

"УТВЕРЖДАЮ"

апреля 2022 года

Ректор ФГБОУ ВО
ЯрГУ им. П.Г. Демидова,
доктор химических наук, профессор
Александр Ильич Русаков

Отзыв ведущей организации
на диссертационную работу Циовкиной Людмилы Юрьевны на тему «Группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – «математическая логика, алгебра и теория чисел».

1. Актуальность тематики диссертационной работы. Диссертационная работа Циовкиной Л.Ю. посвящена актуальной для современной теории групп теме – строению групп автоморфизмов графов с симметриями заданного вида, а также классификации самих этих графов. Особый интерес представляет исследование групп автоморфизмов графов с такими свойствами симметрии, как дистанционная транзитивность и, более общо, дистанционная регулярность.

Пусть G – это группа подстановок на конечном множестве Ω , Γ – связный граф на Ω и d – его естественная метрика. Если группа G действует дистанционно-транзитивно на Γ и для любых двух упорядоченных пар (x, y) и (x', y') его вершин с $d(x, y) = d(x', y')$ найдется такой элемент $g \in G$, что $(x^g, y^g) = (x', y')$, то граф Γ называется дистанционно-транзитивным.

Изучение групп подстановок, действующих дистанционно-транзитивно, восходит к работе Д.Г.Хигмана 1962 г. Позднее в работе Ж.Титса были введены понятия обобщенных многоугольников с целью найти геометрическую интерпретацию некоторых полупростых алгебраических групп, включая группы лиева типа. Отметим, что многие спорадические простые группы были открыты и построены как группы ранга 3. Н.Биггс выделил набор комбинаторных свойств, аппроксимирующих дистанционную транзитивность графа, введя понятие дистанционной регулярности графа. Связный граф называется дистанционно-регулярным (д.р.г.), если для любой пары его вершин x, y с $d(x, y) = k$ число $p_{i,j}^k$ таких вершин z , что $d(x, z) = i$ и $d(z, y) = j$, зависит только от i, j, k и не зависит от выбора x и y . Биггс показал, что алгебра смежности д.р.г. (алгебра Боуза-Мейснера) порождается его матрицей смежности, а числа $p_{i,j}^k$ не что иное, как структурные константы этой алгебры и могут быть выражены с помощью его массива пересечений, т.е. параметров $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, где d – диаметр графа, $b_i = p_{i,i+1}^i$, $c_i = p_{i-1,1}^i$. Независимо Ф.Дельсартом была установлена эквивалентность д.р.г. и P -полиномиальных схем отношений, а также введены двойственные к ним Q -полиномиальные схемы отношений.

Важность исследования групп автоморфизмов указанных графов видна уже из того, что каждая простая неабелева группа (кроме возможных исключений спорадических

групп и групп малого лиева ранга) является группой автоморфизмов Q -полиномиального д.р.г. Классификация таких графов рассматривалась Э.Баннаи и Т.Ито как основа для альтернативного подхода к классификации конечных простых групп.

В настоящее время классификация д.т.г. близка к завершению и внимание исследователей переключается на более широкие классы объектов, важных как для теории графов, так и для теории групп. В частности, такой задачей является классификация групп, действующих транзитивно на множестве упорядоченных пар его смежных вершин (флаг-транзитивных групп). Таким образом, основная задача диссертационного исследования, задача описания флаг-транзитивных групп автоморфизмов дистанционно регулярных графов является весьма актуальной.

Дальнейший анализ показывает, что основная проблема сводится к случаю, когда требуется классификация антиподальных дистанционно регулярных графов. При этом количество известных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра $d \geq 5$ оказывается весьма мало, тогда как антиподальные д.р.г. небольшого диаметра $d \in \{3, 4\}$ образуют обширный класс графов, которые тесно связаны с такими классическими комбинаторными и алгебраическими объектами как проективные плоскости, делимые дизайны и коды Препараты, Рида-Маллера, Кердока, обычными и обобщенными матрицами Адамара и конечными группами.

