ОТЗЫВ

научного консультанта о диссертации Циовкиной Людмилы Юрьевны «Группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Один из классических подходов к изучению конечной группы заключается в ее представлении в виде группы автоморфизмов некоторого ассоциированного с ней графа и описании ее действия на данном графе. В качестве такого ассоциированного графа может выступать граф Кэли, граф коммутирования, граф смежных классов или граф π-локального слияния. Наряду с тем, фундаментальным является вопрос о том, в какой мере строение группы зависит от свойств симметрии ассоциированного графа.

Особое значение для теории конечных групп имеют графы с такими свойствами симметрии, как дистанционная транзитивность и дистанционная регулярность. Так, каждая конечная неабелева простая группа, за некоторыми исключениями, является группой автоморфизмов некоторого Q-полиномиального дистанционно регулярного графа. Кроме того, около половины спорадических простых групп были построены как группы автоморфизмов дистанционно-транзитивных графов диаметра 2 (графов ранга 3). Таким образом, исследование групп автомофизмов дистанционно регулярных графов представляет несомненный интерес для теории конечных групп. По теореме Бабаи-Камерона такие графы могут не иметь нетривиальных автоморфизмов, поэтому естественно в первую очередь изучать группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов, накладывая дополнительные ограничения на их действие на графе, такие как транзитивность на вершинах или на дугах. С одной стороны, эти ограничения гарантируют, что граф может быть восстановлен по его группе автоморфизмов, что в свою очередь, интересно с точки зрения построения новых классов дистанционно регулярных графов и связанных с ними объектов. С другой стороны, известны как спорадические примеры, так и бесконечные классы конечных простых и квазипростых групп, представимых вершинно-транзитивными или флаг-транзитивными (или транзитивными на дугах) группами автоморфизмов дистанционно регулярных графов, что демонстрирует актуальность изучения подобных обобщений дистанционно-транзитивных групп.

В диссертационной работе Л.Ю. Циовкиной проводится систематическое исследование вершинно-транзитивных и, в основном, флаг-транзитивных групп автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра не больше пяти, образующих один из наиболее широких классов импримитивных дистанционно регулярных графов. Интерес именно к этому классу графов обусловлен множеством сильных взаимосвязей между их известными конструкциями и другими комбинаторными и алгебраическими объектами, такими как проективные плоскости, геометрии Мура, обобщенные четырехугольники, делимые дизайны, коды (Препараты, Рида–Маллера, Кердока), матрицы Адамара, конечные группы. Так, например, имеется ряд важных представлений конечных простых групп и их накрытий группами автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов небольшого диаметра, в том числе, представление группы $3.Fi'_{24}$ флаг-транзитивной группой автоморфизмов антиподального дистанционно регулярного графа диаметра 4 (знаменитого антиподального тройного накрытия графа 3-транспозиций третьей группы Фишера Fi'_{24}), описанное С. Нортоном (1988), а также представления групп $U_3(q)$, ${}^2G_2(q)$, HiS и Co_3 флаг-транзитивными группами автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3, найденные Д. Тейлором (1992). Хорошо известно, насколько трудны проблемы существования и построения вышеуказанных родственных объектов. Тем ценнее становится получение новой существенной информации о строении групп автоморфизмов графов, рассматриваемых в диссертации, и очень редким является открытие новых их примеров.

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы.

В первой главе приводятся основные обозначения и терминология, а также вспомогательные результаты из теории чисел, теории групп подстановок и излагается метод анализа характеров подстановочного представления группы автоморфизмов дистанционно регулярного графа (т.н. метод Хигмена). Там же описываются основные применяемые в диссертации конструкции дистанционно регулярных графов и приводится ряд вспомогательных утверждений о графах с флаг-транзитивными группами автоморфизмов, а также о дистанционно регулярных накрытиях полных графов и сильно регулярных графов.

