

ОТЗЫВ

официального оппонента по диссертации Циовкиной Людмилы Юрьевны
«Группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов»,
представленной на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел.

В диссертации изучаются группы автоморфизмов дистанционно-регулярных графов при дополнительных ограничениях на строение графа или на действие группы на графе. Исследуются транзитивные и, в основном, флаг-транзитивные группы автоморфизмов антиподальных дистанционно-регулярных графов небольшого диаметра $d \in \{3, 4\}$. Задача описания таких групп, с одной стороны, представляет самостоятельный интерес, а с другой — полезна при исследовании вопросов построения разнообразных объектов комбинаторики и геометрии. Рассматриваются следующие основные вопросы: 1) определение комбинаторных свойств графа, в частности, его допустимых массивов пересечений; 2) исследование связи локальных комбинаторных свойств графа и строения его группы автоморфизмов (локальный подход); 3) описание группы автоморфизмов графа по ее действиям (i) на вершинах, (ii) на дугах, (iii) на антиподальных классах (глобальный подход). Основное внимание уделяется последним двум вопросам. Перечислим наиболее значительные результаты диссертации.

1. Классифицированы антиподальные дистанционно регулярные графы смежных классов диаметра 3 с порядками антиподальных классов $r > 2$ простых групп Ли ранга 1 и групп $SU_3(q)$. Найдены новые бесконечные семейства антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3, связанные с сериями простых групп Судзуки и Ри.

2. Доказана дистанционная регулярность графа множества инволюций групп Судзуки $Sz(q)$ и $U_3(q)$ ($q = 2^n \geq 4$), в котором две вершины-инволюции смежны, если порядок их произведения равен ассоциированному простому числу группы в смысле Судзуки. Для групп $U_3(2^n)$ решена задача М. Джудичи и Э. Девиллера описания графов S_3 -инволюций. Доказано, что граф S_3 -инволюций простой группы $L_2(2^n)$ изоморфен графу Мэттона. Выявлено несколько новых бесконечных семейств локально сильно регулярных графов являющихся фактор-графами графов S_3 -инволюций групп $L_2(2^n)$.

3. Описаны флаг-транзитивные группы G автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 индуцирующие почти простую 2-транзитивную группу G^Σ подстановок на множестве Σ антиподальных классов графа Γ , и классифицированы графы Γ в почти простом случае группы G^Σ .

4. Получено описание флаг-транзитивных групп G автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 в случае, когда G индуцирует аффинную 2-транзитивную группу подстановок на множестве Σ антиподальных классов графа Γ . Показано, что при нечетном $|\Sigma|$ за исключением двух случаев граф Γ является графом Таса-Соммы или графом Годсила-Хензеля.

5. Доказано, что антиподальное дистанционно регулярное покрытие диаметра 4 графа эрмитовых форм $\text{Her}_m(2, q^2)$, группа автоморфизмов которого действует транзитивно на дугах и индуцирует группу подстановок ранга 3 на множестве его антиподальных классов, изоморфно графу Уэлса или графу смежных классов укороченного тернарного кода Голея.

6. Получены ограничения на простой спектр и строение группы автоморфизмов $\text{AT}_4(p, p+2, r)$ -графа в случае, когда p — степень простого числа. Доказано, что $\text{AT}_4(p, p+2, r)$ -графы с $p = 5, 7, 11, 17, 27$ не являются реберно симметричными.

7. Исследован класс абелевых антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 обладающих транзитивной группой автоморфизмов G индуцирующей примитивную почти простую группу подстановок G^Σ на множестве Σ антиподальных классов графа. Такие графы классифицированы при дополнительном условии, что цоколь группы G^Σ — спорадическая простая группа ранга 3.

Результаты диссертации опубликованы в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук. Результаты в пунктах 1, 2, 6 и 7 получены автором лично. Результаты в пунктах 3 и 4 получены в соавторстве с А.А. Махневым и Д.В. Падучих, при этом, как отмечено в автореферате диссертации, вклад автора диссертации является решающим. Результат из пункта 5 получен в неразделимом соавторстве с А.А. Махневым и Д.В. Падучих.