Несмотря на то, что антиподальные д.р.г. небольшого диаметра интенсивно изучались в последние десятилетия, систематическое исследование их групп автоморфизмов не проводилось.

Сказанное выше и интенсивность исследований в направлении, выбранном автором диссертационного исследования, свидетельствуют об актуальности тематики диссертационной работы.

2. Научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

В диссертации проведено исследование транзитивных и флаг-транзитивных групп автоморфизмов антиподальных д.р.г. диаметра $d \in \{3, 4\}$.

Изучение фокусируется вокруг следующих основных вопросов:

- 1) определение комбинаторных свойств графа (в частности его допустимых массивов пересечений);
- 2) исследование локальных комбинаторных свойств графа и строения его группы автоморфизмов);
- 3) описание группы автоморфизмов графа по ее действию на вершинах, на дугах и на антиподальных классах.

При этом основное внимание уделено вопросам 2) и 3).

Массив пересечений д.р.г. Γ диаметра 3 следующий: $\{k, (r-1)\mu, 1, 1, \mu, k\}$, где k – степень графа, r – порядок антиподального класса и μ – число общих соседей для двух вершин на расстоянии 2. Число общих соседей вершин на расстоянии 2 обозначается через λ .

Автор аккуратно излагает историю исследований антиподальных дистанционно-транзитивных графов диаметра 3, замечая, что решающую роль в этой классификации сыграло описание конечных 2-транзитивных групп подстановок, полученное на основе классификации всех конечных простых групп (работа К.Годсила, Р.Либлера и Ш.Прагер, посвященная антиподальным дистанционно-транзитивным графам диаметра 3). В более общем случае (для флаг-транзитивной группы автоморфизмов антиподального д.р.г. диаметра 3) подход указанных авторов не срабатывал и автору потребовалось провести спе-

циальное дополнительное исследование. В том числе, оказалось необходимым применение новых методов, в частности, потребовалось использовать такие глубокие результаты как теорема О'Нэна-Скотта, описывающая строение примитивных групп подстановок нечетной степени, классификацию групп подстановок ранга 3, сведения о группах когомологий конечных групп.

В диссертации изучаются (в основном, транзитивные и флаг-транзитивные) группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов при заданных ограничениях на строение группы или графа. Наиболее значительный результат диссертации – классификация флаг-транзитивных групп автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 в аффинном и почти простом случаях, а также открытие бесконечных семейств реберно-симметричных дистанционно регулярных графов, связанных с сериями простых групп $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Важным инструментом работы стали методы локального анализа графа смежных классов простых групп с (B, N) -парой ранга 1, использующие каноническую форму элементов и классические результаты Судзуки о структурных уравнениях в таких группах, а так же способ определения допустимых групп автоморфизмов в аффинном случае, основанный на редукции к графам, у которых порядок накрывающей группы имеет одно из экстремальных значений.

Более подробно, основные достижения диссертации можно описать следующим образом:

1. Классифицированы антиподальные д.р.г. смежных классов диаметра 3 с $r > 2$ квазипростых групп $U_3(q)$, $SU_3(q)$, $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$. Найдены новые бесконечные семейства антиподальных д.р.г. диаметра 3.

2. Для каждой группы $G \in \{U_3(q), Sz(q)\}$, где $q = 2^n > 4$, доказано, что граф на множестве ее инволюций, выбранных специальным образом, дистанционно регулярен. Как следствие, для групп $U_3(2^n)$ решена задача описания графов S_3 -инволюций, поставленная Девиллерсом и Гудичи в 2008 г. Кроме того, для каждого $n \geq 2$ доказано, что граф S_3 -инволюций группы $L_2(2^n)$ изоморфен графу Мэтона степени 2^n с $\mu = 1$.

3. Получено описание флаг-транзитивных групп G автоморфизмов антиподальных д.р.г. Γ диаметра 3, когда G индуцирует почти простую 2-транзитивную группу автоморфизмов на множестве антиподальных классов графа Γ .

