# ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию

**Дудкина Федора Анатольевича**

**«Групповые и алгоритмические свойства обобщённых групп Баумслага–Солитера»**

представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

В диссертации изучаются теоретико-групповые и алгоритмические свойства обобщённых групп Баумслага–Солитера. Как следует из названия, эти группы являются расширением понятия знаменитых групп Баумслага–Солитера, введенных Г. Баумслагом и Д. Солитером в 1962 году в виде групп с двумя порождающими элементами a, b и одним определяющим соотношением $b^{-1}a^{m} b = a^{n}$. Обобщённые группы Баумслага–Солитера (далее GBS группы) появляются естественно в разных областях математики и поэтому допускают разные, хотя и эквивалентные описания. В геометрической теории групп они возникают как конечнопорожденные группы, действующие на деревьях так, что все вершинные и рёберные стабилизаторы – бесконечные циклические группы; в комбинаторной теории групп эти группы получаются в результате применения конечного числа базисных «свободных конструкций» (свободных произведений с объединением и HNN расширений); с более топологической точки зрения GBS группы могут быть охарактеризованы как фундаментальные группы графов групп, вершинные и рёберные группы которого бесконечные циклические. GBS группы и их различные свойства очень активно изучались в течении последних тридцати лет. На мой взгляд, интерес к этим группам обусловлен несколькими важными обстоятельствами: с одной стороны, это - широкий и сам по себе очень интересный класс групп, постоянно и независимо возникающих в различных областях математики, с другой стороны, GBS группы, и в особенности, группы Баумслага-Солитера, дают принципиальные примеры групп с определенными свойствами (не хопфовы, не гиперболические, не финитно аппроксимируемые, с неразрешимой теорией первого порядка и т. д.). Есть еще одна, не менее важная, причина изучения GBS групп. Дело в том, что эти группы часто появляются как «особые» подгруппы других, совершенно разных групп. В качестве таких подгрупп они либо играют роль «минимальных препятствий» к тем или иным свойствам их содержащих групп, либо служат хорошими инструментами (проводниками технологий) при изучении их содержащих групп. Например, известная (и до сих пор открытая) гипотеза Герстена утверждает, что группа с одним определяющим соотношением гиперболична тогда и только тогда, когда она не содержит разрешимую группу Баумслага-Солитера в качестве своей подгруппы. Все это объясняет исключительную важность всестороннего изучения класса GBS групп и их свойств.

Цель диссертации состоит в разработке методов изучения теоретико групповых и алгоритмических свойств обобщённых групп Баумслага–Солитера, а также применении этих методов для решения некоторых открытых проблем теории групп.

Диссертация состоит из введения и пяти глав. В первой главе вводятся основные обозначения и обсуждаются используемые результаты. Во второй главе изучаются Группы Баумслага–Солитера и их связь с GBS группами. Третья глава посвящена централизаторной размерности GBS групп и ее приложений к универсальной эквивалентности. В четвертой главе изучаются различные классы GBS групп, в частности связанные с аппроксимируемостью и узлами. В пятой – получены результаты по принципиальным алгоритмическим проблемам изоморфизма и вложения для GBS групп.

Диссертация является цельной работой, как в идейном, так и в методическом плане.

Среди основные результатов диссертации я хочу отметить следующие:

1. Описана структура абстрактного соизмерителя групп Баумслага-Солитера BS(p,q) с взаимно простыми параметрами $p, q$ (не равными 1, −1). Заметим, что для групп BS(1,q) описание соизмерителя было получено ранее О. Богопольским.

   Установлен следующий критерий вложимости групп Баумслага-Солитера BS(p,q) с взаимно простыми параметрами в GBS группу G, а именно, группа BS(p,q) вкладывается в G тогда и только тогда, когда в G уравнение $x^{-1}y^{p}x = y^{q}$ имеет решение с нетривиальными x и y. В этом случае сами вложения построены явно. Тем самым решён вопрос Ж. Левитта 2007 года. Это очень важный результат для приложений.

2. Описана централизаторная размерность произвольных GBS групп и построен алгоритм для ее вычисления. На самом деле, описаны произвольные максимальные цепочки централизаторов GBS групп. Это очень важные результаты для теории GBS групп. Их доказательства технически довольно сложные, зато полученные описания на удивление удобные. Я уверен, что у этих результатов будут очень интересные приложения.

   Найден критерий универсальной эквивалентности GBS групп, представленных деревьями с метками, а именно, две таких группы универсально эквивалентны если и только если они вложимы друг в друга. В некотором смысле это максимально естественный критерий универсальной эквивалентности групп. Кроме того, построен алгоритм проверки универсальной эквивалентности таких GBS групп. Заметим, что общая проблема описания универсально эквивалентных GBS групп до сих пор открыта и представляется довольно сложной.

3. Описаны все группы n-узлов, которые действуют на деревьях с бесконечными циклическими стабилизаторами вершин и рёбер.

   Явно описаны подгруппы конечного индекса небольших GBS групп (здесь группа *небольшая* если никакая ее подгруппа конечного индекса не имеет гомоморфизма на неабелеву свободную группу) и изучены их свойства. Тем самым решён вопрос Ж. Левитта 2015 года.

4. Для GBS групп G, которые имеют только конечное число представлений при помощи редуцированных графов с метками, указан критерий наличия вложения произвольной GBS группы в группу G. В этом случае описан алгоритм проверки вложимости и построения вложения. Для GBS групп G, заданных графом с метками с одним мобильным ребром, указан алгоритм проверки изоморфизма произвольной GBS группы и группы G. Это интересные и очень серьезные результаты, находящиеся на пределе наших знаний о GBS группах. Общие проблемы вложения и изоморфизма GBS групп по-прежнему открыты.

Результаты диссертации являются новыми, они полностью доказаны и опубликованы в российских и зарубежных журналах, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов. Они были представлены в докладах на крупных научных конференциях.

Диссертация хорошо написана, доказательства изложены понятно. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты имеют важное значение и могут быть использованы в исследованиях по теории групп, особенно в геометрической и комбинаторной теории групп, алгоритмической и теоретико-модельной алгебре, а также алгебраической топологии. Они могут быть включены в специальные курсы, читаемые в различных университетах.

Диссертация соответствует требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней, утвержденного Постановлением Правительства Российской

Федерации от 24.09.2013, N 842. Диссертация является научно квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение.

Диссертационная работа Ф. А. Дудкина «Групповые и алгоритмические свойства обобщённых групп Баумслага–Солитера», полностью соответствует всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор, Федор Анатольевич Дудкин, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент:
Доктор физико-математических наук
Профессор
Математического Департамента
Технологического Института им. Стивенса

Алексей Георгиевич Мясников

20 апреля 2022 года

Stevens Institute of Technology
Castle Point on Hudson, Hoboken, NJ, USA, 07030