ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Евгения Викторовича Соколова
«АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГРУПП»,
представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Настоящая диссертация посвящена изучению аппроксимируемости групп различными классами групп (конечными, p-группами, нильпотентными и др). Это направление является классическим в теории групп и берет свое начало в работах А. И. Мальцева, Ф. Холла и других математиков. Свойство быть аппроксимируемой тесно связано с другими алгебраическими свойствами. Например, финитная аппроксимируемость (аппроксимируемость конечными группами) связана с такими свойствами, как хопфовость, линейность, гиперболичность и локальная разрешимость. Из финитной аппроксимируемости конечно порожденной группы следует финитная аппроксимируемость ее группы автоморфизмов. Аппроксимируемость нильпотентными и разрешимыми группами имеет приложения в теории многообразий и CW-комплексов, используется при изучении групп кос, узлов и зацеплений. Кроме того, аппроксимируемость нильпотентными группами без кручения является необходимым условием аппроксимируемости свободными группами.

Свободные конструкции групп (свободные, древесные и полигональные произведения, HNN-расширения, фундаментальные группы графов групп и др.) естественным образом возникают в топологии и играют важную роль как в комбинаторной, так и в геометрической теории групп, во-первых, выступая в качестве средства построения новых групп с желаемыми свойствами и, во-вторых, обеспечивая возможность изучения заданной группы путем ее представления в виде конструкции, составленной из более просто устроенных или лучше изученных групп. Например, одним из ключевых моментов в доказательстве почти аппроксимируемости конечными p-группами групп 3-мерных многообразий является возможность описания структуры последних в виде фундаментальных групп графов групп. Поэтому изучение аппроксимируемости свободных конструкций групп составляет немаловажную часть исследований аппроксимационных свойств групп в целом.

Целью настоящей диссертационной работы является развитие методов исследования аппроксимируемости свободных конструкций групп различными, в первую очередь корневыми, классами групп и получении с помощью этих методов конкретных необходимых и/или достаточных условий аппроксимируемости.

Напомним, что класс групп $\mathcal{C}$ называется корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений некоторого специального вида. Например, корневыми являются классы всех конечных групп, всех разрешимых групп, всех групп без кручения, конечных $\mathcal{P}$-групп и периодических $\mathcal{P}$-групп конечного периода для любого непустого множества $\mathcal{P}$ простых чисел. Нетрудно показать также, что пересечение любого числа корневых классов – снова корневой класс. Таким образом, к числу корневых относятся многие аппроксимирующие классы групп, рассматриваемые в литературе. Классы нильпотентных и свободных групп, тоже нередко фигурирующие в подобном качестве, корневыми не являются. Однако, аппроксимируемость классом $\mathcal{F}_p$ конечных p-групп для всякого простого числа p служит необходимым условием аппроксимируемости свободными группами, а нильпотентная аппроксимируемость конечно порожденной группы равносильна аппроксимируемости объединением $\mathcal{F}_p$ по всем простым p. Поэтому утверждения об аппроксимируемости корневыми классами могут применяться и для доказательства аппроксимируемости свободными и нильпотентными группами.

Перейдем к детальному описанию полученных результатов.

Глава 1 является вводной. В первых трех параграфах приводятся необходимые сведения об аппроксимационных свойствах и свободных конструкциях групп. В 4-м параграфе описаны свойства корневых классов, что является одним из основным результатам диссертации.

В **главе 2** фильтрационный метод Г. Баумслага распространяется на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп $\mathcal{C}$ и доказываются два условия общего характера, достаточные для аппроксимируемости таким классом фундаментальной группы графа групп. В частности, теорема 2.2.1 утверждает, что если $\mathcal{C}$ – корневой класс групп и все вершинные группы G_v фундаментальной группы графа групп $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы и существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на всех реберных подгруппах, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$–аппроксимируема. Также дан критерий аппроксимируемости корневыми классами фундаментальной группы графа изоморфных групп (теорема 2.4.2).

В **главе 3** полученные ранее результаты применяются для изучения фундаментальной группы графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$, в котором реберные подгруппы лежат в центре соответствующих вершинных подгрупп.

