О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию Циовкиной Людмилы Юрьевны
ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ,
представленную на соискание
учёной степени доктора физико-математических наук по специальности
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертационная работа Циовкиной Людмилы Юрьевны "Группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов" посвящена исследованию фундаментальной проблемы, лежащей на стыке теории конечных групп и алгебраической комбинаторики, а именно, классификации групп автоморфизмов комбинаторных структур, принадлежащих заданному классу. Один из наиболее интересных и важных таких классов в алгебраической комбинаторике представлен дистанционно регулярными графами; свойство дистанционной регулярности является комбинаторным аналогом дистанционной транзитивности (неориентированный граф Γ диаметра d называется дистанционно транзитивным, если для каждого неотрицательного целого i, $0 \leq i \leq d$, группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве всех упорядоченных пар вершин на расстоянии i в графе Γ). Несмотря на то, что интенсивные исследования длятся уже более полувека, классификация групп автоморфизмов даже дистанционно транзитивных графов (не говоря уже о дистанционно регулярных) диаметра $d \geq 3$ все еще далека от завершения; для случая $d = 2$ полная классификация была завершена Кантором и Либлером в 1982 г.

В классе дистанционно регулярных графов особую (и чрезвычайно важную) роль играют антиподальные графы, то есть такие, для которых бинарное отношение "совпадать или находиться на максимальном расстоянии" на множестве вершин является отношением эквивалентности. Многочисленные примеры таких графов возникают из сферических билдингов ранга 2, линейных кодов, матриц Адамара и других алгебраических и комбинаторных структур. Как всегда в таких случаях, наибольший интерес представляют графы с достаточно большим числом симметрий; к их числу как раз и относятся реберно симметричные графы, то есть те, группа автоморфизмов которых действует транзитивно на множестве дуг. В этом смысле конкретная проблема, исследуемая в настоящей диссертации, а именно, классификация дистанционно регулярных антиподальных реберно симметричных графов небольшого диаметра и их групп автоморфизмов, представляется естественной и актуальной. По поводу актуальности стоит отметить (и тут я вполне согласен с автором диссертации), что систематически эта проблема до сих пор в полной мере не изучена.

Остановимся на основных результатах, полученных в диссертации. Пусть Γ – дистанционно регулярный антиподальный реберно симметричный граф диаметра 3. Известно, что в этом случае группа подстановок, индуцированная действием группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ на множестве Ξ антиподальных классов графа Γ, является дважды транзитивной. Поэтому исследование графа Γ и группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ естественным образом разбивается на два случая, в зависимости от того, является ли группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)^{\Xi}$ аффинной или почти простой. Разбору первого случая посвящена глава 2. Здесь почти во всех случаях удалось полностью классифицировать графы Γ (теорема 2.3) и группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ (теоремы 2.1 и 2.2). Второй случай – значительно более сложный, ему посвящены главы 3 и 4. Здесь для всех возможных графов получается либо явное описание, либо необходимое и достаточное условие их существования (теорема 4.2), при этом группы Aut(Г) почти полностью классифицированы (теорема 4.1). Нельзя не отметить, что в процессе доказательства получены два новых, ранее неизвестных бесконечных семейства антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3, которые отвечают некоторым специальным действиям групп Судзуки и групп Ри (теорема 3.1). Доказательства всех этих (и многих других, не упоминаемых здесь) результатов используют тонкий и скрупулезный анализ действий классических и исключительных групп Ли с применением алгебраической и спектральной теории графов.

Кратко упомянем результаты глав 5 и 6. В первой из них развивается теория, направленная на изучение вершинно транзитивных абелевых (в смысле Годсила и Хензеля) дистанционно регулярных антиподальных графов Г диаметра 3, для которых группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)^{\Xi}$ примитивна и почти проста. Случай, когда ранг последней равен двум, сводится к уже разобранному случаю реберно симметричных графов. Глава 5 посвящена исследованию случая, когда ранг группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)^{\Xi}$ равен трем. Здесь путем сведения к минимальным частным графа Г получены необходимые условия его существования, при этом разработан метод ограничения спектра и параметров его минимальных частных в зависимости от параметров ассоциированных с $\mathrm{Aut}(\Gamma)^{\Xi}$ графов ранга 3 (теорема 5.3, предложения 5.4, 5.6). Затем эта техника применена для исследования случая, когда индуцируемая группа имеет простой спорадический цоколь (следствие 5.9). Стоит подчеркнуть, что важность исследования класса абелевых дистанционно регулярных антиподальных графов Г диаметра 3 обусловлена, в том числе, их возможными приложениями в дискретной геометрии (конструкции таких графов являются источником некоторых специальных множеств равноугольных прямых). Наконец, в главе 6 получена классификация реберно симметричных дистанционно регулярных антиподальных накрытий Г графов эрмитовых форм, при условии, что Aut(Г) индуцирует группу ранга 3 на антиподальном частном (теорема 6.1). В этой же главе исследованы группы автоморфизмов некоторых антиподальных плотных графов диаметра 4 (теоремы 6.2, 6.4-6.6, следствие 6.3) и локальных подграфов последних.

Диссертация написана и оформлена очень профессионально, практически без опечаток, стилистических погрешностей и неточностей (отметим лишь неточность в определении сильно регулярного графа на стр. 30, где пропущено слово "различных" во фразе "любых двух вершин", опечатку на стр. 40, где множество сначала обозначенное через $\mathcal{P}$ далее именуется $\mathcal{R}$, не переведенное на русский язык слово “quotient” на стр. 161, и, на мой взгляд, неоправданное использование слов "длина" и "размер" вместо слова "мощность"). Это, разумеется, относится в большей степени к форме, и никоим образом не сказывается на содержательности диссертации и не влияет на мою высокую оценку этой работы.

Диссертация является целостным математическим исследованием и представляет существенный вклад в алгебраическую комбинаторику и теорию конечных групп. Результаты диссертации и методы их доказательства могут быть использованы специалистами, работающими в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В. А. Стеклова РАН, механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, Институте математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Институте математики имени С. Л. Соболева СО РАН, а также в других научных центрах России.

Все основные результаты диссертации являются новыми, носят теоретический характер и представляют несомненный интерес для специалистов по алгебраической комбинаторике и теории групп. Доказательства изложены достаточно подробно и ясно. Вошедшие в диссертацию результаты опубликованы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования, и включенных в перечень ВАК рецензируемых научных изданиях, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук. Также результаты докладывались на семинарах и международных конференциях и хорошо известны специалистам. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация Циовкиной Людмилы Юрьевны "Группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов" удовлетворяет всем требованиям ВАК Минобрнауки, предъявляемым к докторским диссертациям в соответствии с критериями, установленными "Положением о порядке присуждения ученых степеней" от 24.09.2013 г. № 842, а ее автор Л.Ю. Циовкина бесспорно заслуживает присуждения ей учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
Пономаренко Илья Николаевич
ведущий научный сотрудник лаборатории теории представлений и вычислительной математики ПОМИ РАН

Почтовый адрес:
Российская федерация, 191023,
г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27,
Телефон: +7 (812) 312-40-58
E-mail: inp@pdmi.ras.ru

14 апреля 2022 г.