Одной из основных задач диссертации является исследование флаг-транзитивных групп автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3, которому посвящены вторая, третья и четвертая главы диссертации. Такой граф имеет массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, где $2 \leq r \leq k$, является антиподальным r-накрытием $(k+1)$-клики и для параметров r, λ, μ и k верно равенство $k-1-r\mu = \lambda-\mu$. Совокупность результатов М. Ашбахера (1971), Э. Гардинера (1974), Д. Тейлора (1992) дает классификацию дистанционно-транзитивных групп таких графов при $r = 2, k$. В работе К. Годсила, Р. Либлера и Ш. Прэгер (1998) были классифицированы антиподальные дистанционно-транзитивные графы диаметра 3 и их группы автоморфизмов при $2 < r < k$. Ключевым наблюдением для их исследования, позволившим основать рассуждения на классификации конечных 2-транзитивных групп подстановок, стал тот факт, что любая флаг-транзитивная группа G автоморфизмов антиподального дистанционно регулярного графа диаметра 3 индуцирует 2-транзитивную группу подстановок G^Σ на множестве его антиподальных классов Σ, а если, к тому же, G является дистанционно-транзитивной, то глобальный стабилизатор антиподального класса F в G действует 2-транзитивно на F. Однако, в общей ситуации, когда предполагается только флаг-транзитивность группы G, второе свойство может нарушаться и методы исследования флаг-транзитивных групп автоморфизмов графа, предложенные в вышеупомянутой работе, становятся неприменимыми.

Исследование проблемы описания антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с флаг-транзитивными группами автоморфизмов было начато в работе А.А. Махнева, Д.В. Падучих и Л.Ю. Циовкиной (2013). В ней были рассмотрены случаи $r = 2$, k, и найдены необходимые условия существования таких графов Γ при условии $\lambda = \mu$, в частности, доказано, что если $r > 2$ и $\lambda = \mu$, то группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)^\Sigma$ не является аффинной. С учетом этих результатов, исследование данной проблемы, проводимое диссертантом, разделено на рассмотрение следующих трех случаев для $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$:

1. G^Σ — аффинная группа;

2. G^{Σ} — почти простая группа и $\lambda = \mu$;

3. G^{Σ} — почти простая группа и $\lambda \neq \mu$.

В диссертации исследован каждый из этих случаев. Следует отметить, что для многих допустимых групп G^{Σ} рассматриваемая проблема потребовала отдельного и глубокого анализа, в том числе, с применением самых современных знаний и методов, таких как свойства алгебр смежности этих графов, классификация О'Нэна–Скотта примитивных групп подстановок, классификация 2-транзитивных групп подстановок, подгрупповое строение конечных простых групп, сведения о группах когомологий конечных групп, теория (обыкновенных и модулярных) представлений.

Так, во второй главе диссертации получено описание антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 в случае, когда полная группа автоморфизмов графа действует флаг-транзитивно и индуцирует аффинную 2-транзитивную группу подстановок на множестве антиподальных классов. Было установлено допустимое строение флаг-транзитивной группы автоморфизмов такого графа и найдены ограничения для его массива пересечений. На основе этих результатов показано, что за исключением одномерного случая и случая $\mu = 1$, при нечетном числе антиподальных классов все такие графы являются графами Таса-Соммы или графами Годсила-Хензеля.

Один из наиболее трудоемких этапов работы заключался в описании флаг-транзитивных квазипростых групп автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $2 < r < k$. В третьей главе диссертации классифицированы антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 3 с $r > 2$, допускающие флаг-транзитивное действие группы $L_2(q)$, $SU_3(q)$, $Sz(q)$ или ${}^2G_2(q)$, найдены новые бесконечные семейства таких графов и их различные конструкции. С применением этих результатов решена проблема описания графов S_3-инволюций групп $U_3(2^n)$ и установлено, что графы S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$ являются дистанционно регулярными графами Мэтона. Исследовано локальное строение фактор-графов графов S_3-инволюций групп $L_2(2^n)$ и выделены четыре бесконечных серии таких графов с сильно регулярными окрестностями вершин. Показана единственность реберно симметричного графа с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$.

В четвертой главе завершена классификация антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3, группа автоморфизмов которых действует флаг-транзитивно и индуцирует почти простую группу подстановок на множестве антиподальных классов.

