

«Утверждаю»

**Директор ФГБУН Института проблем
Грапезникова РАН**

___ Д. А. Новиков

__2023

ОТЗЫВ

ведущей организации федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук» на диссертационную работу Козлова Романа Александровича «Точные представления конечного типа конформных алгебр Ли, выполненную в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН под руководством д.ф.м.н. П.С. Колесникова, представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»

На отзыв диссертационным советом 24.1.074.02 представлены:

- Автореферат объёмом 15 страниц;
- Диссертационная работа объёмом 105 страниц, состоящая из введения, 4 глав, заключения и списка литературы.

Актуальность темы диссертационной работы

Представленная диссертационная работа посвящена изучению свойств алгебраических систем, возникающих в квантовой теории поля, а именно, свойств коэффициентов операторного разложения произведения (operator product expansion, OPE) киральных полей, представленных формальными распределениями с коэффициентами в алгебре операторов на пространстве состояний. Подобное представление полей для случая 2-мерной квантовой

теории с конформной симметрией восходит к работе А.А. Белавина, А.В. Полякова и А.Б. Замолотчикова (1984), алгебраическое определение возникающей при этом структуры — вертексной алгебры — было предложено Р. Борчердсом (1986) и применено для изучения представлений наибольшей спорадической группы.

Ключевым понятием, изучаемым в данной диссертации, является конформная алгебра (В. Кац, 1996). Конформная алгебра Ли — это в точности сингулярная часть вертексной алгебры, т. е. структура, кодирующая коэффициенты сингулярной части ОРЕ. С формальной точки зрения конформная алгебра Ли является алгеброй Ли в специфической псевдотензорной категории. Другие многообразия алгебр (ассоциативные, коммутативные и др.) также могут быть представлены в данной категории. Исследованиям ассоциативных конформных алгебр и конформных алгебр Ли посвящены многочисленные работы Б. Бакалова, В.Г. Каца, Е. Зельманова, А. Де Андреа, А. Де Соле, К. Бойаллиан, Х. Либерати, Ш.-Ж. Ченга, А. Ретаха, Д. Фаттори и др. Одной из наиболее актуальных задач является проблема вложения конформной алгебры Ли в ассоциативную, что (при некоторых естественных ограничениях) можно рассматривать как задачу построения точного конформного представления для конформной алгебры Ли.

Полученные диссертантом результаты являются новыми и существенно улучшают результаты более ранних работ и исследований, упомянутых выше. В диссертации установлены ранее неизвестные связи между свойствами алгебр Гельфанда — Дорфмана, алгебр Пуассона и конформных алгебр, завершена структурная теория ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа, завершено исследование универсальных обёртывающих ассоциативных конформных алгебр для центральных расширений простых конформных алгебр Ли.

Результаты работы имеют важное теоретическое значение и могут использоваться для дальнейшего изучения неассоциативных алгебр и конформных алгебр с дополнительными структурами (например, дифференцированиями).

Основные результаты работы и их научная новизна

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

- 1) Доказано, что квадратичные конформные (супер)алгебры Ли, построенные по дифференциальным (супер)алгебрам Пуассона, специальные. Как следствие, решена конформная проблема Адо в классе квадратичных конформных (супер)алгебр, построенных по конечномерным специальным (супер)алгебрам Гельфанда — Дорфман.
- 2) Вычислен базис Грёбнера — Ширшова для универсальной обертывающей ассоциативной конформной алгебры с ограничением на ассоциативную локальность для произвольной конформной алгебры типа Каца — Муди. Как следствие, получен линейный базис данной конформной алгебры.
- 3) Полностью решен вопрос об отщеплении радикала в ассоциативных конформных алгебрах с точным представлением конечного типа.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Первая глава носит вводный характер. В ней вводятся основные понятия и определения, а также дается обзор известных результатов по теме исследования.

Во второй главе изучаются универсальные обертывающие объекты для квадратичных конформных (супер)алгебр Ли, построенных по дифференциальным (супер)алгебрам Пуассона, а также их взаимосвязь с точными представлениями данных (супер)алгебр. В ней получен первый из основных результатов диссертации, а также представлены некоторые дальнейшие исследования в данной области.

В третьей главе исследуется метод БГШ для ассоциативных конформных алгебр, а также его приложения к некоторым конкретным примерам. В рамках данного подхода получен второй основной результат данной диссертации. Как следствие, мы получаем, что для конформных алгебр Каца — Муди оказывается верным конформный аналог теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта.

В четвёртой главе исследуется вопрос об отщеплении радикала в ассоциативных конформных алгебрах с точным представлением конечного

типа. Как известно, этот вопрос полностью определяется строением второй группы когомологий Хохшильда. С помощью исследования второй группы когомологий Хохшильда, а также непосредственными построениями получается ряд результатов, которые в совокупности с работами П. С. Колесникова и И. А. Долгунцевой позволяют получить третий основной результат данной диссертации.