4. Получено описание флаг-транзитивных групп G автоморфизмов антиподальных д.р.г. Γ диаметра 3, когда G индуцирует почти аффинную 2-транзитивную группу подстановок на множестве антиподальных классов графа Γ . Показано, что за известными исключениями граф Γ является графом Таса-Соммы или графом Годсила-Хензеля.

5. Показано, что антиподальное дистанционно регулярное покрытие диаметра 4 графа эрмитовых форм $Herm(2, q^2)$, группа автоморфизмов которого действует транзитивно на дугах и индуцирует группу ранга 3 на множестве его антиподальных классов, изоморфно графу Уэлса или графу смежных классов укороченного тернарного кода Голея.

6. Получены ограничения на простой спектр и строение группы автоморфизмов $AT4(p, p + 2, r)$ -графа в случае, когда p -степень простого числа. Доказано, что при $p = 5, 7, 11, 17, 27$ указанные графы не являются реберно симметричными.

7. Исследован класс абелевых антиподальных д.р.г. Γ диаметра 3, обладающих транзитивной группой автоморфизмов G , которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок G^Σ на множестве Σ антиподальных классов графа. Классифицированы графы с этим свойством при условии, что G^Σ – спорадическая простая группа ранга 3.

Результаты диссертации опубликованы в 15 изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. При этом результаты, указанные в пунктах 1, 2, 6, 7, получены автором лично. Результаты в пунктах 3 и 4 получены в соавторстве с А.А.Махневым и Д.В.Падучих; при этом вклад автора диссертации является решающим. Результат из пункта 5 получен в неразделимом соавторстве с А.А.Махневым и Д.В.Падучих.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они могут использоваться для включения в спецкурсы для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры и алгебраической комбинаторики.

3. Методы исследования.

При исследовании дистанционно регулярных графов и их групп автоморфизмов в работе применялись методы теории конечных групп, теории представлений конечных групп, методы локального анализа и спектральной теории графов, а также оригинальные методы, разработанные автором. В ряде специальных случаев привлекались компьютерные вычисления в GAP и Magma для перебора орбитальных графов групп подстановок.

4. Апробация работы.

Основные результаты работы были представлены на Международных конференциях "Мальцевские чтения" (Новосибирск, 2013, 2014, 2016, 2021), в том числе в 2017 г. в виде пленарного доклада по теме диссертации, на международной конференции, посвященной 70-летию В.Д.Мазурова (Новосибирск, 2013), Международной конференции по алгебре и комбинаторике, посвященной 60-летию А.А.Махнева (Екатеринбург, 2013), на Австралазиатских конференциях (Австралия 2013, 2021), на международных конференциях в Канаде (2014 и 2021 г.), Москве (2020 и 2021 г.), 8-м Европейском математическом конгрессе (Словения 2021 г.), Британской комбинаторной конференции (2021 г.), конференции международных математических центров мирового уровня (Сочи, 2021 г.) и других конференциях. Результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах ИММ УрО РАН, Уральского математического общества, семинарах ИМ СОРАН и НГУ "Теория групп" и "Алгебра и логика на исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры МГУ, на семинаре лаборатории математической логики ПОМИ РАН, на семинаре "Incidence Geometry" математического факультета Гентского университета. Работа отмечена премией Уральского математического общества за 2013 г. и премией Губернатора Свердловской области за 2019 г. в номинации "За лучшую работу в области математики".

5. Содержание диссертации.

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Она изложена на 217 страницах, библиография содержит 150 наименований.

Во **Введении** обосновывается актуальность темы диссертации, рассказывается об истории рассматриваемых задач, приводится краткое описание основных результатов диссертации и ее структуры.

Глава 1. В первой главе приведены основные определения и изложены необходимые базовые результаты из теории групп подстановок, теории представлений групп, теории чисел и алгебраической теории графов (в том числе конструкции реберно симметричных и дистанционно регулярных графов).

Глава 2. Эта глава является наиболее объемной. В ней получен один из центральных результатов диссертации: классификация реберно симметричных антиподальных дистан-

ционно регулярных графов диаметра 3 в случае, когда транзитивная на дугах группа автоморфизмов G графа Γ индуцирует аффинную группу подстановок G^Σ на множестве Σ его антиподальных классов.

