

## ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Р. А. Козлова  
«Точные представления конечного типа конформных алгебр Ли», представленной  
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по  
специальности 1.1.5. — математическая логика, алгебра, теория чисел  
и дискретная математика

Теория конформных алгебр возникла в 90-х годах XX столетия в работах В. Г. Каца как формальный язык для работы с коэффициентами сингулярной части разложения операторного произведения (operator product expansion, OPE) киральных полей в 2-мерной конформной теории поля, развитой в работах А. А. Белавина, А. В. Полякова и А. Б. Замолодчикова в 80-х годах. Для описания свойств OPE «в целом» развит язык вершинных (вертексных) алгебр, аксиоматическое описание которых восходит к работе Р. Борчердса (1986), где при помощи автоморфизмов подходящей вертексной алгебры было построено представление наибольшей спорадической группы (Монстра). Связь между конформными алгебрами Ли и вертексными алгебрами во многом похожа на связь между обычными алгебрами Ли и алгебрами Пуассона.

С алгебраической точки зрения конформные алгебры представляют собой объекты псевдотензорной категории модулей над алгеброй многочленов  $H$  от одной переменной  $T$  (оператора трансляции), снабженные билинейной операцией в этой категории. Конформные алгебры, конечно-порожденные как модули над  $H$ , называются конформными алгебрами конечного типа — это прямые аналоги конечномерных алгебр в «обычной» категории векторных пространств над полем.

Структурная теория конформных алгебр и супералгебр конечного типа изучалась в работах А. Д'Андреа, В. Г. Каца, А. Ретаха, Д. Фаттори, когомологическая теория была построена Б. Бакаловым, А. Вороновым, А. Де Соле, В. Г. Кацем.

Одним из наиболее интересных открытых вопросов в теории конформных алгебр является доказательство аналога классической теоремы Адо о существовании точного конечномерного представления у любой конечномерной алгебры Ли. Для конформных алгебр формулировка соответствующей проблемы такова: верно ли, что конформная алгебра Ли конечного типа без кручения имеет точное представление конечного типа? В представленной диссертации получено существенное продвижение в развитии различных подходов к решению этой проблемы и получены завершённые результаты, представляющие самостоятельный интерес.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. В первой главе собраны основные определения, формулировки и прочие предварительные сведения, необходимые для изложения основных результатов диссертации.

Вторая глава содержит первый из основных результатов диссертации, в ней доказано, что квадратичные конформные супералгебры Ли, построенные по дифференциальным супералгебрам Пуассона, специальные. Как следствие, гипотеза о существовании точного представления конечного типа доказана для класса квадратичных конформных супералгебр, построенных по конечномерным специальным супералгебрам Гельфанда — Дорфмана.

Один из подходов к решению конформной проблемы Адо состоит в исследовании универсальных ассоциативных обертывающих конформных алгебр. Так, П. С. Колесниковым (2011) было показано, что выполнение условия Пуанкаре — Биркгофа — Витта (PBW) для такой универсальной обертывающей влечет существование искомого представления. Наиболее универсальным инструментом для исследования свойства PBW является метод базисов Грёбнера — Ширшова, развитый для конформных алгебр в работах Л. А. Бокутя, Ю. Фонга и В.-Ф. Ке. В третьей главе диссертации вычислен базис Грёбнера — Ширшова для универсальной обертывающей ассоциативной конформной алгебры с ограничением на ассоциативную локальность  $N = 3$  для конформных алгебр типа Каца — Муди. Как следствие, получен линейный базис свободной коммутативной конформной алгебры с локальностью  $N = 3$ .

Другой подход к построению точных представлений для конформных алгебр Ли конечного типа использует отщепление разрешимого радикала, если это возможно. В работе П. С. Колесникова (2016) было показано, что выполнение аналога теоремы Леви для конформной алгебры Ли влечет выполнение аналога теоремы Адо. Отсюда вытекает необходимость исследовать отщепление радикала как для конформных алгебр Ли, так и для их ассоциативных обертывающих. В работах И. А. Долгунцевой (2007, 2009) исследовалась задача отщепления радикала в ассоциативных конформных алгебрах с точным представлением конечного типа (этот класс больше, чем класс алгебр конечного типа). В четвертой главе диссертации вопрос о возможности отщепления радикала в ассоциативных конформных алгебрах с точным представлением конечного типа полностью решен: описаны в точности все полупростые алгебры, для которых выполняется конформный аналог теоремы Веддерберна.

Новизна результатов состоит в том, что: описан широкий класс конформных алгебр Ли, заведомо имеющих точное представление конечного типа и установлена исходно не очевидная связь между специальностью ГД-алгебры и построенной по ней квадратичной конформной алгебры, завершено исследование универсальных ассоциативных обертывающих нетривиальных центральных расширений простых конформных алгебр Ли, завершено описание отщепляющихся полупростых факторов для ассоциативных конформных алгебр с точным представлением конечного типа.

Представленная диссертация является законченным научным исследованием по актуальной теме современной алгебры. Получены новые интересные результаты, которые будут использованы для дальнейшего развития теории конформных и вертексных алгебр, а также в смежных областях неассоциативной алгебры. Результаты опубликованы в 5 печатных работах в изданиях, входящих в список ВАК и индексируемых международными базами данных Web of Science и Scopus. Из них одна работа опубликована диссертантом единолично и четыре — в соавторстве со мной и А. С. Панасенко при решающем вкладе соискателя.

Результаты диссертации докладывались на международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2018), международной школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Москва, 2020), второй

конференции математических центров России (Москва, 2022), а также обсуждались на семинарах по теории колец имени А. И. Ширшова и «Алгебра и логика» Института математики имени С. Л. Соболева и Новосибирского государственного университета.

Считаю, что диссертация «Точные представления конечного типа конформных алгебр Ли» удовлетворяет требованиям ВАК для кандидатских диссертаций, а ее автор Р. А. Козлов заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель  
Колесников Павел Сергеевич

Федеральное государственное учреждение науки  
Институт математики им. С.Л. Соболева  
Сибирского отделения Российской академии  
наук (ИМ СО РАН)  
проспект Академика Коптюга, 4, г. Новосибирск,  
630090, Россия  
ведущий научный сотрудник лаборатории  
алгебры, доктор физ.-мат. наук, раб. тел.  
8(383)3634509  
e-mail: pavelisk@math.nsc.ru

26 декабря 2022 г.

Подпись П.С. Колесникова заверяю:  
Ученый секретарь ИМ СО  
кандидат физ.-мат.

Н. А. Даурцева