При исследовании в работе применяются методы теории конечных групп, теории представлений групп, методы локального анализа и спектральной теории графов, а также оригинальные методы, разработанные автором. В работе в ряде специальных случаев привлекались компьютерные вычисления в GAP и Magma для перебора орбитальных графов групп подстановок. Несмотря на объемный арсенал перечисленных средств, в диссертации преобладают методы теории конечных групп, и полученные результаты важны не только для теории графов, но и углубляют знания о строении конечных простых групп и их расширений. Диссертация состоит из оглавления, введения, 6 глав, заключения и списка литературы, занимает 217 страниц (по 3 000 символов) текста, набранного в системе LaTeX.

Глава 1 диссертации имеет вспомогательный характер. В ней приведены основные используемые определения и обозначения, изложены необходимые базовые результаты из теории групп подстановок, теории представлений, теории чисел и алгебраической теории графов, схем отношений, конструкции реберно симметричных графов и дистанционно регулярных графов (появившиеся при изучении различных математических структур и принадлежащие многим известным математикам), а также ряд результатов, полученных диссертантом и его соавторами.

Согласно известному результату Г. Сибадусси каждый реберно-симметрический граф изоморфен подходящему графу смежных классов своей группы автоморфизмов. В главе 2 получена классификация реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 в случае, когда транзитивная на дугах группа автоморфизмов графа индуцирует аффинную группу подстановок на множестве его антиподальных классов. Основные результаты главы изложены в теоремах 2.1, 2.2, 2.3.

В главе 3 классифицируются антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3 (и приводятся доказательства их существования) с флаг-транзитивной группой автоморфизмов, изоморфной простой конечной группе Ли ранга 1, а также

группе $SU_3(q)$. Изучены графы S_3 -инволюций для конечных простых групп и дана характеристика некоторых известных графов своими массивами пересечений в классе вершинно-транзитивных графов. Все результаты главы представляют значительный интерес, приведём формулировку только двух теорем.

Теорема 3.1. Пусть $G \in \{Sz(q), {}^2G_2(q)\}$, где q — степень простого числа p , $S \in \text{Syl}_p(G)$ и $q > 3$. Пусть g — это инволюция из $G - N_G(S)$, $\langle h \rangle$ — это подгруппа нечетного индекса $r > 1$ из $N_G(S) \cap N_G(S)^g$ и $H = S\langle h \rangle$. Тогда $\Gamma(G, H, HgH)$ — это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений

- (1) $\{q^2, (q^2 - 1)(r - 1)/r, 1, 1, (q^2 - 1)/r, q^2\}$ при $G = Sz(q)$, или
- (2) $\{q^3, (q^3 - 1)(r - 1)/r, 1, 1, (q^3 - 1)/r, q^3\}$ при $G = {}^2G_2(q)$,

и граф $\Gamma(G, H, HgH)$ не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора инволюции $g \in G - N_G(S)$.

Теорема 3.7. Пусть Γ — вершинно-транзитивный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{n - 1, (r - 1)c_2, 1, 1, c_2, n - 1\}$ и $n = rc_2 + 2$ — простое число Ферма. Если число r — простое, то граф Γ изоморфен графу Мэттона (с тем же массивом пересечений).

В главе 4 завершена классификация реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 в почти простом случае для $\text{Aut}(\Gamma)^\Sigma$.