Вначале в §2.1 с применением метода Хигмена исследования групп автоморфизмов д.р.г. найдены общие формулы для характеров мономиального матричного представления группы автоморфизмов антиподального д.р.г. диаметра 3 с $\lambda \neq \mu$. На основе классификации 2-транзитивных групп подстановок в §2.2 установлены базовые свойства группы G , в том числе когда G содержит нормальную подгруппу порядка $|\Sigma|$ (ядро этого действия на Σ обозначено через K). В §2.3 и §2.4 исследуются графы с $K > 1$ для $p = 2$ и $p > 2$ соответственно. В §2.5 доказано, что граф Γ (за небольшим исключением) известен и может быть построен с помощью конструкции Таса-Соммы или Годсила-Хензеля, обсуждавшейся во введении. Основные результаты главы 2 представлены в теоремах 2.1, 2.2, 2.3 и следствии 2.4.

Как было отмечено выше результаты этой главы получены в неразделимом соавторстве с А.А.Махневым и Д.В.Падучих.

Глава 3. Она посвящена классификации антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с квазипростой флаг-транзитивной группой автоморфизмов. Основные результаты этой главы содержатся в теоремах 3.1, 3.3, 3.6, 3.7 и 3.9. В теореме 3.1 представлены два бесконечных семейства антиподальных д.р.г. диаметра 3, связанных с группами $Sz(q)$ и ${}^2G_2(q)$, впервые открытых автором диссертации. При этом метод доказательства дистанционной регулярности соответствующих графов также является новым и основан на изучении канонической формы элементов в указанных групп, которая определяет локальное строение указанных графов. Приведенные в главе 3 результаты решают задачи, обозначенные выше в разделах 1 и 2, и получены автором лично.

Глава 4. В главе 4 завершена классификация реберно симметричных антиподальных д.р.г. Γ в почти простом случае для $Aut(\Gamma)^\Sigma$. Для этого с учетом результатов главы 3 и более ранних работ автора и соавторов оставалось классифицировать графы Γ с $r \notin \{2, k\}$, $\lambda \neq \mu$ и $\mu > 1$. Соответствующий результат представлен в теореме 4.1, доказанной совместно с А.А.Махневым и Д.В.Падучих при решающем вкладе автора диссертации.

В результате комбинации предшествующих результатов и результатов глав 3 и 4 была получена теорема 4.2, классифицирующая реберно симметричные графы диаметра 3, для которых цоколь группы подстановок G^Σ (Σ – множество антиподальных классов графа Γ) является простой неабелевой группой. В этом случае перечислены все возможности для указанной группы и установлены существование и единственность соответствующего графа.

Глава 5. Глава посвящена исследованию задачи классификации абелевых антиподальных д.р.г. Γ , обладающих следующим свойством: Γ имеет транзитивную группу автоморфизмов G , которая индуцирует простую группу подстановок G^Σ на множестве Σ его антиподальных классов. Результаты этой главы многочисленны и требуют объемных технических определений. В качестве одного из основных результатов получена в теореме 5.7 характеристика графов Тэйлора, содержащего в своей группе автоморфизмов группы M_{22} и HiS . Результаты главы 6 получены автором лично.

Глава 6. Глава посвящена классификации реберно симметричных дистанционно регулярных накрытий графов эрмитовых форм $Her(2, q^2)$, а также исследованию групп автоморфизмов антиподальных плотных графов диаметра 4 и их локальных подграфов.

В частности, в неразделимом соавторстве с А.А.Махневым и Д.В.Падучих доказана теорема 6.1, в которой описывается реберно симметричный граф диаметра 4, антиподальное частное которого изоморфно графу эрмитовых форм $Herm(2, q^2)$. Если группа $G = Aut(\Gamma)$ индуцирует группу ранга 3 на указанном графе, то Γ изоморфен либо графу Уэллса (2-накрытие графа $Herm(2, 2^2)$), либо графу смежных классов укороченного тернарного кода Голея.