Практическая значимость работы

Практическая ценность работы заключается в следующем. Результаты могут быть использованы при чтении курсов для студентов старших курсов и аспирантов. Многие представленные в работе подходы позволяют упростить доказательства известных теорем и сделать их более доступными для восприятия студентами и аспирантами математических специальностей.

Результаты диссертации могут быть в дальнейшем приложены к исследованию квантовой теории поля, теории струн и другим прикладным разделам теоретической физики.

Кроме того, полученные результаты значимы и несут важную роль для дальнейшего изучения неассоциативных алгебр и конформных алгебр с различными дополнительными структурами (например, дифференцированиями) и для других разделов теории операторных алгебр.

Достоверность полученных результатов

Результаты с полными доказательствами опубликованы в ряде работ в журналах, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов диссертаций по физико-математическим наукам (Алгебра и логика, 2 статьи) и в международных журналах, входящих в основные базы данных Web of Science и Scopus (Communications in Mathematical Physics, Journal of Noncommutative Geometry, Algebras and Representation Theory).

Результаты диссертации докладывались на международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2018), международной школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Москва, 2020), второй конференции математических центров России (Москва, 2022), а также обсуждались на семинарах имени А. И. Ширшова по теории колец и «Алгебра и логика» института математики имени С. Л. Соболева и новосибирского государственного университета.

Соответствие паспорту специальности

Диссертационная работа Р.А. Козлова «Точные представления конечного типа конформных алгебр Ли» соответствует критериям, определенным пп II.9–II.14 “Положения о присуждении ученых степеней”, постановление правительства РФ от 24.09.2013 N 842 (ред. от 28.08.2017), и оформлена согласно п 30 “Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук”, ред. От 24.02.2021.

Используемые в работе методы включают в себя: теории конформных алгебр Ли и ассоциативных конформных алгебр, а также когомологической теории для конформных алгебр, конструкция пуассоновой конформной обёртывающей алгебры, а также инструментарий связанный с ассоциативными конформными алгебрами. Применяется адаптированный метод когомологий Хохшильда и другие методы гомологической алгебры.

Данные методы и полученные результаты соответствуют специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Замечания по работе

Язык и стиль диссертации хорошие. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы. Работа носит теоретический характер, и к замечаниям можно отнести следующее.

Хотелось бы увидеть большее количество приложений, в частности к упомянутым в диссертации работам А. Белавина по квантовой теории поля, а также к получению более конкретной информации о строении и свойствах алгебр Вирасо.

Рекомендации по внедрению и дальнейшему развитию работы

Результаты диссертации могут быть рекомендованы к использованию в учебном процессе математических факультетов, а также в научно-исследовательских учреждениях, связанных с исследованием теоретической физики и различными вопросами исследования операторных алгебр.

Общая оценка работы

Сделанные замечания не влияют на положительную оценку диссертационной работы Р.А. Козлова. Тема диссертации является актуальной, а сама работа обладает научной новизной и практической значимостью.

Диссертационная работа Р.А. Козлова «Точные представления конечного типа конформных алгебр Ли» соответствует критериям, определенным пп II.9–II.14 “Положения о присуждении ученых степеней”, постановление правительства РФ от 24.09.2013 N 842 (ред. от 28.08.2017), и оформлена согласно п 30 “Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук”, ред. от 24.02.2021.

Автор диссертации заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Автореферат отражает основные результаты диссертационной работы и обосновывает выводы защищаемых положений. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Содержание диссертационной работы отражено в 8 работах, в т.ч. 6 в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России и входящих в Scopus. Ещё две работы опубликованы в материалах крупных международных конференций.

Обоснованность результатов и защищаемых положений диссертации, их научная и практическая ценность сомнений не вызывает.

С учётом вышесказанного, автор диссертации заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Диссертационная работа, автореферат и отзыв рассмотрены и обсуждены на заседании семинара лабораторий № 06 Федерального государственного

бюджетного учреждения науки «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук».

Присутствовало 10 человек, с правом решающего голоса - 8 человек.

Результаты голосования: «за» - 8, чел., «против» - 0 чел., «воздержалось» - 0 чел. Протокол № 3 от «9» марта 2023 г.

Председатель семинара лаборатории № 06 ИПУ РАН и № 82 ИПУ РАН
д.ф.-м.н., профессор МГУ им

Кушнер Алексей Гурьевич

Организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук»

Почтовый адрес: Россия, 117997, Москва. ул. Профсоюзная, д. 65,
Телефон: +7 495 334-89-10, Факс: +7 495 334-93-40, +7 499 234-64-26
E-mail: dan@ipu.ru

ОТЗЫВ

ПОДГОТОВИЛ

Арутюнов Андроник Арамович

старший научный сотрудник лаборатории № 06 ИПУ РАН, к.ф.-м.н.

Адрес: Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Телефон: +7 (903) 532-34-66, e-mail: andronick.arutyunov@gmail.com

Согласен на включение моих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного комитета, и на их дальнейшую обработку.

Арутюнов Андроник Арамович