Также в этой главе для графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ вводятся и изучаются обобщенное свободное произведение $GFP(\mathcal{G}(\Gamma))$ и обобщенное прямое произведение $GDP(\mathcal{G}(\Gamma))$ ассоциированные с графом групп $\mathcal{G}(\Gamma)$. В § 3.2 устанавливаются условия существования обобщенного свободного произведения, ассоциированного с графом групп. Кроме того, получены достаточные условия отсутствия кручения в группе $GDP(\mathcal{G}(\Gamma))$. Последний результат используется далее для изучения аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ корневыми классами, состоящими из групп без кручения.

В **главе 4** изучается аппроксимируемость HNN-расширений с центральными связанными подгруппами корневым классом групп $\mathcal{C}$, который замкнут относительно взятия фактор-групп.

Основной целью этой главы является обобщение предложенного Д. И. Молдаванским метода спуска и подъема совместимых подгрупп на случай аппроксимируемости классом $\mathcal{C}$. В отдельных случаях изучить аппроксимируемость HNN-расширения удается, не применяя метод спуска и подъема совместимых подгрупп. В настоящей главе такое исследование, использующее результаты §§ 2.3, 2.7 и теорему 3.3.1, проведено при условии, что связанные подгруппы H и K группы G являются циклическими

Если потребовать, чтобы циклическими (точнее, бесконечными циклическими) были не одни лишь реберные, а и все вершинные группы, то получить законченные результаты об аппроксимируемости корневыми классами удается не только для HNN-расширений, но и для фундаментальных групп любых конечных графов групп. Такие фундаментальные группы называют обобщенными группами Баумслага–Солитэра или GBS-группами. Их аппроксимируемость корневыми классами изучается в **главе 5**. Напомним, что группа Баумслага–Солитэра – это HNN-расширение бесконечной циклической группы, т. е. группа с представлением вида

$$BS(m,n) = \langle a, b \mid a^{-1}b^m a = b^n \rangle, \quad |n| \geq m > 0,$$

где m и n – ненулевые целые числа. GBS-группа называется элементарной, если она изоморфна $BS(1,1)$, $BS(1,-1)$ или бесконечной циклической группе.

Известно, что GBS-группа разрешима, если она элементарна или изоморфна $BS(1,q)$, где $q \neq \pm 1$. Аппроксимируемость корневыми классами обычных групп Баумслага–Солитэра изучается Е. А. Тумановой, и в сочетании с результатами данной работы теорема 5.2.2 дает критерий аппроксимируемости произвольной GBS-группы корневым классом, состоящим из периодических групп. Следствие 5.2.5. утверждает, что произвольная GBS-группа аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.

В условиях ряда теорем из глав 2–4 фигурируют свойства отделимости подгруппы и регулярности группы по подгруппе. **Глава 6** описывает некоторые случаи, в которых указанные свойства выполняются автоматически или могут быть относительно легко проверены.

В главах 1–6 речь идет исключительно об аппроксимируемости свободных конструкций групп корневыми классами относительно равенства. Последние две главы намечают два других возможных направления исследований. Пусть $\mathcal{C}$ – корневой класс групп, состоящий только из конечных групп. Как видно из доказательств, приведенных в главе 2, основу для изучения аппроксимируемости (относительно равенства) свободных конструкций групп корневым классом $\mathcal{C}$ составляют утверждения об аппроксимируемости таким классом любой свободной группы и произвольного расширения $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{C}$-группы. Первое из этих утверждений легко обобщается на случай аппроксимируемости классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности (см. предложение 7.2.1). Однако, расширение $\mathcal{C}$-аппроксимируемой относительно сопряженности группы при помощи $\mathcal{C}$-группы не обязано аппроксимироваться относительно сопряженности классом $\mathcal{C}$. Поэтому первым шагом в изучении $\mathcal{C}$-аппроксимируемости относительно сопряженности свободных конструкций групп является доказательство более слабого утверждения о том, что всякое расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности. Основным результатом **главы 7** является теорема 7.1.1, которая утверждает, что произвольное расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности. Эта теорема открывает дорогу к изучению $\mathcal{C}$-аппроксимируемости относительно сопряженности свободных конструкций групп, и в качестве примера ее применения доказано (см. теорему 7.1.3), что если $\mathcal{G}(\Gamma)$ – конечный граф групп, в котором все вершинные группы $\mathcal{C}$-аппроксимируемы относительно сопряженности и все реберные подгруппы конечны, если при этом группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то она $\mathcal{C}$-аппроксимируема относительно сопряженности. Из этой теоремы вытекает следствие 7.1.4, согласно которому свободное произведение произвольного семейства групп, $\mathcal{C}$-аппроксимируемых относительно сопряженности, аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности.