Теорема 4.2 Пусть Γ — это реберно симметричный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3 с массивом пересечений $\{k, (r - 1)\mu, 1, 1, \mu, k\}$, где $r \notin \{2, k\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$ и Σ — это множество антиподальных классов графа Γ . Предположим, что цоколь $\text{Soc}(G^\Sigma)$ группы подстановок G^Σ , индуцируемой группой G на Σ , является простой неабелевой группой. Тогда G содержит нормальную подгруппу, накрывающую для $\text{Soc}(G^\Sigma)$, которая действует транзитивно на дугах графа Γ , и четверка $(\text{Soc}(G^\Sigma), k, r, \mu)$ одна из следующих:

- (1) $(L_2(q), q, r, \frac{q-1}{r})$, где $q \geq 4$, число r делит $\frac{q-1}{(2, q-1)}$ (Γ — граф из конструкции Мэттона);
- (2) $(U_3(q), q^3, r, \frac{q^3-1}{r})$, где $q \geq 4$, число r нечетно и делит $q - 1$ (Γ — граф из конструкции Броувера);
- (3) $(Sz(q), q^2, r, \frac{q^2-1}{r})$, где $q \geq 8$, число r делит $q - 1$;
- (4) $({}^2G_2(q), q^3, r, \frac{q^3-1}{r})$, где $q \geq 27$, число r делит $\frac{q-1}{2}$;
- (5) $(U_3(q), q^3, r, \frac{(q+1)(q^2-1)}{r})$, где $q \geq 3$, число r делит $\frac{q+1}{(2, q+1)}$ (Γ — граф из конструкции Камерона);
- (6) $(U_3(q), q^3, r, \frac{(q+1)(q^2-1)}{r})$, где $q \geq 3$, число r делит $q + 1$, а числа q и $(q + 1)/r$ нечетны;

Для каждой фиксированной допустимой четверки $(\text{Soc}(G^\Sigma), k, r, \mu)$ граф Γ существует и является единственным (с точностью до изоморфизма).

В главе 5 диссертации исследован класс абелевых (в смысле Годсила и Хензеля) антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 обладающих транзитивной группой автоморфизмов G индуцирующей примитивную почти простую группу подстановок G^Σ на множестве Σ антиподальных классов графа. Описаны такие графы при условии, что $(\text{Soc}(G^\Sigma))$ — спорадическая простая группа ранга 3 (теорема 5.7 и следствие 5.9).

В главе 6 классифицированы реберно симметричные дистанционно регулярные антиподальные накрытия диаметра 4 графов эрмитовых форм $\text{Her}_m(2, q^2)$, при условии, что группа автоморфизмов графа индуцирует группу ранга 3 на антиподальном частном (теорема 6.1). Исследованы группы автоморфизмов антиподальных плотных графов диаметра 4 (и их локальных подграфов), и решен вопрос существования реберно симметричных графов из рассматриваемого класса при небольших значениях параметра p , определяющего массив пересечений такого графа (теоремы 6.2, 6.4 – 6.8).

Основные результаты диссертации являются новыми, своевременно опубликованы, известны специалистам и составляют крупный вклад в теорию конечных простых групп и алгебраическую комбинаторику. Они несомненно будут применяться в дальнейших исследованиях по теории групп, алгебраической комбинаторике и приложениях. В издательстве СО РАН (Новосибирск) в 2018 г. опубликована монография Махнева А. А. и Циовкиной Л. Ю. "Антиподальные дистанционно-регулярные графы и их автоморфизмы в которой изложены основы (антиподальных) дистанционно-регулярных графов и соответствующих им комбинаторных и алгебраических структур.

Ряд результатов, вошедших в диссертацию, были отмечены премией Уральского математического общества молодым математикам за 2013 год и премией Губернатора Свердловской области для молодых ученых за 2016 год в номинации "За лучшую работу в области математики".

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация Циовкиной Людмилы Юрьевны "Группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов" удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям по специальности 01.01.06, а её автор заслуживает присвоения ученой степени доктора физико-математических наук.

Официальный оппонент
профессор кафедры и математической логики
Института математики и фундаментальной информатики
ФГАОУ ВО "Сибирский федеральный университет"
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
доктор физико-математических наук,
профессор А. И. Созутов
+7(391) 206-28-27, +7 983-144-32-17
E-mail: sozutov_ai@mail.ru

27 апреля 2022 г.