

ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Дмитрия Владимировича Чурикова
«О замыканиях конечных групп подстановок»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация Дмитрия Владимировича Чурикова посвящена теории групп подстановок — старейшему разделу современной абстрактной алгебры, возникшему в XIX веке в знаменитых работах Эвариста Галуа о разрешимости уравнений в радикалах. Понятие замыкания группы подстановок — центральное для диссертационной работы — появилось в 60-х годах XX века в работах другого классика этой теории Хельмута Виланда.

Напомним, что группа подстановок G на множестве Ω действует естественным образом на декартовой степени Ω^k , орбиты этого индуцированного действия называются k -орбитами. Максимальная подгруппа симметрической группы подстановок $\text{Sym}(\Omega)$, имеющая такие же k -орбиты, что и G , называется k -замыканием группы G . С теоретической точки зрения, k -замыкания группы G являются ее последовательными аппроксимациями, поскольку ряд k -замыканий группы G , убывая при росте k , сходится к G (этот факт был установлен еще Виландом). Если же смотреть на совокупность k -орбит данной группы как на некоторую комбинаторную структуру, то k -замыкание будет полной группой автоморфизмов этой структуры. Современный интерес к теории замыканий групп подстановок во многом связан как раз с этим последним обстоятельством, в частности, эта теория используется в теории сложности вычислений при изучении проблемы изоморфизма дискретных структур, которая состоит в нахождении эффективного алгоритма, позволяющего такой изоморфизм устанавливать. В диссертации Д. В. Чурикова исследуются как теоретические, так и алгоритмические аспекты следующей общей проблемы.

Проблема k -замыкания. Для группы G подстановок конечного множества и натурального числа k найти k -замыкание $G^{(k)}$ группы G .

Еще Виланд показал, что классы конечных абелевых групп, p -групп и групп нечетного порядка замкнуты относительно k -замыкания при $k \geq 2$. Хотя 2-замыкание разрешимой группы не обязано быть разрешимым, совсем недавно было доказано, что класс разрешимых групп замкнут относительно k -замыкания при $k \geq 3$. В диссертации доказано, что в случае, когда $k \geq 2$, k -замыкание конечной нильпотентной группы подстановок есть прямое произведение k -замыканий ее силовских подгрупп, в частности, класс нильпотентных групп замкнут относительно k -замыкания при $k \geq 2$. Этот замечательный результат, полученный Д. В. Чуриковым лично, используется при доказательстве еще двух основных результатов диссертации.

Поскольку k -замыкание является оператором алгебраического замыкания, особый интерес представляют k -замкнутые группы, т.е. группы, совпадающие со своим k -замыканием. В диссертации предложен допускающий эффективную алгоритмическую проверку индуктивный критерий 2-замкнутости конечных абелевых групп с циклическими транзитивными составляющими. Этот результат получен соискателем совместно с И. Н. Пономаренко (ПОМИ РАН), одним из ведущих экспертов в данной области.

В 2016 году Д. Холт предложил подход, при котором понятие k -замкнутости переносится на абстрактные группы. В соответствии с ним группа называется вполне k -замкнутой, если все ее точные подстановочные представления k -замкнуты. Диссертанту (совместно с выдающимся австралийским математиком Шерил Элизабет Прегер) удалось установить изящный критерий вполне замкнутости для абелевых групп: нетривиальная конечная абелева группа, раскладывающаяся в произведение k инвариантных множителей, вполне $(k + 1)$ -замкнута, но не вполне k -замкнута.

С точки зрения теории вычислительной сложности наиболее важной является проблема 2-замыкания, которая эквивалентна проблеме нахождения группы автоморфизмов некоторого полного цветного графа, ассоциированного с исходной группой. В диссертации показано, что 2-замыкание $\frac{3}{2}$ -транзитивной группы подстановок можно найти за время полиномиальное от степени группы, а также решены связанные с этой задачей проблема изоморфизма цветных шуровых $\frac{3}{2}$ -однородных когерентных конфигураций и проблема описания групп автоморфизмов циклотомических схем над почти-полями (совместно с научным руководителем). Отметим, что класс $\frac{3}{2}$ -транзитивных групп, включающий в себя, например, все группы Фробениуса, вызывает большой интерес у специалистов. Недавно в работе [Liebeck M. W., Praeger C. E, Saxl J. The classification of $\frac{3}{2}$ -transitive permutation groups and $\frac{1}{2}$ -transitive linear groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2019. Vol. 147] была завершена классификация таких групп. Эта классификация используется в диссертационной работе.

Считаю, что диссертация Д. В. Чурикова соответствует всем критериям, установленным в положении о присуждении ученых степеней: работа посвящена актуальной теме, полученные в ней результаты составляют цельное научное исследование, являются новыми, полностью и правильно обоснованы, своевременно и в полном объеме опубликованы в научных изданиях. Результаты и методы, предложенные автором, будут использованы в дальнейших исследованиях в теории групп подстановок, абстрактных конечных групп, алгебраической комбинаторике и теории сложности вычислений. Вышеизложенное позволяет утверждать, что Дмитрий Владимирович Чуриков заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель

доктор физико-математических наук

профессор Андрей Викторович Васильев

630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4

телефон: +7 383-3297646

e-mail: vasand@math.nsc.ru

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт математики им. С. Л. Соболева

Сибирского отделения Российской академии наук

главный научный сотрудник лаборатории алгебры

29 декабря 2021 г.

А. В. Васильев

Подпись А. В. Васильева заверяю:

И. о. ученого секретаря

кандидат физико-математических наук

29 декабря 2021 г.

Я. А. Копылов