группами(Р.В. Михайлов, I. Agol, T. Koberda, A. Suciu, O.B. Passi),

В этом же русле лежит использование аппроксимируемости при изучении групп кос, узлов и зацеплений (В.Г. Бардаков, Р.В. Михайлов, М.В. Нещадим, P. Bellingeri, В.В. Вершинин). Далее, если группа аппроксимируема свободными группами, то это влечет аппроксимируемость нильпотентными группами без кручения (W. Magnus).

В случае конечно порожденной группы, финитная аппроксимируемость относительно сопряженности в дополнении с некоторыми свойствами автоморфизмов рассматриваемой группы гарантирует финитную аппроксимируемость (относительно равенства) группы внешних автоморфизмов (E.K. Grossman). Отметим здесь некоторый аналог данного утверждения для случая аппроксимируемости конечными р-группами (L. Paris).

Одним из необходимых и/или достаточных условий аппроксимируемости (относительно равенства) свободных конструкций групп в большинстве случаев является отделимость объединенных или связанных подгрупп. Похожие взаимосвязи можно найти между аппроксимируемостью и отделимостью относительно сопряженности (G. Kim, C.Y. Tang).

Таким образом, свойства аппроксимируемости группы различными классами групп относительно разного рода отношений существенным образом связаны и имеют многочисленные и эффективные применения в математической логике, алгебре и геометрии.

Следует сказать, что различные варианты свободных конструкций групп, как то свободные, древесные и полигональные произведения, HNN-расширения, фундаментальные группы графов групп, а также ряд других конструкций, естественным образом возникают в топологии и играют существенную роль в комбинаторной, и геометрической теории групп. Здесь они выступают либо в качестве материала для построения новых групп с требуемыми свойствами, либо создают возможность изучения рассматриваемой группы путем ее реализации в виде конструкции, составленной из групп, которые имеют более простую структуру или существенно лучше изучены. В качестве примера можно привести тот факт, что в доказательстве почти аппроксимируемости конечными р-группами групп 3-мерных многообразий ключевым моментом является возможность описания структуры последних в виде фундаментальных групп графов групп (M. Aschenbrenner, S. Friedl).

Поэтому изучение аппроксимируемости свободных конструкций групп относительно различных отношений составляет немаловажную часть исследований аппроксимационных свойств групп в целом.

Диссертация изложена на 206 страницах и состоит из введения, 8 глав (каждая из которых разбита на параграфы), списка литературы, содержащего 213 наименований. В том числе 13 работ автора, в которых опубликованы основные результаты диссертации (8 работ без соавторов, 5 работ с одним соавтором, все 13 работ находятся в списке ВАК), и предметного указателя

Диссертация Евгения Викторовича Соколова посвящена изучению свободных конструкций групп, аппроксимируемых заданным классом групп.

Во введении изложены основные результаты, история вопроса и мотивировка исследования. Обоснованы методы и основные этапы работы.

Глава 1 содержит определения и известные результаты. В §§ 1.1–1.3 приводятся необходимые далее сведения об аппроксимационных свойствах и свободных конструкциях групп. Содержащиеся в этих параграфах утверждения в основном известны, некоторые из них даны без доказательств. Свойства корневых классов, описанные в § 1.4, относятся к основным результатам диссертации.

В главе 2 разрабатывается техника распространения фильтрационного метода Г. Баумслага на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп C и доказательство нескольких условий общего характера, достаточных для аппроксимируемости таким классом фундаментальной группы графа групп. Отметим критерий аппроксимируемости корневыми классами фундаментальной группы графа изоморфных групп (теорема 2.4.3).

В главе 3 предшествующие результаты применяются для изучения фундаментальной группы графа групп $\mathfrak{G}(\Gamma)$, с условием центральности которое предполагается выполненным на всем протяжении главы. В § 3.1 вводится в рассмотрение конструкция обобщенного прямого произведения, ассоциированного с графом групп (теоремы 3.2.1 и 3.2.2)

Теоремы 3.3.1 и 3.3.2 обобщают, с использованием других методов, полученные ранее по этой тематике результаты Д.Н. Азарова и Д.И. Молдаванского. Теоремы 3.3.5 и 3.3.6 устанавливают структуру фундаментальной группы графа групп $\mathfrak{G}(\Gamma)$ при дополнительных ограничениях (наличие C регулярности по подгруппе)

В главе 4 исследуются вопросы аппроксимируемости фундаментальной группы графа групп, представляющей собой HNN-расширение с центральными связанными подгруппами. Основной целью главы 4 является обобщение предложенного Д.И. Молдаванским метода спуска и подъема совместимых подгрупп на случай аппроксимируемости указанным выше классом C (теоремы 4.1.1-4.1.9).

В главе 5 изучается аппроксимируемость корневыми классами групп фундаментальной группы графа групп при условии, чтобы циклическими (точнее, бесконечными циклическими) были не одни лишь реберные, а и все вершинные группы. Получены законченные результаты об аппроксимируемости корневыми классами групп для HNN расширений и для любых конечных графов групп (обобщенные группы Баумсланга–Солитэра или GBS-группы)

В главе 6 исследуются свойства отделимости подгруппы и регулярности группы по подгруппе. Описываются некоторые случаи, в которых указанные свойства выполняются автоматически или могут быть относительно легко проверены при условии, что C — произвольный корневой класс групп состоит из периодических групп. Основой для этих исследований послужила статья А. И. Мальцева (ссылка приводилась выше), в которой аналогичные проблемы рассматриваются для случая, когда C — класс всех конечных групп.