В пятой главе исследуется задача классификации абелевых (в смысле Годсила и Хензеля) антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, обладающих следующим свойством: $(*)$ Γ *имеет транзитивную группу автоморфизмов G, которая индуцирует примитивную почти простую группу подстановок G^{Σ} на множестве Σ его антиподальных классов*. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что G совпадает с полным прообразом группы G^{Σ} в $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. В случае, когда подстановочный ранг группы G^{Σ} равен 2, граф Γ со свойством $(*)$, удовлетворяющий данному условию на ранг, является реберно симметричным, и решение задачи следует из совокупности ранее перечисленных результатов диссертации. В пятой главе исследован класс абелевых антиподальных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 со свойством $(*)$ в следующем случае, когда ранг группы G^{Σ} равен 3. При этом получен ряд существенных ограничений на спектр и параметры графа Γ, а также предложена схема классификации таких графов в зависимости от типа его т.н. минимальных частных. В итоге, поставленная задача решена при условии, что цоколь группы G^{Σ} является спорадической простой группой. Доказательство основано на классификации примитивных групп соответствующего типа и отвечающих им графов ранга 3.

Шестая глава посвящена изучению групп автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 4.

Антиподальные дистанционно-транзитивные накрытия импримитивных графов ранга 3 классифицированы в работе А.А. Иванова, Р. Либлера, Ш. Прэгер и Т. Пентилы. В работах Дж. Ван Бона и А. Броувера, Дж. Хэмметера, А. Юришича, М. Альфурайдана получено описание антиподальных дистанционно регулярных накрытий многих примитивных графов ранга 3. До сих пор нерешенной остается задача классификации дистанционно регулярных антиподальных накрытий диаметра 4 графов эрмитовых форм $\mathrm{Herm}(2, q^2)$, сформулированная Ван Боном и Броувером в 1987 году. В диссертации исследованы группы автоморфизмов таких графов. В итоге, полностью описаны дистанционно регулярные антиподальные накрытия диаметра 4 графов $\mathrm{Herm}(2, q^2)$ в случае, когда группа автоморфизмов накрытия флаг-транзитивна и индуцирует группу ранга 3 на его антиподальном частном.

В настоящее время известно существование бесконечных семейств двудольных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 4 и всего лишь четырнадцати примеров недвудольных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 4. Особый интерес представляет собой исследование недвудольных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 4, для которых достигается равенство в фундаментальной границе (в смысле Кулена, Юришича и Тервиллигера). Такие графы имеют сильно регулярные локальные подграфы с неглавными собственными значениями p и $-q$ и называются антиподальными плотными графами диаметра 4 с параметрами (p, q, r) или просто $AT4(p, q, r)$-графами, где r – порядок антиподального класса. Почти все известные недвудольные антиподальные дистанционно регулярные графы диаметра 4 являются дистанционно-транзитивными $AT4(p, q, r)$-графами. Если параметры p и q связаны соотношением $q = p + 2$, то ввиду результата Юришича $AT4(p, q, r)$-граф имеет нулевой параметр Крейна q^4_{44}, что в свою очередь влечет ряд дополнительных ограничений на структуру графа. Примером $AT4(2, 4, 3)$-графа является первый граф Сойчера. Он допускает флаг-транзитивное действие квазипростой группы $3_2.U_4(3)$. Существование других $AT4(p, p + 2, r)$-графов неизвестно. В диссертации исследованы группы автоморфизмов гипотетических $AT4(p, p+2, r)$-графов при условии, что p является степенью простого числа и решен вопрос о том, допускают ли такие графы флаг-транзитивные группы автоморфизмов при небольших допустимых значениях параметра p.

Результаты диссертации докладывались на крупных международных научных конференциях и семинарах, являются новыми, полностью и правильно обоснованы, своевременно и в полном объеме опубликованы в научных изданиях, удовлетворяющих требованиям ВАК. Совокупность полученных в работе результатов является существенным продвижением в развитии классического научного направления — изучения конечных групп и их представлений группами автоморфизмов графов. Результаты и методы, предложенные автором, будут применяться в дальнейших исследованиях, проводимых в данном направлении, а также будут полезны для приложений.

Считаю, что диссертационная работа «Группы автоморфизмов дистанционно регулярных графов» удовлетворяет требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор, Циовкина Людмила Юрьевна, заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук.

Научный консультант
член-корреспондент РАН
доктор физико-математических наук
профессор Александр Алексеевич Махнев
620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16
телефон: +7 (343) 375-34-36
e-mail: makhnev@imm.uran.ru
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук
главный научный сотрудник Отдела алгебры и топологии А.А. Махнев

Подпись А.А. Махнева заверяю:
ученый секретарь ИММ УрО РАН
кандидат физико-математических наук О.Н. Ульянов