Оставшаяся часть главы посвящена исследованию одного довольно загадочного класса графов $AT4(p, p + 2, r)$ -графов. В теоремах 6.2 – 6.8 найдены ограничения на простой спектр группы автоморфизмов указанных графов и найдено описание в ряде случаев. Эти результаты получены автором лично.

В заключении автор намечает дальнейшие исследования, связанные с полученными результатами.

Изложение материала в диссертации соответствует требованиям, предъявляемым к математическим текстам: все выносимые на защиту основные результаты снабжены достаточно полными и строгими доказательствами, все используемые в тексте результаты других авторов снабжены ссылками на цитируемые источники. Текст диссертации написан достаточно четким математическим языком и имеет аккуратное оформление.

Дадим следующие замечания к работе:

1. В автореферате на стр. 15 и на стр. 17 диссертации автор упоминает некую подгруппу K , строение которой важно для понимания результатов главы 2, но забывает дать ей определение. Позже, ознакомившись с содержанием главы 2 (и с формулировкой теоремы 2.1), можно догадаться, что такое подгруппа K .

2. Не указано, каким образом осуществляется перебор орбитальных графов допустимой группы TR с помощью компьютерных вычислений в Magma (стр. 92 диссертации). Понятно, что вопрос далеко не главный, но важный для неподготовленного читателя.

Указанные неточности имеют чисто технический характер, не влияют на правильность полученных в диссертации результатов и не умаляют достижения соискателя.

Результаты являются новыми, полностью доказаны и своевременно опубликованы в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК. Автореферат диссертации отвечает требованиям п.25 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013г. №842 "О порядке присуждения ученых степеней" и правильно отражает все основные результаты работы. Количество и структура публикаций соответствуют требованиям п.13 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013г. №842 "О порядке присуждения ученых степеней".

Содержание и методы диссертационной работы относятся к теории групп и соответствуют паспорту научной специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Результаты диссертации докладывались автором на многих международных конференциях и научных семинарах.

Диссертация носит теоретический характер.

Ее результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Южном федеральном университете, Казанском (Приволжском) федеральном университете, Математическом институте им. В. А. Стеклова, в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова, в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН и др. учреждениях, а также в специальных курсах для студентов-математиков.

Закключение:

Диссертационная работа Л. Ю. Циовкиной «Группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов» является законченным исследованием, выполненным автором на высоком научном уровне. Она содержит решения задач, имеющих важное значение в алгебре и ее приложениях. Представленные в работе доказательства достоверны. В работе отсутствует заимствованный материал без ссылки на автора или источник заимствования.

Диссертационная работа отвечает всем требованиям и критериям «Положения о присуждении ученых степеней» (утвержденных Постановлением Правительства Российской Федерации №842 от 24.09.2013 г.), а ее автор Циовкина Людмила Юрьевна без сомнений заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Отзыв обсужден на расширенном заседании кафедры алгебры и математической логики ЯрГУ им. П.Г.Демидова 11 апреля 2022 г., протокол № 8.

Отзыв составили:

Заведующий кафедрой
"Алгебры и математической логики" ,
ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г.Демидова
15003, Ярославль, ул. Советская, д.14
д.ф.-м.н., профессор Казарин Лев Сергеевич,
тел.+7(902) 3345164
Email:lsk46@mail.ru

Профессор кафедры
"Алгебры и математической логики" ,
ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г.Демидова
15003, Ярославль, ул. Советская, д.14
д.ф.-м.н., профессор
Тимофеева Надежда Владимировна
тел.89807473649
Email:ntimofeeva@list.ru

Сведения об организации: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Ярославский государственный университет им.П.Г.Демидова"(Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова), 150003, Ярославль, ул. Советская, д.14 тел.: +7(4852) 78-86-05, 79-77-02, факс 73-21-50, Email: rectorat@uniyar.ac.ru Официальный сайт: www.uniyar.ac.ru

12 апреля 2022 г.