В главе 7 рассматриваются вопросы аппроксимируемости относительно сопряженности. Решен вопрос аппроксимируемости группы, являющейся расширением свободной группы при помощи группы из аппроксимирующего класса C (теорема 7.1.1.). Доказанные теоремы обобщают ранее полученные результаты по аппроксимируемости относительно сопряженности из работ других математиков.

В главе 8 на примере обобщенных групп Баумслага–Солитэра показывается, как имеющиеся результаты об аппроксимируемости корневыми классами групп можно использовать для изучения аппроксимируемости той же свободной конструкции нильпотентными группами. Критерий нильпотентной аппроксимируемости обычной группы Баумслага–Солитэра получен Д.И. Молдаванским. В сочетании с ним критерий аппроксимируемости нильпотентными группами произвольной GBS-группы дает теорема 8.1.3. В теореме 8.1.4 получен ряд равносильных утверждений для групп аппроксимируемых нильпотентными группами без кручения.

Основные результаты

– получен критерий аппроксимируемости произвольным корневым классом фундаментальной группы графа изоморфных групп (теорема 2.4.3);

– получены достаточные условия аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп с центральными реберными подгруппами при условии, что указанные подгруппы в каждой вершинной группе пересекаются тривиально, или граф содержит не более одного простого цикла (теоремы 3.3.1, 3.3.2, 3.3.5, 3.3.6);

–получены достаточные условия аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений с центральными связанными подгруппами (теоремы 4.1.1–4.1.3);

– получен критерий аппроксимируемости корневым классом групп, замкнутым относительно взятия фактор-групп, HNN-расширения с центральными циклическими связанными подгруппами (теоремы 4.1.6–4.1.9);

– получен критерий аппроксимируемости обобщенной группы Баумслага–Солитэра корневым классом, состоящим из периодических групп, и достаточное условие аппроксимируемости той же группы корневым классом, содержащим непериодические группы (теоремы 5.2.2, 5.2.3). К числу основных результатов диссертации относятся также равносильные определения и некоторые другие свойства корневых классов групп (теорема 1.4.1);

– получены описания подгрупп, отделимых корневым классом, состоящим из периодических групп, в абелевых, нильпотентных и разрешимых группах определенного вида, а также в группах, аппроксимируемых нильпотентными и разрешимыми группами такого же вида (теоремы 6.2.4, 6.3.3);

– получен критерии аппроксимируемости относительно сопряженности корневым классом С, состоящим из конечных групп, расширения свободной группы при помощи С-группы и фундаментальной группы конечного графа групп с конечными реберными подгруппами (теоремы 7.1.1, 7.1.3);

– получены критерии аппроксимируемости обобщенных групп Баумслага–Солитэра классами всех нильпотентных групп, нильпотентных групп без кручения и свободных групп (теоремы 8.1.3, 8.1.4).

Замечания

1. Страница 94, строка 11 снизу. Доказательство т. 3.3.1 и 3.3.4, 4 строка нет запятой.
2. Страница 114, строка 20 сверху. В предложении "Как и при доказательстве предложения 4.4.1, рассмотрим ..." запятая не нужна.

3. Страница 115, строка 6 сверху. В предложении "Очевидно, что она является (H, K, φ)-совместимой и потому определены ..." нужна запятая перед союзом "и".

4. Страница 115, строка 10 снизу. В предложении "Тогда его ограничение на группу G также является гомоморфизмом на C-группу и по условию теоремы хотя бы одна из подгрупп $H\sigma, K\sigma$ конечна." нужна запятая перед союзом "и".

5. Страница 155, строка 14 снизу. В предложении "По предложению 6.1.2 X снова оказывается $C - BN$ -группой и в силу предложения 1.4.5 ..." нужна запятая перед союзом "и".

6. Страница 156, строка 22 сверху. В предложении "... включения $W \leqslant V$ вытекает, что $(xV)^r = zV \in YV/V$ и в силу выбора q ..." нужна запятая перед союзом "и".

Существенных замечаний по диссертационной работе нет. Некоторые стилевые неточности, незначительные опечатки не влияют на общую положительную оценку работы.

Заключение

Результаты диссертации решают интересные и актуальные задачи в теории бесконечных групп, аппроксимируемых заданным классом групп. Совокупность полученных автором результатов может быть квалифицирована как крупное научное достижение, имеющее существенное значение для теории групп. Выносимые на защиту результаты являются новыми, имеют теоретическое значение и могут быть использованы при дальнейших исследованиях в Московском, Новосибирском, Уральском, Красноярском, Ярославском, Ивановском госуниверситетах и в научных учреждениях Российской академии наук. Считаю, что диссертационная работа „Аппроксимационные свойства свободных конструкций групп" отвечает всем требованиям и критериям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» (утвержденных Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013 г.), а ее автор Соколов Евгений Викторович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5- «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Официальный оппонент
Шлепкин Алексей Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры Прикладной математики и анализа данных
Сибирского федерального университета, г. Красноярск.

А.А. Шлепкин

07.03.2023 г.

Контактная информация:
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет», 660041, Красноярский край, г. Красноярск, пр. Свободный, 79. Контактные телефоны +7 (391) 206-22-22; 244-86-25. Факсы +7 (391) 244-86-25. Адреса электронной почты office@sfu-kras.ru