Цель **главы 8** состоит в том, чтобы показать (на примере обобщенных групп Баумслага–Солитэра), как имеющиеся результаты об аппроксимируемости корневыми классами групп можно использовать для изучения аппроксимируемости той же свободной конструкции нильпотентными группами.

Критерий нильпотентной аппроксимируемости обычной группы Баумслага–Солитэра получен в работе Д. И. Молдаванского (2020). Теорема 8.1.3 дает критерий аппроксимируемости нильпотентными группами произвольной GBS-группы.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они опубликованы в 13 статьях, включенных в перечень ВАК. Их достоверность подтверждается подробными доказательствами, прошедшими проверку в том числе при рецензировании указанных работ. Часть результатов получена автором самостоятельно. Из результатов совместных работ в диссертацию включены лишь те, которые принадлежат автору.

Диссертация изложена на 206 страницах. Она состоит из введения, восьми глав и списка литературы из 213 наименований.

Результаты проведенных исследований были представлены на следующих международных и всероссийских конференциях:

– Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2013, 2015, 2016, 2017, 2018, 2020, 2021 гг.);

– Международной конференции, посвященной 75-летию профессора Д. И. Молдаванского (Иваново, 2015 г.);

– XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (Саратов, 2016 г.);

– Всероссийской конференции «Алгебра и теория алгоритмов», посвященной 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета (Иваново, 2018 г.);

– XV Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (Тула, 2018 г.);

– XVI и XVII Международных конференциях «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, май и сентябрь 2019 г.);

– Международной конференции, посвященной 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (Москва, 2019 г.);

– Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2019 г.);

– Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 2021 г.);

– Международной алгебраической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения А. И. Старостина (Екатеринбург, 2021 г.);

– Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 110-летию со дня рождения С. Н. Черникова (Нальчик, 2022 г.);

– XIV Международной школе-конференции по теории групп, посвященной памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова и Л. А. Шеметкова (Брянск, 2022 г.);

– Второй конференции Математических центров России (Москва, 2022 г.).

Кроме того, результаты диссертации докладывались на семинаре «Алгебра и логика» (Новосибирск, 2022 г.) и на семинаре по теории групп Ивановского государственного университета (Иваново, 2013–2021 гг.).

Диссертация написана очень хорошо, автореферат полностью отражает содержание диссертации. Отмечу, что Е. В. Соколов принадлежит Ивановской школе алгебраистов, основанной А. И. Мальцевым, представителями которой являются Д. И. Молдаванский, Д. Н. Азаров, Е. А. Иванова и другие известные математики. Для этой школы характерно скрупулезное изложение всех деталей доказательства и почти полное отсутствие ляпов. В частности, мне так и не удалось найти опечатки в тексте диссертации.

Считаю, что диссертация Е. В. Соколова «Аппроксимационные свойства свободных конструкций групп» соответствует всем критериям, установленным в положении о присуждении ученых степеней: работа посвящена актуальной теме, полученные в ней результаты, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение, являются новыми, полностью и правильно обоснованы, своевременно и в полном объеме опубликованы в научных изданиях, удовлетворяющих требованиям ВАК. Результаты и методы, предложенные автором, будут использованы в дальнейших исследованиях по теории групп. Вышеизложенное позволяет утверждать, что диссертация Е. В. Соколова «Аппроксимационные свойства свободных конструкций групп» удовлетворяет требованиям ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, сформулированным в пп. 9-11, 13, 14 Положения о порядке присуждения ученых степеней (постановление №842 от 24 сентября 2013 года), а ее автор Евгений Викторович Соколов заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук
Валерий Георгиевич Бардаков
660090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
телефон: +7 383-3297646
e-mail: bardakov@math.nsc.ru
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
главный научный сотрудник
лаборатории обратных задач математической физики В. Г. Бардаков
14 марта 2023 г.